CAMBRIDGE

现代数学译丛 26

Bäcklund变换和Darboux变换
——几何与孤立子理论中的应用

〔澳〕C. Rogers W. K. Schief 著
周子翔 译

(O-5932.01)

科学数理分社
电话：(010)64011058
E-mail：lixin_kx@mail.sciencep.com
网址：http://www.math-phy.cn

CAMBRIDGE
UNIVERSITY PRESS

www.sciencep.com



定 价 128.00 元

现代数学译丛 26

Bäcklund 变换和 Darboux 变换

——几何与孤立子理论中的应用

〔澳〕C. Rogers　W. K. Schief　著

周子翔　译

科学出版社

北京

纪念英国皇家学会会员 David Crighton 教授
献给 Christel 和 Wolfgang

Colin Rogers 是新南威尔斯大学荣誉退休教授, 澳大利亚研究理事会(ARC)复杂系统的数学与统计卓越中心特约研究员, 剑桥大学 Clare Hall 的终身成员. 他毕业于牛津大学, 在 Nottingham 大学获博士学位, 是专著 *Bäcklund Transformations and Their Applications* (1982)的作者之一. 他是澳大利亚科学院院士, 2011 年由于他的数学研究成果获得该科学院的 Hannan 数学科学奖, 他还获得了澳大利亚政府的百年奖章.

Wolfgang K. Schief 是新南威尔斯大学教授, 该校数学与统计学院应用数学系主任. 他还是柏林科技大学微分几何教授和新南威尔斯大学ARC研究员, 澳大利亚研究理事会(ARC)复杂系统的数学与统计卓越中心首席研究员, 香港理工大学应用数学系工程与应用数学名誉研究员.[①]

①有关两位作者的信息已由作者本人更新.——译者

译 者 序

本书的作者 Rogers 教授和 Schief 教授在孤立子理论及其同微分几何的联系方面作出了大量重要的工作. 虽然我在十年前才同他们第一次见面, 但早在二十世纪八十年代中期, 当我开始学习孤立子理论时, 所学的两本书之一就是 Rogers 教授和 Shadwick 教授所著的 *Bäcklund Transformations and Their Applications* 一书, 后来又读过 Rogers 和 Schief 教授的一些文章. 本书 *Bäcklund and Darboux Transformations — Geometry and Modern Applications in Soliton Theory* 出版于 2002 年, 是孤立子几何理论方面的著名著作, 谷超豪先生在该书出版之际收到 Rogers 教授赠书后就曾向我们推荐过. 所以当 Rogers 教授提议让我将此书翻译成中文时, 我欣然接受.

非常感谢作者提供了本书英文版的全部 LaTeX 源文件, 包括所有插图的文件, 这不但使得翻译时节省了大量输入公式的工作, 并且避免了可能产生的打印错误, 特别是使得中译本的插图能保持原来的质量. 为了中译本的出版, 作者专门更新了参考文献中所有在英文原版书出版时尚为预印本的文献目录, 并在本书最后列出了英文原版书出版后新完成的文献目录.

本书的出版得到了国家自然科学基金 (No. 11171073) 的资助. 在出版过程中, 科学出版社的李欣编辑做了大量的工作, 在此表示感谢.

译 者

2014 年 9 月

序　言

"唯有联结"

—— E. M. Forster,《霍华德庄园》

经典曲面微分几何和现代孤立子理论之间已经建立了深入的联系. 微分几何中的 Bäcklund 变换以及以 Levy 变换和基本变换形式出现的 Darboux 型变换成为孤立子理论中产生非线性方程解的重要工具. Eisenhart 在他 1922 年出版的专著《曲面的变换》的序中断言:

在过去 25 年里, 欧氏空间中曲面微分几何方面的许多进展同某一类型的曲面到同一类型的曲面之间的变换有关.

著名的几何学家, 如 Bianchi, Calapso, Darboux, Demoulin, Guichard, Jonas, Ribaucour, Weingarten 都对具有各类变换的曲面类作了详细的研究.

该书主要介绍在 Bäcklund-Darboux 变换下具有不变性的曲面类. Bäcklund 变换下的不变性已经成为所有孤立子方程的共性. 从几何角度来看, 孤立子方程来源于许多在 Bäcklund-Darboux 变换下不变的曲面的非线性 Gauss-Mainardi-Codazzi 方程组, 这些曲面的线性 Gauss-Weingarten 方程组在加入了 Bäcklund 参数后给出非线性孤立子方程所相应的线性表示.

于是, 起源于十九世纪的 Bäcklund-Darboux 变换架起了经典微分几何和现代孤立子理论之间的桥梁. 伪球曲面、常平均曲率曲面、Bianchi 曲面、等温曲面是一些典型的曲面, 它们出现在经典文献中且具有 Bäcklund 变换以及相关的非线性叠加原理和可换性定理. 对于与这些曲面相联系的孤立子方程, 可换性定理提供了递推生成这些方程解的纯代数方法.

该书将以 Bäcklund-Darboux 变换为媒介, 介绍十九世纪和二十世纪早期经典微分几何的结果同当代孤立子理论之间的许多联系, 所用的方法在相当程度上基于 Darboux 和 Bianchi 的经典工作. 孤立子理论的研究者通过该书可了解相应问题的几何背景. 该书也可作为应用数学或数学物理方向的大学高年级学生或研究生的教科书, 在新南威尔士大学, 孤立子的几何理论课程已开设了多年.

前言与摘要

曲线和曲面的微分几何起源于十九世纪早期 Monge (1746-1818) 和 Gauss (1777-1855) 的奠基性工作. Monge 的主要贡献包含在他于 1807 年出版的《分析在几何中的应用》(*Applications de l'Analyse à la Géometrie*) 一书中. 该书 1850 年的版本有着特别的价值, 它包含 Liouville (1820-1882) 写的一个注记, 其中介绍了 Frenet (1816-1888), Serret (1819-1885), Bertrand (1822-1900), Saint-Venant (1796-1886) 等名人的工作, 其中 Saint-Venant 在几何方面的研究工作主要基于他对弹性问题的兴趣. Gauss 对曲面几何的研究源于对测地线的研究, 该项研究得到汉诺威选帝候的资助, 这些工作包含于他在 1828 年出版的专著《曲面的一般研究》(*Disquisitiones Generals Circa Superficies Curvas*) 中. 书中 Gauss 建立了 Gauss 方程组, 它是后来曲面分析的基础. Gauss 方程组加上一些特殊类型曲面上的对称性成为联系经典微分几何和现代孤立子理论的基础, 而此联系是本书要讨论的中心.

孤立子理论也起源于十九世纪早期. 1834 年, 苏格兰工程师 John Scott Russell 首次在 Edinburgh 附近的运河中发现了峰状的波, 1965 年在 Kruskal 和 Zabusky 研究著名的 Fermi-Pasta-Ulam 问题时该现象被重新发现, 并被命名为*孤立子*. Scott Russell 发现这个 “巨大的行波” 的波速正比于它的高度. 1844 年, 他在给英国科学促进协会的报告中, 生动描述了一个水箱实验, 以重现这个大波幅的水波, 同时也描述了如何产生两个这样的波的方法. 但是, Scott Russell 的实验只能持续一小段时间, 因此不可能发现孤立子完整的相互作用性质, 而且在当时既没有非线性发展方程来描述这类波的传播, 也没有足够的分析方法来预测它们的相互作用性质.

1895 年, 两位荷兰数学家 Korteweg 和 de Vries 得到了一个非线性波方程, 现在就称为 Korteweg-de Vries 方程 (KdV 方程), 它的标准形式是

$$u_t + u_{xxx} + 6uu_x = 0. \tag{1}$$

它描述了矩形运河中长波的运动, 并通过一个简单的行波解从理论上肯定了 60 年前 Scott Russell 在联合运河中看到的孤立波. 但是, 通常人们不太了解的是, 早在 1877 年 Boussinesq 在专著《流动水的理论》(*Essai sur la Théorie des Eaux Courantes*) 中已经建立了现在所称的 Korteweg-de Vries 方程. 更早些, Boussinesq 在 1871 年的两篇文章中已出现了描述矩形运河中水波运动的方程组, 它等价于 KdV 方程.

1960 年, Gardner 和 Morikawa 在研究磁流体波的传播时再次发现了 KdV 方程, 进而发现它是固体、液体和气体的各种理论中描述大振幅波的一个标准模型.

1965 年, 著名的 Fermi-Pasta-Ulam 问题中再现 KdV 方程标志着现代孤立子理论的诞生. 在 Kruskal 和 Zabusky 先驱性的研究中, 从带有三次项的非简谐格点模型的连续极限得到了 KdV 方程, 他们通过计算表明, 在这个非线性模型中存在的孤立波在相互作用后仍保持它们的波幅和速度, 为此他们创造了一个名词 *soliton* (孤立子) 来表示这种最初由 Scott Russell 在流体中发现的波. 然而, 当时并不知道如何得到解的解析表达式以分析这种相互作用.

另一方面, 一种描述孤立子相互作用的普遍性方法起源于 Bäcklund 在十九世纪给出的一种变换, 当时他用这种变换来生成伪球曲面, 即具有负常 Gauss 曲率 $K=-1/\rho^2$ 的曲面. 对这类曲面的研究至少开始于 Edmond Bour 在 1862 年的工作, 他从渐近坐标表示的伪球曲面的 Gauss-Mainardi-Codazzi 方程组出发导出了著名的 sine-Gordon 方程

$$\omega_{uv}=\frac{1}{\rho^2}\sin\omega. \tag{2}$$

随后, sine-Gordon 方程被 Bonnet 于 1867 年、Enneper 于 1868 年分别用类似的方法独立得到.

1879 年, Bianchi 用他的变换给出了伪球曲面的纯几何构造. 1882 年, Bäcklund 给出了他著名的变换 $\mathbf{B}_\sigma$, 由该变换可以通过递推方法构造一系列伪球曲面. 1883 年, Lie 给出了分解 $\mathbf{B}=\mathbf{L}_\sigma^{-1}\mathbf{B}_{\pi/2}\mathbf{L}_\sigma$, 它表明 Bäcklund 变换 $\mathbf{B}_\sigma$ 可用不依赖参数的 Bianchi 变换 $\mathbf{B}_{\pi/2}$ 通过 Lie 变换 $\mathbf{L}_\sigma$ 的共轭得到, 从而 Lie 变换的作用是在最初的 Bianchi 变换中加入关键的参数 σ.

1892 年, 在《伪球曲面的 Bäcklund 变换》(*Sulla Trasformazione di Bäcklund perle Superficie Pseudosferiche*) 一文中, Bianchi 给出了一个重要的性质, 即 Bäcklund 变换具有可换性 $\mathbf{B}_{\sigma_2}\mathbf{B}_{\sigma_1}=\mathbf{B}_{\sigma_1}\mathbf{B}_{\sigma_2}$, 由此即可导出非线性叠加原理. Bianchi 的可换性定理在物理上的重要性直到 1953 年 Seeger 等将它应用于晶体位错的研究时才显示出来. 根据 Frenkel 和 Kontorova 于 1938 年建立的晶体位错理论, 他们所称的特征运动可从经典可换性定理得到. 现在所称的带扭结型位错的呼吸子的相互作用性质既可从可换性定理分析得到, 也可从图像上看到. 1965 年在对 KdV 方程的数值计算中发现的孤立子的典型特征, 包括在相互作用中保持速度和形状不变以及相移的存在, 对于 sine-Gordon 方程来说, 在 Bianchi 的上述文章中都已用可换性定理得到.

1958 年, Skyrme 从描述粒子相互作用的非线性理论出发导出了高维的 sine-Gordon 方程, 1965 年, Josephson 在对超导的隧道效应的开创性研究 (后来因此获得诺贝尔奖) 中也得到了同样的方程. 1967 年, Lamb 在分析超短光脉冲的传输时得到了经典的 sine-Gordon 方程, 他借助于 Seeger 等早期的工作, 用 Bäcklund 变换

分析了 $2N\pi$ 光脉冲到 N 个稳定的 2π 脉冲的分裂. 这个分裂现象的实验在 1970 年已由 Gibbs 和 Slusher 完成, 他们在铷蒸气中将一个 6π 脉冲分裂成了三个 2π 脉冲. 同年, Scott 将可换性定理用于长 Josephson 结的研究.

1973 年, Wahlquist 和 Estabrook 发现, KdV 方程和 sine-Gordon 方程一样, 也具有保持方程不变的 Bäcklund 型的变换, 同时也具有可换性定理. 用可换性定理可产生多孤立子解, 从而可用解析方法得到 Zabusky 和 Kruskal 在对 KdV 方程的数值研究中得到的孤立子的相互作用性质.

1974 年, Lamb 用 Clairin 于 1910 年建立的古典方法构造了非线性 Schrödinger 方程 (NLS)

$$\mathrm{i}q_t + q_{xx} + \nu q^2|q| = 0 \tag{3}$$

的 Bäcklund 变换及其非线性叠加原理. NLS 方程在光纤中有着重要的应用. 该方程好像最初是由 Kelley 和 Talanov 分别于 1965 年在研究非线性 Kerr 介质中光束的自聚焦现象时建立的. 1968 年, Zakharov 在研究深水重力波时导出了 NLS 方程. 1971 年, Hasimoto 在研究孤立细涡丝的流体动力学时近似得到了此方程. NLS 方程也可从几何中导出, 它同 $\mathbb{R}^3$ 中不可伸长曲线的运动相关. 可积方程同不可伸长曲线的空间运动的联系自然导致了我们对孤立子几何理论的研究.

1974 年, 人们已熟悉典型方程 (1)–(3) 的 Bäcklund 变换, 同年美国国家自然科学基金会在 Vanderbilt 大学举行会议来评估 Bäcklund 变换的研究现状及其潜在的作用. 1973 年, 著名的 ZS-AKNS 谱问题由 Ablowitz 等建立, 许多可用反散射方法求解的 1+1 维非线性发展方程都可归结为 ZS-AKNS 系统的相容性条件. H. H. Chen 借助于 ZS-AKNS 系统用漂亮的方法导出了 (1)–(3) 的自 Bäcklund 变换.

ZX-AKNS 系统的线性结构导致了另一类起源于十九世纪的变换 ——Darboux 变换在孤立子理论中的应用. Darboux 变换开始于 1882 年 Darboux 对 Sturm-Liouville 问题的研究. 然而, 这是 Moutard 在 1878 年将线性双曲型方程约化为标准形式时所建立的变换的特殊情形. 1955 年, Crum 对 Sturm-Liouville 问题建立了递推的 Darboux 变换. 1975 年, Wadati 等用 Crum 变换生成了与 ZX-AKNS 系统相关的可积方程的多孤立子解. 从几何上来看, 这些递推的 Darboux 变换对应于经典曲面论中的 Lery 序列, 见 Eisenhart 的《曲面的变换》(*Transformations of Surfaces*).

1976 年, Lund 和 Regge 在研究后来以他们命名的孤立子系统时, 有了一个重要的发现, 即 sine-Gordon 方程对应的 ZS-AKNS 系统就是伪球曲面的 Gauss-Weingarten 方程组的 2×2 矩阵表示. 同年 Pohlmeyer 独立发现了这个联系.

于是, 到 1976 年, 起源于曲面微分几何中的 Bäcklund 变换与 Darboux 变换同孤立子理论的关系已经非常清楚了. 本书的目的是将这些问题联系在一起, 不但要

介绍它们在历史上的联系, 也要介绍它们在现代的发展. 本书是 Rogers 和 Shadwick 1982 年的专著的进一步发展, 该书用非几何方式介绍了 Bäcklund 变换及其在孤立子理论和连续介质力学中的应用. 本书中的几何观点在很大程度上受到了 Antoni Sym 于 1981 年出版的《孤立子理论就是曲面论》(*Soliton Theory is Surface Theory*) 的启发.

第 1 章介绍了经典 Bäcklund 变换及其变化形式同现代孤立子理论的联系. 首先利用渐近坐标下双曲曲面的 Gauss-Mainardi-Codazzi 方程组导出了 Bianchi 所给出的经典非线性方程组, 在伪球曲面的特殊情形就得到著名的 sine-Gordon 方程. 1.2 节介绍了伪球曲面的几何构造以及 sine-Gordon 方程的自 Bäcklund 变换的导出. 1.3 节中, 通过 Bäcklund 变换导出了 Bianchi 的可换性定理, 并且给出了一个交换格, 由此可用纯代数方法得到多孤立子解. 1.4 节构造了 sine-Gordon 方程的单孤立子解和双孤立子解对应的伪球曲面. 静态单孤立子解对应于伪球面, 非静态单孤立子解对应于 Dini 曲面, 即由曳物线通过同时旋转和平移而得到的螺旋面. 进而用可换性定理得到了双孤立子解, 并由此得到了对应于呼吸子 (关于空间局域并关于时间周期的解) 的伪球曲面. 1.5 节中, 直接得到了平行于伪球曲面的曲面的 Bäcklund 变换, 这使得经典 Bäcklund 变换的作用扩展到了经典 Weingarten 曲面. 本章的最后部分研究一类重要的与孤立子相关的曲面 ——Bianchi 曲面, 它由方程组

$$
\begin{aligned}
&a_v + \frac{1}{2}\frac{\rho_v}{\rho}a - \frac{1}{2}\frac{\rho_u}{\rho}b\cos\omega = 0,\\
&b_u + \frac{1}{2}\frac{\rho_u}{\rho}b - \frac{1}{2}\frac{\rho_v}{\rho}a\cos\omega = 0,\\
&\omega_{uv} + \frac{1}{2}\left(\frac{\rho_u}{\rho}\frac{b}{a}\sin\omega\right)_u + \frac{1}{2}\left(\frac{\rho_v}{\rho}\frac{a}{b}\sin\omega\right)_v - ab\sin\omega = 0,\\
&\rho_{uv} = 0
\end{aligned}
\tag{4}
$$

确定, 其中 $\mathcal{K} = -1/\rho^2$ 是 Gauss 曲率, u, v 是渐近坐标. 1890 年, Bianchi 给出了这类双曲曲面的纯几何构造. 约束 $\rho_{uv} = 0$ 于一百年之后被 Levi 和 Sym (1990) 在研究一类具有可积的 Gauss-Mainardi-Codazzi 方程组的双曲曲面时重新用到, 他们的方法是对双曲曲面的 Gauss-Weingarten 方程组的 2×2 矩阵表示通过 Lie 群方法引入一个谱参数. 1.6 节用球表示证明了 Bianchi 方程组 (4) 事实上等价于广义的非线性 σ 模型

$$
\begin{aligned}
&(\rho N N_u)_v + (\rho N N_v)_u = 0, \quad N^2 = \mathbb{1}, \quad N^\dagger = N,\\
&\rho_{uv} = 0.
\end{aligned}
\tag{5}
$$

何. 方程组 (5) 的一个向量形式隐含在 Bianchi 的工作中.

Bianchi 方程组的一个椭圆形式导致了广义相对论中著名的 Ernst 方程

$$\mathcal{E}_{z\bar{z}} + \frac{1}{2}\frac{\rho_{\bar{z}}}{\rho}\mathcal{E}_z + \frac{1}{2}\frac{\rho_z}{\rho}\mathcal{E}_{\bar{z}} = \frac{\mathcal{E}_z\mathcal{E}_{\bar{z}}}{\Re(\mathcal{E})}, \quad \rho_{z\bar{z}} = 0. \tag{6}$$

最后, 用几何方法得到了联系两个双曲曲面的 Bäcklund 变换, 并在 Bianchi 方程组的特殊条件下得到相应的变换. 对于退化的种子 Bianchi 曲面, 用 Bäcklund 变换产生了单孤立子 Bianchi 曲面.

第 2 章讨论如何从曲线和曲面的运动导出孤立子曲面. 2.1 节从具有常曲率或常挠率的不可伸长曲线的运动中导出了 sine-Gordon 方程. 在常挠率情形, 曲线扫出一个伪球曲面. 2.2 节中, 应用 $so(3)$ 与 $su(2)$ 的同构, 从 3×3 Gauss-Weingarten 表示出发得到了 sine-Gordon 方程的 AKNS 谱问题. 2.3 节讨论了与 sine-Gordon 方程相容的孤立子方程所相应的伪球曲面的运动, 其中一种运动与非简谐格点模型的连续极限相联系, 而此模型联系于重要的变形 KdV 方程 (mKdV 方程)

$$\omega_t + \omega_{xxx} + 6\omega^2\omega_x = 0. \tag{7}$$

mKdV 方程与 KdV 方程通过 Miura 变换相联系, 它同 KdV 方程一样, 在物理中有重要的应用, 例如描述等离子体物理中的 Alfvén 波的传播.

另一类伪球曲面的重要运动是纯法向运动, 它产生一类由 Weingarten 和 Bianchi 研究过的系统, 该系统可在 Eisenhart 的书《曲线和曲面的微分几何》(*A Treatise on the Differential Geometry of Curves and Surfaces*) 中找到, 它与曲面的三元正交系统相联系, 其中一族是伪球面. 该系统的形式为

$$\begin{gathered}
\theta_{xyt} - \theta_x\theta_{yt}\cot\theta + \theta_y\theta_{xt}\tan\theta = 0, \\
\left(\frac{\theta_{xt}}{\cos\theta}\right)_x - \frac{1}{\rho}\left(\frac{1}{\rho}\sin\theta\right)_t - \frac{\theta_y\theta_{yt}}{\sin\theta} = 0, \\
\left(\frac{\theta_{yt}}{\sin\theta}\right)_y + \frac{1}{\rho}\left(\frac{1}{\rho}\cos\theta\right)_t + \frac{\theta_x\theta_{xt}}{\cos\theta} = 0, \\
\theta_{xx} - \theta_{yy} = \frac{1}{\rho^2}\sin\theta\cos\theta.
\end{gathered} \tag{8}$$

对连续格点模型和上述系统, Bäcklund 变换可以通过作用在 AKNS 系统上的规范变换得到. 在该章最后的 2.4 节, 用零挠率的不可伸长曲线的运动得到了 mKdV 方程, 然后研究了孤立子 Dini 曲面的运动并构造了曲面的三元正交 Weingarten 系统.

第 3 章研究经典Tzitzeica 曲面. 如同伪球曲面, Tzitzeica 曲面也与孤立子有着密切的联系. 二十世纪初, 罗马尼亚几何学家Tzitzeica 发现了一类曲面, 它们同下

列重要的双曲型方程

$$(\ln h)_{\alpha\beta} = h - h^{-2} \tag{9}$$

相联系, 七十年后人们又发现它们与孤立子有着联系. Tzitzeica 对与此方程相联系的曲面的研究导出了仿射几何中的一个重要概念 —— 仿射球, 它由 Tzitzeica 方程 (9) 所描述.

在 3.1 节中, 引入了一类由 Tzitzeica 条件 $\mathcal{K} = -c^2 d^4$, $c =$ 常数 所决定的曲面 Σ, 这里 d 是 Σ 上一点的切平面到原点的距离. Tzitzeica 方程的线性表示首先由 Tzitzeica 给出, 随后德国几何学家 Jonas 在 1953 年重新得到了这个线性表示并用其对偶从方程 (9) 导出了另一个重要的方程 —— 仿射球方程

$$\left(\frac{R_u}{R^2 v^2}\right)_u = \left(\frac{R R_v}{v^2}\right)_v. \tag{10}$$

这个方程后来又从一类具有三参数的本构方程的各向异性气体动力学方程组的Lagrange 描述中被重新导出. 在 3.2 节中, 用几何方法导出了一族 Tzitzeica 曲面的 Bäcklund 变换, 并阐述了它同 1878 年产生的经典 Moutard 变换的联系. 然后, 通过将 Bäcklund 变换作用于 Tzitzeica 方程的平凡解 $h = 1$ 上得到了旋转对称的仿射球, 进而构造了方程 (9) 的单孤立子和双孤立子解所对应的 Tzitzeica 曲面, 特别给出了对应于呼吸子解的 Tzitzeica 曲面.

Tzitzeica 方程包含在另一个更早被研究的经典系统中, 这个孤立子系统就是二维 Toda 格模型

$$(\ln h_n)_{uv} = -h_{n+1} + 2h_n - h_{n-1}, \quad n \in \mathbb{Z}. \tag{11}$$

在 Darboux 于 1887 出版的专著中出现的这个非线性微分差分方程, 将近一个世纪以后在现代孤立子理论中被重新发现. 在 Darboux 的工作中, 此方程是通过 Laplace-Darboux 变换的迭代得到的, 而 Laplace-Darboux 变换同现代 Moutard 变换一样, 起源于将线性双曲型方程约化到标准形式的递推过程. 它们在经典曲面微分几何中的共轭网理论中有着有趣的应用. Laplace-Darboux 变换的这个性质在 Eisenhart 的《曲面的变换》(*Transformations of Surfaces*) 中有详细的介绍. 在 3.3 节中介绍了 Laplace-Darboux 变换及其相关的不变性, 并用 Laplace-Darboux 变换导出了 Toda 格方程 (11), Tzitzeica 方程是一个特殊的周期 Toda 方程. 进一步, 给出了一般的二维 Toda 格模型的一个变换, 并且它保持周期性. 此外, 重复应用 Laplace-Darboux 变换可产生一系列曲面, 其上的参数曲线构成共轭网.

在第 4 章中我们集中讨论 NLS 方程 (3). 在十九世纪, 它并没有被几何学家重视, 虽然它有一个简单的几何起源, 即空间中一条不可伸长曲线以速度 $\boldsymbol{v} = \kappa \boldsymbol{b}$ 的运

程, 给出了对应于单孤立子和呼吸子的孤立子曲面及其几何性质, 同时给出了 NLS 方程与 Heisenberg 自旋方程

$$\boldsymbol{S}_t = \boldsymbol{S} \times \boldsymbol{S}_{ss}, \quad \boldsymbol{S}^2 = 1 \tag{12}$$

的联系, 这里 t 是时间, s 是弧长. 4.2 节中, 用几何方法导出了一个与 NLS 方程相联系的孤立子系统 ——Pohlmeyer-Lund-Regge 模型

$$\begin{aligned} &\theta_{\xi\xi} - \theta_{\eta\eta} - \epsilon^2 \cos\theta \sin\theta + (\phi_\xi^2 - \phi_\eta^2)\cos\theta \operatorname{cosec}^3\theta = 0, \\ &(\phi_\xi \cot^2\theta)_\xi = (\phi_\eta \cot^2\theta)_\eta, \end{aligned} \tag{13}$$

该方程组起源于对相对论性涡丝的研究, 它还与锐线自感应透明 (SIT) 方程组

$$\begin{aligned} \chi_{tx} &= \sin\chi + \nu_t \nu_x \tan\chi, \\ \nu_{tx} &= -\nu_x \chi_t \cot\chi - \nu_t \chi_x (\cos\chi \sin\chi)^{-1} \end{aligned} \tag{14}$$

相关, 而后者源于未泵浦 Maxwell-Bloch 方程组

$$\begin{aligned} &E_x = P, \quad P_t = EN, \\ &N_t = -\frac{1}{2}(\bar{E}P + E\bar{P}), \quad N^2 + P\bar{P} = 1. \end{aligned} \tag{15}$$

在此方程组中, E 表示电场强度的慢变振幅, $P = e^{i\nu}\sin\chi$ 表示极化强度的慢变振幅, $N = \cos\chi$ 表示原子反转率. 未泵浦 Maxwell-Bloch 方程组又同受激 Raman 散射方程组 (SRS)

$$A_{1X} = -SA_2, \quad A_{2X} = \bar{S}A_1, \quad S_T = A_1\bar{A}_2 \tag{16}$$

相联系, 这里 A_1, A_2 分别是泵浦波和 Stokes 波的电场强度的振幅. 通过 NLS 方程与未泵浦 Maxwell-Bloch 方程组的联系, 我们得到了 SIT 方程组和 SRS 方程组与 NLS 方程的联系, 进而通过 NLS 方程的 AKNS 表示的特征函数对的适当时间演化导出了方程组 (15). 用几何语言来说, 这个未泵浦 Maxwell-Bloch 方程组可从 Hasimoto 曲面的某种运动得到, 就像 mKdV 方程或 Weingarten 方程组可从伪球曲面的某种运动得到一样. 4.3 节中, 用另一几何方法再次得到 NLS 方程, 该方法源于 Marris 和 Passman 在 1969 年对一类流体运动的动力学分析. 在此表示下, 通过生成 Hasimoto 曲面得到了 NLS 方程的自 Bäcklund 变换, 进而得到了 "烟圈" 型的关于空间周期的解.

第 5 章研究另一类与孤立子有关的经典曲面 —— 等温曲面. 这类曲面可能是 Lamé 在 1837 年研究热传导问题时引入的. 1867 年, Bonnet 研究了一类重要的特

殊等温曲面. 这些 Bonnet 曲面具有非平凡的等距族, 它们保持主曲率 κ_1 和 κ_2 不变, 从而保持 Gauss 曲率 $\mathcal{K}=\kappa_1\kappa_2$ 和平均曲率 $\mathcal{M}=(\kappa_1+\kappa_2)/2$ 不变. 5.1 节中, 建立了用曲率线坐标表示的等温曲面的 Gauss-Mainardi-Codazzi 方程

$$\begin{gathered}\theta_{xx}+\theta_{yy}+\kappa_1\kappa_2 e^{2\theta}=0,\\ \kappa_{1x}+(\kappa_1-\kappa_2)\theta_x=0, \qquad \kappa_{2y}+(\kappa_2-\kappa_1)\theta_y=0,\end{gathered} \tag{17}$$

同时给出了它的一个约化

$$\left(\frac{z_{xy}}{z}\right)_{xx}+\left(\frac{z_{xy}}{z}\right)_{yy}+(z^2)_{xy}=0, \tag{18}$$

这是一个四阶非线性方程, 最初由 Calapso 在 1903 年得到.

5.2 节中引入了 $\mathbb{R}^{n+2}$ 中等温曲面的概念, 并将经典等温方程组 (17) 推广到一个新的可积系统. 5.3 节中构造了一个向量 Calapso 方程组及其 Lax 对. 此 Calapso 方程组推广了表示 $\mathbb{R}^{n+2}$ 中等温曲面的方程 (18). 静态 Davey-Stewartson II 方程与之相联系, 从而可用来描述 $\mathbb{R}^4$ 中的等温曲面, 类似地, 静态 Davey-Stewartson III 方程可用来描述 Minkowski 空间 $\mathbb{M}^4$ 中的等温曲面. 5.4 节讨论孤立子理论中很重要的共轭网变换的经典结果, 给出共轭网方程在所谓的基本变换下的不变性, 而基本变换可分解为一个梳状变换和两个径向变换的复合. 在 5.5 节中说明, $\mathbb{R}^3$ 中这个经典结果事实上在任何维数中都成立, 曲率线网的 Ribaucour 变换这一经典概念也作了相应的推广. 利用这些结论可得到 $\mathbb{R}^{n+2}$ 中等温曲面的 Bäcklund 变换. 5.6 中构造了 $\mathbb{R}^{n+2}$ 中共轭网的基本变换的可换性定理, 并给出了各种几何应用, 进而建立了 Bianchi 四边形的平面性、共圆性及常交比性. 5.7 节中, 对一个与 $\mathbb{R}^{n+2}$ 中等温曲面相联系的向量 Calapso 方程组, 得到了它的 Bäcklund 变换及其可换性定理. 5.8 节中用 Darboux-Ribaucour 变换和 Moutard 变换构造了经典等温方程组和 Calapso 方程的显式解, 得到了单孤立子等温曲面、Calapso 方程的团块解以及 Dupin 四次圆纹曲面型的可积曲面, 并由此给出, zoomeron 方程的局域解可通过 Lie 点对称与重要的 Davey-Stewartson III 方程的 dromion 解相联系.

第 6 章介绍了用 $su(2)$ 线性表示构造孤立子曲面时关键的 Sym-Tafel 公式. 6.1 节中, 用 Sym-Tafel 公式从 sine-Gordon 方程的 AKNS 表示构造了伪球曲面, 然后更一般地研究了 $r=-\bar{q}$ 的 AKNS 梯队, 即 NLS 梯队

$$\begin{pmatrix} q\\ -\bar{q}\end{pmatrix}_t=\mathrm{i}A_N L^N\begin{pmatrix} q\\ \bar{q}\end{pmatrix}, \quad L=\mathrm{i}\begin{pmatrix}-\partial_x-\dfrac{1}{2}q\partial_x^{-1}\bar{q} & \dfrac{1}{2}q\partial_x^{-1}q\\ -\dfrac{1}{2}\bar{q}\partial_x^{-1}\bar{q} & \partial_x+\dfrac{1}{2}\bar{q}\partial_x^{-1}q\end{pmatrix}, \tag{19}$$

这里 L 是递推算子, A_N 是常数. 然后我们说明, 高阶 NLS 梯队与标准的 NLS 方

6.2 节中, 我们将看到, 与 NLS 梯队 (19) 相联系的孤立子曲面的位置向量满足一个可积系统 —— 势 NLS 特征函数梯队. 对 (19) 式的 AKNS 表示应用一个规范变换产生 NLS 特征函数梯队. 进一步用一个 Miura 型变换给出了 NLS 梯队与相应的特征函数梯队之间的联系的几何解释. 6.3 节中引入了反向变换的概念, 并用于生成圈孤立子方程

$$X_T = \pm\left(\frac{X_Z}{\sqrt{1+X_Z^2}}\right)_{ZZ}, \tag{20}$$

它同 mKdV 方程通过反向变换和规范变换的组合相联系. 然后, 给出了复 NLS 梯队的圈孤立子解, 它们与孤立子曲面的产生自然联系在一起. 6.4 节中, 讨论了 Dym 方程

$$\rho_t = \rho^{-1}(\rho^{-1})_{xxx} \tag{21}$$

或更一般的 Dym 梯队

$$\rho_t = \rho^{-1}(-D^3 rIr)^n \rho\rho_x, \quad n = 1, 2, \cdots \tag{22}$$

在反向变换下的不变性, 这里 $D\phi = \phi_x$, $I\phi := \int_x^\infty \phi(\sigma, t)\mathrm{d}\sigma$, $r = \rho^{-1}$. 这个反向变换, 加上适当的 Galileo 变换, 可导出 KdV 梯队

$$u_t = K^n u_x, \quad n = 1, 2, \cdots, \quad K = \frac{\partial^2}{\partial x^2} - 4u + 2u_x \int_x^\infty \mathrm{d}x \tag{23}$$

的自 Bäcklund 变换的空间部分. 由此 Bäcklund 变换出发导出了势 KdV 方程的可换性定理, 与之相关的有数值分析中的非线性外插 ϵ 算法. 接着用曲线的平面运动以纯几何方式导出了 mKdV 梯队. 6.5 节中, 再次用生成 NLS 方程的几何方法, 分别用常曲率和常挠率的不可伸长曲线的从法向运动以自然的几何方法导出了 Dym 方程和 sine-Gordon 方程的可积推广. 推广的 Dym 方程是

$$\tau_b = \left[\frac{1}{\kappa}\left(\frac{1}{\tau^{1/2}}\right)_{ss} - \tau^{3/2} + \kappa\left(\frac{1}{\tau^{1/2}}\right)\right]_s, \tag{24}$$

它由具有常曲率 κ 的不可伸长曲线的运动生成, 运动速度是 $\boldsymbol{v} = \tau^{-1/2}\boldsymbol{b}$. 另一方面, 具有常挠率 $\tau \neq 0$ 的不可伸长曲线的运动给出推广的 sine-Gordon 方程组

$$\begin{aligned} \omega_{sb} - \tau(\cos\omega\tanh\phi)_b &= \sin\omega\cosh\phi, \\ \phi_s &= \tau\sin\omega, \end{aligned} \tag{25}$$

其中 $\theta_s = \kappa$, $\theta_b = \tau^{-1}\sinh\phi$. 这时, 曲线的速度是 $\boldsymbol{v} = -(\theta_b/2\tau)\boldsymbol{b}$. 由反向变换下的不变性得知, 与每个推广的 Dym 方程相联系的孤立子曲面, 都存在平行对偶孤立

子曲面. 对推广的 Dym 方程和 sine-Gordon 方程组, 构造了它们的自 Bäcklund 变换, 并用于构造新的孤立子曲面. 最后, 给出了一类变换, 它类似于 Bianchi 对伪球曲面所作的经典变换.

第 7 章中, 给出了 Bäcklund 变换和矩阵 Darboux 变换之间的重要联系. 7.1 节中, 用表示孤立子曲面的位置向量的 Sym-Tafel 公式说明, 最早用来构造伪球曲面的 Bäcklund 变换给出了经典 Darboux 变换的矩阵形式, 而用于构造 NLS 孤立子曲面的 Bäcklund 变换可以类似地表示为 $su(2)$ 表示的矩阵 Darboux 变换. 7.2 节中, 构造了保持 NLS 梯队的 AKNS 表示不变的基本矩阵 Darboux 变换, 然后导出了 NLS 方程及其梯队的自 Bäcklund 变换. 进而建立了这些自 Bäcklund 变换的几何性质, 即它们保持对应点的距离不变, 这个在生成伪球曲面的经典 Bäcklund 变换中显然的常距离性质可以推广到满足 $r=-\bar{q}$ 的 AKNS 梯队所相应的孤立子曲面上. 7.3 节讨论基本矩阵 Darboux 变换的递推, 并建立了关键的可换性性质. 从几何角度来看, 矩阵 Darboux 变换的重复作用产生一系列曲面, 相邻的两个都具有常距离性质. 最后, 通过反复作用矩阵 Darboux 变换生成满足 $r=-\bar{q}$ 的 AKNS 梯队中孤立子方程的可换性定理, 这是 sine-Gordon 方程的经典 Bianchi 可换性定理的推广. 可换性定理在孤立子方程与曲面的可积离散化中的应用是目前热门的研究方向.

第 8 章研究重要的非等谱孤立子系统, 包括经典 Bianchi 方程组 (4) 及其椭圆对应 (6) 的几何性质. 8.1 节中, 用非等谱形式的 Sym-Tafel 公式重新得到了 Bianchi 曲面的位置向量及基本形式. 8.2 节中, 给出了对一大类非等谱 Lax 对成立的推广的基本矩阵 Darboux 变换. 然后, 8.3 节在曲面层次上给出了 Bäcklund 变换的一个距离性质. 8.4 节中, 利用具有全曲率 $\mathcal{K}=-1/\rho^2$ 且满足 $\rho_{uv}=0$ 的 Bianchi 曲面的单位法向量 $\boldsymbol{N}$ 满足的向量方程

$$(\rho\boldsymbol{N}\times\boldsymbol{N}_u)_v+(\rho\boldsymbol{N}\times\boldsymbol{N}_v)_u=\boldsymbol{0}, \tag{26}$$

在适当的参数化下, 给出复方程

$$\mathcal{E}_{uv}+\frac{1}{2}\frac{\rho_v}{\rho}\mathcal{E}_u+\frac{1}{2}\frac{\rho_u}{\rho}\mathcal{E}_v=\frac{2\mathcal{E}_u\mathcal{E}_v\bar{\mathcal{E}}}{|\mathcal{E}|^2+1}. \tag{27}$$

它的椭圆类比, 即

$$\xi_{z\bar{z}}+\frac{1}{2}\frac{\rho_{\bar{z}}}{\rho}\xi_z+\frac{1}{2}\frac{\rho_z}{\rho}\xi_{\bar{z}}=\frac{2\xi_z\xi_{\bar{z}}\bar{\xi}}{|\xi|^2-1}, \tag{28}$$

其中 $\rho_{z\bar{z}}=0$, 描述了三维 Minkowski 空间中的 Bianchi 型曲面. 在方程 (28) 中引入 Ernst 势 $\mathcal{E}=(1-\xi)/(1+\xi)$, 就给出广义相对论中的 Ernst 方程 (6). 利用 Ernst

可用来构造真空 Einstein 方程的一些重要的解. 作为准备, 讨论了 Neugebauer 最早给出的 Ernst 方程的非等谱线性表示, 它自然导出了对偶 Ernst 方程, 它同原来的 Ernst 方程一样, 也描述真空中静态柱对称的引力场. 对偶 Ernst 方程的解通过接触变换与 Ernst 方程的解相联系. 8.5 节中, 考虑了接触变换与称为 Ehlers 变换和 Matzner-Misner 变换的两个 Möbius 变换的复合, 并讨论了由此产生的 Geroch 变换在广义相对论中的重要性.

1978 年, Harrison 首先得到了 Ernst 方程的 Bäcklund 变换. 1979 年, Neugebauer 独立地构造了另一个 Bäcklund 变换, 后来发现此 Bäcklund 变换是构造 Ernst 方程的其他所有 Bäcklund 变换的基础. 8.6 节中讨论用伪势表述的这个基本的 Neugebauer 变换, 它同 Ehlers 变换和 Matzner-Misner 变换都相容. 然后讨论 Neugebauer 变换的复合, 并解释了它的递推计算过程. Harrison 变换通过包含在交换定理中的 Neugebauer 变换的复合得到. 单次应用 Harrison 变换得到 Papapetrou 背景下的 Schwarzschild 解, 而对 Kerr 黑洞度量的种子解应用 N 次 Harrison 变换得到 N 个 Kerr-NUT 场的非线性叠加. 8.7 节中, 给出了推广的 Ernst 方程组及其特例 —Ernst 方程及其对偶方程的矩阵 Darboux 变换. 8.8 节中, 用重复作用两次 Darboux 变换导出 Ernst 方程及其对偶方程的可换性定理. 最后, 说明 Ernst 方程著名的 Harrison 变换是 Bianchi 方程组 (4) 的经典 Bäcklund 变换的类比.

第 9 章介绍同射影极小曲面和等温渐近曲面的几何相关的孤立子理论中的最新进展. 9.1 节给出了射影空间 $\mathbb{P}^3$ 中类似于 Gauss-Weigarten 方程组和 Gauss-Mainardi-Codazzi 方程组的方程组, 并给出了一些射影不变量. 9.2 节中, 通过加上射影 Gauss-Mainardi-Codazzi 方程组在一个简单的 Lie 点对称下不变的要求, 方程可写为与射影极小曲面相对应的 Euler-Lagrange 方程. 这表示通过射影面积泛函的临界点得到的射影极小曲面给出了另一大类可积曲面, 其中包括 Godeaux-Rozet 曲面、Demoulin 曲面和 Tzitzeica 曲面. Godeaux-Rozet 曲面和 Demoulin 曲面在孤立子理论中研究较少, 而 Tzitzeica 研究得很多. 但是, 对 Demoulin 曲面, 早在 1933 就有了研究, 并通过相应的 Gauss-Mainardi-Codazzi 方程组给出了方程 (9) 的一个重要的可积推广

$$\begin{aligned}(\ln h)_{xy} &= h - \frac{1}{hk},\\ (\ln k)_{xy} &= k - \frac{1}{hk}.\end{aligned} \tag{29}$$

9.3 节中, 介绍了基于 Wilczynski 运动四面体的射影极小曲面的一个 4×4 线性表示, 然后应用经典的 Plücker 对应得到一个 6×6 线性表示. 9.4 节中, 通过引入 $\mathbb{P}^5$ 中的 Godeaux 序列, 可以明显看出 Plücker 对应的几何意义. 周期 6 的 Godeaux 序列导出 Demoulin 方程组, 它同二维 Toda 格有关. 9.5 节中, 通过对基本变换加上适当的

约束, 构造了射影极小曲面的 Bäcklund 变换. 9.6 节给出了 Demoulin 方程组 (29) 的 Bäcklund 变换, 并将它作用在种子解 $h = k = 1$ 上生成了单孤立子 Demoulin 曲面. 9.7 节讨论等温渐近曲面, 它们的 Gauss-Mainardi-Codazzi 方程组也是可积的. 等温渐近曲面的 Gauss-Weingarten 方程组联系于静态变形 Nizhnik-Veselov-Novikov (mNVN) 的标准的线性表示. 该节同时给出了静态 mNVN 方程和静态 NVN 方程的联系. 9.8 节中, 讨论了它们的线性表示之间的联系, 并利用 Lelieuvre 公式构造了等温渐近曲面的 Bäcklund 变换.

目 录

第 1 章　伪球曲面，经典 Bäcklund 变换和 Bianchi 方程组

最早对负常全曲率曲面进行的显式研究可以追溯到 1838 年 Minding 的工作[261]，他的重要定理指出，具有相同曲率的这些曲面之间是等距的，即可使得它们上面的点建立起保持度量的一一对应. 后来，Beltrami[28] 称这类曲面为伪球曲面并使之与 Lobachevski 的非欧几何建立了重要的联系.

1862 年，Bour[54] 研究了渐近坐标下伪球曲面的 Gauss 方程的相容性条件，并从中首次导出了 sine-Gordon 方程. 1879 年，Bianchi[31] 在他取得任教资格的论文中指出了伪球曲面的几何构造. Bäcklund[21] 于 1883 年引入了一个关键性的参数使得可以构造一系列伪球曲面，推广了 Bianchi 的工作. 然后 Bianchi[32] 又于 1885 年将伪球曲面的 Bäcklund 变换与 sine-Gordon 方程的一个漂亮的变换联系起来，这就是 sine-Gordon 方程的 Bäcklund 变换，它包含了以前 Darboux 已建立的一个不含参数的结果[94]. Bäcklund 变换在孤立子理论中有重要的应用，在它和与之相关的 Darboux 变换[92] 下的不变性出现于所有孤立子方程中. Bianchi 与 Darboux 对曲面几何的贡献，特别是 Bäcklund 变换保持某些几何性质不变的特性后来被陈省身[77]、Sym[385] 等研究. 本书关心的主要就是 Bäcklund 变换和 Darboux 变换、它们的几何起源以及在现代孤立子理论中的应用.

1.1　双曲曲面的 Gauss-Weingarten 方程组，伪球曲面和 sine-Gordon 方程

本节中，我们将伪球曲面放在一类更广泛的双曲曲面的框架下来研究，这类双曲曲面由 Bianchi 通过一个非线性系统给出[37]. 关于曲线和曲面微分几何的背景知识可以在标准的教科书，如 do Carmo[108] 或 Struick[352] 的书中找到，后一本书中有着关于历史的丰富材料.

我们用 $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v)$ 表示 $\mathbb{R}^3$ 中曲面 Σ 上一点 P 的位置向量，那么向量 $\boldsymbol{r}_u$ 和 $\boldsymbol{r}_v$ 在 P 点与 Σ 相切，当这两个向量线性无关时，

$$\boldsymbol{N} = \frac{\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v}{} \tag{1.1}$$

决定了 Σ 的单位法向量. Σ 的第一基本形式和第二基本形式分别为

$$\begin{aligned} \mathrm{I} &= \mathrm{d}\boldsymbol{r}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} = E\,\mathrm{d}u^2 + 2F\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v + G\,\mathrm{d}v^2, \\ \mathrm{II} &= -\mathrm{d}\boldsymbol{r}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{N} = e\,\mathrm{d}u^2 + 2f\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v + g\,\mathrm{d}v^2, \end{aligned} \tag{1.2}$$

其中

$$\begin{aligned} &E = \boldsymbol{r}_u\cdot\boldsymbol{r}_u, \quad F = \boldsymbol{r}_u\cdot\boldsymbol{r}_v, \quad G = \boldsymbol{r}_v\cdot\boldsymbol{r}_v, \\ &e = -\boldsymbol{r}_u\cdot\boldsymbol{N}_u = \boldsymbol{r}_{uu}\cdot\boldsymbol{N}, \quad g = -\boldsymbol{r}_v\cdot\boldsymbol{N}_v = \boldsymbol{r}_{vv}\cdot\boldsymbol{N}, \\ &f = -\boldsymbol{r}_u\cdot\boldsymbol{N}_v = -\boldsymbol{r}_v\cdot\boldsymbol{N}_u = \boldsymbol{r}_{uv}\cdot\boldsymbol{N}. \end{aligned} \tag{1.3}$$

Bonnet 的一个经典结果[53] 表明这六个量 $\{E, F, G; e, f, g\}$ 在除了允许作刚体运动外唯一决定了曲面 Σ.

Σ 的 Gauss 方程组[1][352] 是

$$\begin{aligned} \boldsymbol{r}_{uu} &= \Gamma^1_{11}\boldsymbol{r}_u + \Gamma^2_{11}\boldsymbol{r}_v + e\boldsymbol{N}, \\ \boldsymbol{r}_{uv} &= \Gamma^1_{12}\boldsymbol{r}_u + \Gamma^2_{12}\boldsymbol{r}_v + f\boldsymbol{N}, \\ \boldsymbol{r}_{vv} &= \Gamma^1_{22}\boldsymbol{r}_u + \Gamma^2_{22}\boldsymbol{r}_v + g\boldsymbol{N}, \end{aligned} \tag{1.4}$$

Weingarten 方程组是

$$\begin{aligned} \boldsymbol{N}_u &= \frac{fF - eG}{H^2}\boldsymbol{r}_u + \frac{eF - fE}{H^2}\boldsymbol{r}_v, \\ \boldsymbol{N}_v &= \frac{gF - fG}{H^2}\boldsymbol{r}_u + \frac{fF - gE}{H^2}\boldsymbol{r}_v, \end{aligned} \tag{1.5}$$

其中

$$H^2 = |\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v|^2 = EG - F^2. \tag{1.6}$$

(1.4) 式中的 Γ^i_{jk} 是 Christoffel 记号, 它们由

$$\Gamma^i_{jk} = \frac{g^{il}}{2}(g_{jl,k} + g_{kl,j} - g_{jk,l}) \tag{1.7}$$

给出, 其中 $x^1 = u$, $x^2 = v$, g_{jk} 是

$$\mathrm{I} = g_{jk}\,\mathrm{d}x^j\,\mathrm{d}x^k \tag{1.8}$$

中的系数,

$$g^{jk}g_{kl} = \delta^j_l. \tag{1.9}$$

[1]本书中 Gauss方程组指的是曲面论基本方程组即 Gauss-Weingarten 方程组的一部分, 不是 Gauss-

这里, 我们用了 Einstein 求和约定, 即对重复指标求和.

将相容性条件 $(\boldsymbol{r}_{uu})_v = (\boldsymbol{r}_{uv})_u$ 和 $(\boldsymbol{r}_{uv})_v = (\boldsymbol{r}_{vv})_u$ 应用于线性的 Gauss 方程组 (1.4) 就得到非线性的 Mainardi-Codazzi 方程组

$$\begin{aligned}\left(\frac{e}{H}\right)_v - \left(\frac{f}{H}\right)_u + \frac{e}{H}\Gamma_{22}^2 - 2\frac{f}{H}\Gamma_{12}^2 + \frac{g}{H}\Gamma_{11}^2 &= 0,\\ \left(\frac{g}{H}\right)_u - \left(\frac{f}{H}\right)_v + \frac{e}{H}\Gamma_{22}^1 - 2\frac{f}{H}\Gamma_{12}^1 + \frac{g}{H}\Gamma_{11}^1 &= 0,\end{aligned} \tag{1.10}$$

或等价的方程组

$$\begin{aligned}e_v - f_u &= e\Gamma_{12}^1 + f(\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^1) - g\Gamma_{11}^2,\\ f_v - g_u &= e\Gamma_{22}^1 + f(\Gamma_{22}^2 - \Gamma_{12}^1) - g\Gamma_{12}^2,\end{aligned} \tag{1.11}$$

以及 Gauss 的 "绝妙定理"(Theorema egregium). 由此 "绝妙定理", Gauss (全) 曲率

$$\mathcal{K} = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} \tag{1.12}$$

可以仅用 E, F, G 表示出来, 在 Liouville 表示下, 有

$$\mathcal{K} = \frac{1}{H}\left[\left(\frac{H}{E}\Gamma_{11}^2\right)_v - \left(\frac{H}{E}\Gamma_{12}^2\right)_u\right]. \tag{1.13}$$

从物理观点来看, Gauss 的 "绝妙定理" 表明曲面 Σ 在无伸缩地弯曲时全曲率保持不变.

如果 Σ 的全曲率为负, 即 Σ 是一个双曲曲面, 那么可以取 Σ 上的渐近曲线作为参数曲线. 这时, $e = g = 0$, Mainardi-Codazzi 方程组 (1.10) 成为

$$\left(\frac{f}{H}\right)_u + 2\Gamma_{12}^2\frac{f}{H} = 0, \quad \left(\frac{f}{H}\right)_v + 2\Gamma_{12}^1\frac{f}{H} = 0, \tag{1.14}$$

而

$$\mathcal{K} = -\frac{f^2}{H^2} =: -\frac{1}{\rho^2}, \tag{1.15}$$

$$\Gamma_{12}^1 = \frac{GE_v - FG_u}{2H^2}, \tag{1.16}$$

$$\Gamma_{12}^2 = \frac{EG_u - FE_v}{2H^2}. \tag{1.17}$$

参数曲线之间的夹角 ω 满足

$$\cos\omega = \frac{F}{\cdots}, \quad \sin\omega = \frac{H}{\cdots} \tag{1.18}$$

由于 $E, G > 0$, 可以不妨设

$$E = \rho^2 a^2, \quad G = \rho^2 b^2, \tag{1.19}$$

这时第一、第二基本形式成为

$$\begin{aligned} \mathrm{I} &= \rho^2(a^2\,\mathrm{d}u^2 + 2ab\cos\omega\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v + b^2\,\mathrm{d}v^2), \\ \mathrm{II} &= 2\rho ab\sin\omega\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v, \end{aligned} \tag{1.20}$$

Mainardi-Codazzi 方程组 (1.11) 成为

$$a_v + \frac{1}{2}\frac{\rho_v}{\rho}a - \frac{1}{2}\frac{\rho_u}{\rho}b\cos\omega = 0, \tag{1.21}$$

$$b_u + \frac{1}{2}\frac{\rho_u}{\rho}b - \frac{1}{2}\frac{\rho_v}{\rho}a\cos\omega = 0, \tag{1.22}$$

而全曲率的表示式 (1.13) 成为

$$\omega_{uv} + \frac{1}{2}\left(\frac{\rho_u}{\rho}\frac{b}{a}\sin\omega\right)_u + \frac{1}{2}\left(\frac{\rho_v}{\rho}\frac{a}{b}\sin\omega\right)_v - ab\sin\omega = 0. \tag{1.23}$$

Gauss-Mainardi-Codazzi 方程组 (1.21)–(1.23) 是一组非线性方程组, 它最初由 Bianchi[37] 建立. 它在孤立子理论中的重要性先后被 Cenkl[74] 和 Levi, Sym[234] 注意到, 他们添加一个约束条件 $\rho_{uv} = 0$ 使得系统变为孤立子系统. 后面将讨论这个问题.

在 $\mathcal{K}$ 为常数且 $\mathcal{K} = -1/\rho^2 < 0$ 时, Σ 称为*伪球曲面*. 这时, Mainardi-Codazzi 方程组 (1.21), (1.22) 成为 $a = a(u)$, $b = b(v)$. 如果在 Σ 上取渐近曲线的弧长为参数 (即作变换 $\mathrm{d}u \to \mathrm{d}u' = \sqrt{E(u)}\,\mathrm{d}u$, $\mathrm{d}v \to \mathrm{d}v' = \sqrt{G(v)}\,\mathrm{d}v$), 则在略去变量上的撇后, 第一、第二基本形式成为

$$\begin{aligned} \mathrm{I} &= \mathrm{d}u^2 + 2\cos\omega\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v + \mathrm{d}v^2, \\ \mathrm{II} &= \frac{2}{\rho}\sin\omega\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v, \end{aligned} \tag{1.24}$$

而 (1.23) 式成为著名的*sine-Gordon 方程*

$$\boxed{\omega_{uv} = \frac{1}{\rho^2}\sin\omega.} \tag{1.25}$$

这时, 相应的 Gauss 方程组是

$$\begin{aligned} \boldsymbol{r}_{uu} &= \omega_u\cot\omega\,\boldsymbol{r}_u - \omega_u\operatorname{cosec}\omega\,\boldsymbol{r}_v, \\ \boldsymbol{r}_{uv} &= \frac{1}{\rho}\sin\omega\boldsymbol{N}, \end{aligned} \tag{1.26}$$

而 Weingarten 方程组是

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{N}_u &= \frac{1}{\rho}\cot\omega\, \boldsymbol{r}_u - \frac{1}{\rho}\operatorname{cosec}\omega\, \boldsymbol{r}_v, \\
\boldsymbol{N}_v &= -\frac{1}{\rho}\operatorname{cosec}\omega\, \boldsymbol{r}_u + \frac{1}{\rho}\cot\omega\, \boldsymbol{r}_v.
\end{aligned}
\tag{1.27}
$$

到二十世纪, sine-Gordon方程醒目地出现在物理学的许多领域中(见文献[311]). Seeger 等[201, 345, 346] 首先发现 sine-Gordon 方程的经典 Bäcklund 变换在晶体位错理论中有重要的应用. 在 Frenkel 和 Kontorova 的位错理论框架下, 他们用经典 Bäcklund 变换得到了 "特征运动" 的叠加, 对现在所称的带有纽结型位错的呼吸子的相互作用既作了理论分析, 又绘出了它们的图像[345]. Zabusky 和 Kruskal[389] 于 1965 年对 Korteweg-de Vries 方程所发现的典型的孤立子特性, 包括在相互作用后速度与形状保持不变以及相移的存在, 在 1953 年的这篇重要文章中对 sine-Gordon 方程都已提及.[2] 在这以后, 伪球曲面的几何同其他孤立子方程的联系相继被发现[26, 78, 79, 141, 190, 292, 294, 321, 363].

Lamb[223] 和 Barnard[23] 发现, sine-Gordon 方程 Bäcklund 变换的非线性叠加原理可应用于超短光脉冲的传输理论中, 特别是, 他们从理论上得到了 Gibbs 和 Slusher[150] 在实验中发现的铷蒸气中孤立子的分裂现象. 经典 Bäcklund 变换也在长 Josephson 结的理论中得到了应用[344].

前面给出了研究 Bäcklund 变换以及它在 sine-Gordon 方程上的具体应用的历史原因, 其中既有理论上的, 又有应用上的. 下面将看到, 这个 Bäcklund 变换事实上对应于由 Bianchi 和 Lie 给出的一个变换的共轭作用, 这个 Lie 对称在 Bianchi 变换中引入了一个关键的*Bäcklund 参数*, 使得变换可以反复进行, 从而生成物理上所称的多孤立子解. 于是, Bäcklund 参数有了重要的物理解释.

1.2 Sine-Gordon 方程的经典 Bäcklund 变换

Sine-Gordon 方程的 Bäcklund 变换最早在伪球曲面上用简单的几何方法构造出来. 对于初始伪球曲面 Σ 上的一点 P, 按下面要介绍的 Bäcklund 变换方法作出线段 PP', 使得 PP' 的长度为常值并且 PP' 与 Σ 在 P 点相切, 那么当 P 取遍 Σ 时, P' 全体构成与 Σ 的全曲率相同的另一个伪球曲面 Σ'. 这个过程可以反复进行下去, 生成同初始种子曲面 Σ 有相同全曲率的一系列伪球曲面.

[2] "Man sieht ··· dass beim Durchdringen von Wellengruppe und Versetzung weder die Energie noch die Geschwindigkeit beider geändert wird. Es tritt lediglich eine Verschiebung des Verset-

设 Σ 是具有全曲率 $\mathcal{K}=-1/\rho^2$ 的伪球曲面, Σ 上的一点用位置向量 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,v)$ 表示, 这里 u,v 是渐近曲线的弧长参数. 在这个参数化下, $\boldsymbol{r}_u,\boldsymbol{r}_v$ 和 $\boldsymbol{N}$ 都是单位向量, 不过 $\boldsymbol{r}_u$ 和 $\boldsymbol{r}_v$ 不一定正交. 因此, 更方便的方法是引入一个标准正交向量组 $\{\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}\}$, 这里

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{r}_u,\quad \boldsymbol{B}=-\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{N}=-\boldsymbol{r}_u\times\frac{(\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v)}{\sin\omega}=\operatorname{cosec}\omega\,\boldsymbol{r}_v-\cot\omega\,\boldsymbol{r}_u,\quad \boldsymbol{C}=\boldsymbol{N}. \tag{1.28}$$

从 Gauss-Weingarten 方程组 (1.26), (1.27) 得到 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 关于 u,v 的导数, 即

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{C}\end{pmatrix}_u&=\begin{pmatrix}0&-\omega_u&0\\ \omega_u&0&1/\rho\\ 0&-1/\rho&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{C}\end{pmatrix},\\ \begin{pmatrix}\boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{C}\end{pmatrix}_v&=\begin{pmatrix}0&0&(1/\rho)\sin\omega\\ 0&0&-(1/\rho)\cos\omega\\ -(1/\rho)\sin\omega&(1/\rho)\cos\omega&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{C}\end{pmatrix}.\end{aligned} \tag{1.29}$$

这个线性方程组相容的充要条件是 ω 满足 sine-Gordon 方程 (1.25).

现在, 我们可以构造一个新的伪球曲面 Σ', 它的位置向量设为

$$\boldsymbol{r}'=\boldsymbol{r}+L\cos\phi\,\boldsymbol{A}+L\sin\phi\,\boldsymbol{B}, \tag{1.30}$$

其中 $L=|\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}|$ 是常数. $\phi(u,v)$ 要满足的条件是在 Σ' 上就像在 Σ 上一样, 坐标 u,v 也是渐近曲线的弧长参数. 于是 Σ' 具有如 $(1.24)_1$ 式的第一基本形式, 特别地,

$$\boldsymbol{r}'_u\cdot\boldsymbol{r}'_u=1,\quad \boldsymbol{r}'_v\cdot\boldsymbol{r}'_v=1. \tag{1.31}$$

利用 (1.30) 和 (1.29) 式, 我们有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{r}'_u&=[1-L(\phi_u-\omega_u)\sin\phi]\boldsymbol{A}+L(\phi_u-\omega_u)\cos\phi\,\boldsymbol{B}+\frac{L}{\rho}\sin\phi\,\boldsymbol{C},\\ \boldsymbol{r}'_v&=(\cos\omega-L\phi_v\sin\phi)\boldsymbol{A}+(\sin\omega+L\phi_v\cos\phi)\boldsymbol{B}+\frac{L}{\rho}\sin(\omega-\phi)\boldsymbol{C}.\end{aligned} \tag{1.32}$$

于是, 条件 (1.31) 给出

$$\phi_u=\omega_u+\frac{1}{L}\left(1\pm\sqrt{1-\frac{L^2}{\rho^2}}\right)\sin\phi, \tag{1.33}$$

$$\phi_v=\frac{1}{L}\left(1\mp\sqrt{1-\frac{L^2}{\rho^2}}\right)\sin(\phi-\omega). \tag{1.34}$$

所以, 如果设

$$\beta = \frac{\rho}{L}\left(1 \pm \sqrt{1-\frac{L^2}{\rho^2}}\right) = \frac{L}{\rho}\left(1 \mp \sqrt{1-\frac{L^2}{\rho^2}}\right)^{-1}, \tag{1.35}$$

那么 Σ' 成为以渐近曲线弧长为参数的伪球曲面的必要条件是角度 ϕ 满足

$$\phi_u = \omega_u + \frac{\beta}{\rho}\sin\phi, \tag{1.36}$$

$$\phi_v = \frac{1}{\beta\rho}\sin(\phi-\omega). \tag{1.37}$$

事实上, 这个条件也是充分的. 当 sine-Gordon 方程 (1.25) 成立时, (1.36) 和 (1.37) 式相容.

利用 (1.36) 和 (1.37) 式, (1.32) 式成为

$$\boldsymbol{r}'_u = \left(1 - \frac{L}{\rho}\beta\sin^2\phi\right)\boldsymbol{A} + \frac{L}{\rho}\beta\sin\phi\cos\phi\,\boldsymbol{B} + \frac{L}{\rho}\sin\phi\,\boldsymbol{C}, \tag{1.38}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{r}'_v = &\left[\cos\omega - \frac{L}{\rho\beta}\sin\phi\sin(\phi-\omega)\right]\boldsymbol{A}\\ &+\left[\sin\omega + \frac{L}{\rho\beta}\cos\phi\sin(\phi-\omega)\right]\boldsymbol{B} - \frac{L}{\rho}\sin(\phi-\omega)\boldsymbol{C},\end{aligned} \tag{1.39}$$

它们满足 $\boldsymbol{r}'_u \cdot \boldsymbol{r}'_v = \cos(2\phi-\omega)$, 从而 Σ' 的第一基本形式是

$$\mathrm{I}' = \mathrm{d}u^2 + 2\cos(2\phi-\omega)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v + \mathrm{d}v^2. \tag{1.40}$$

进一步, Σ' 的单位法向量是

$$\boldsymbol{N}' = \frac{\boldsymbol{r}'_u \times \boldsymbol{r}'_v}{|\boldsymbol{r}'_u \times \boldsymbol{r}'_v|} = -\frac{L}{\rho}\sin\phi\,\boldsymbol{A} + \frac{L}{\rho}\cos\phi\,\boldsymbol{B} + \left(1 - \frac{L\beta}{\rho}\right)\boldsymbol{C}, \tag{1.41}$$

由 (1.30) 式得到 $(\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{N}' = 0$. 所以, 连接 Σ 和 Σ' 上对应点的向量 $\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}$ 与 Σ' 相切, 同时我们已经知道 $\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}$ 必与 Σ 相切. 此外,

$$\boldsymbol{N}'_u = -\frac{L\beta}{\rho^2}\sin\phi\cos\phi\,\boldsymbol{A} + \left(\frac{L\beta}{\rho^2}\cos^2\phi - \frac{1}{\rho}\right)\boldsymbol{B} + \frac{L}{\rho^2}\cos\phi\,\boldsymbol{C}, \tag{1.42}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{N}'_v = &\left[\frac{L}{2\rho^2\beta}\sin(\omega-2\phi) + \frac{1}{\rho}\left(1-\frac{L}{2\rho\beta}\right)\sin\omega\right]\boldsymbol{A}\\ &+\left[\frac{L}{2\rho^2\beta}\cos(\omega-2\phi) - \frac{1}{\rho}\left(1-\frac{L}{2\rho\beta}\right)\cos\omega\right]\boldsymbol{B}\end{aligned}$$

L

从而

$$\boldsymbol{r}'_u \cdot \boldsymbol{N}'_u = 0, \quad \boldsymbol{r}'_u \cdot \boldsymbol{N}'_v = \boldsymbol{r}'_v \cdot \boldsymbol{N}'_u = -\frac{1}{\rho}\sin(2\phi - \omega), \quad \boldsymbol{r}'_v \cdot \boldsymbol{N}'_v = 0,$$

于是 Σ' 的第二基本形式是

$$\mathrm{II}' = \frac{2}{\rho}\sin(2\phi - \omega)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v. \tag{1.44}$$

(1.40) 式和 (1.44) 式给出的第一、第二基本形式表明 Σ' 是一个以渐近曲线弧长参数化的伪球曲面. Σ' 上渐近曲线的夹角为

$$\omega' = 2\phi - \omega, \tag{1.45}$$

它在 Σ' 上起的作用与 ω 在 Σ 上起的作用相同. 特别地, ω' 必须满足 sine-Gordon 方程

$$\omega'_{uv} = \frac{1}{\rho^2}\sin\omega'. \tag{1.46}$$

用 (1.45) 式消去 (1.36) 和 (1.37) 式中的 ϕ 得到

$$\boxed{\begin{aligned}\left(\frac{\omega' - \omega}{2}\right)_u &= \frac{\beta}{\rho}\sin\left(\frac{\omega' + \omega}{2}\right),\\ \left(\frac{\omega' + \omega}{2}\right)_v &= \frac{1}{\beta\rho}\sin\left(\frac{\omega' - \omega}{2}\right).\end{aligned}} \quad \mathbb{B}_\beta \tag{1.47}$$

这是联系方程 (1.25) 和 (1.46) 的标准形式的 Bäcklund 变换.

在 Bäcklund 变换 $\mathbb{B}_\beta$ 的作用下,

$$\boldsymbol{N}' \cdot \boldsymbol{N} = 1 - \frac{L\beta}{\rho} = \text{常数}, \tag{1.48}$$

这意味着 Σ 和 Σ' 上相应点的切平面之间的夹角 ζ 是常数, 而 $\beta = \tan(\zeta/2)$. 在 Bianchi 最初的几何构造中,

$$L = \rho, \quad \beta = 1, \tag{1.49}$$

即切平面是互相正交的. Bäcklund 对此作了推广, 在 Bianchi 变换中引入了一个关键的参数 β 而取消了正交的要求. 事实上, Bäcklund 变换 $\mathbb{B}_\beta$ 可以看作是 Bianchi 变换复合上一个简单的 Lie 群的作用. 显然, sine-Gordon 方程 (1.25) 在变换

$$u^* = \beta u, \quad v^* = \frac{v}{\beta}, \quad \beta \neq 0 \tag{1.50}$$

下保持不变, 从而任何解 $\omega = \omega(u, v)$ 生成了一个单参数解族 $\omega^*(u, v) = \omega(\beta u, v/\beta)$.[3] Lie 注意到在最初的 Bianchi 变换

[3]一个重要的事实是, 这个 Lie 点对称不变性同时也在 Bäcklund 变换的 "线性表示" (1.29) 中引入了

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{\omega'-\omega}{2}\right)_{u^*} &= \frac{1}{\rho}\sin\left(\frac{\omega'+\omega}{2}\right), \\
\left(\frac{\omega'+\omega}{2}\right)_{v^*} &= \frac{1}{\rho}\sin\left(\frac{\omega'-\omega}{2}\right)
\end{aligned}
\tag{1.51}
$$

上加上变换 (1.50) 后就生成 Bäcklund 变换 (1.47).

从构造伪球曲面的角度来看, Bäcklund 变换给出的结果如下. 设 $\boldsymbol{r}$ 是相应于 sine-Gordon 方程 (1.25) 的解 ω 的伪球曲面 Σ 的位置向量, ω' 由 Bäcklund 变换 $\mathbb{B}_\beta$ 得到, 那么相应于 ω' 的伪球曲面 Σ' 的位置向量为

$$
\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{r} + \frac{L}{\sin\omega}\left[\sin\left(\frac{\omega-\omega'}{2}\right)\boldsymbol{r}_u + \sin\left(\frac{\omega+\omega'}{2}\right)\boldsymbol{r}_v\right], \tag{1.52}
$$

其中 $L = \rho\sin\zeta$.

本 节 要 点

- 非线性的 sine-Gordon 方程 (1.25) 由线性的 Gauss 方程组 (1.26) 的相容性条件得到.
- (1.47) 式给出的 Bäcklund 变换 $\mathbb{B}_\beta$ 保持 sine-Gordon 方程 (1.25) 不变. 具体来说, 考虑 $\mathbb{B}_\beta$ 对方程 (1.25) 的作用, 关于 ω' 的方程组 (1.47) 可解的充要条件是方程 (1.25) 成立, 否则相容性条件 $\omega'_{uv} = \omega'_{vu}$ 就不会满足.
- 包含参数 $\beta = \tan(\zeta/2)$ 的 Bäcklund 变换 $\mathbb{B}_\beta$ 通过一个 Lie 群的变换同一个 Bianchi 变换相对应.
- 在线性层次上, Bäcklund 变换由 (1.52) 式给出, 它作用于以渐近曲线弧长为参数的伪球曲面的 Gauss 方程组 (1.26) 上. 作用于线性表示 (1.26) 上的变换 (1.52) 诱导了作用于非线性层次上的 Bäcklund 变换 $\mathbb{B}_\beta$.

由于 $\mathbb{B}_\beta$ 给出了同一个方程两个解之间的对应, 通常我们称它为自 *Bäcklund* 变换.

下一节中, 我们将给出自 Bäcklund 变换的一个非线性叠加原理, 并以纯代数方式生成非线性的 sine-Gordon 方程 (1.25) 的多孤立子解. 这种纯代数方法的算法特性使得它非常适合于用符号计算的软件包来实现. 孤立子方程的自 Bäcklund 变换通常都有这类非线性叠加原理.

练　　习

1. 导出决定夹角 ϕ 的方程 (1.33) 和 (1.34).
2. 导出在伪球曲面层次上 Bäcklund 变换 $\mathbb{B}_\beta$ 的表达式 (1.52).

1.3 Bianchi 的可换性定理和多孤立子解的生成

我们应用自 Bäcklund 变换 (1.47) 来构造 sine-Gordon 方程的多孤立子解.

首先取方程 (1.25) 的 "真空" 种子解 $\omega = 0$. 由 Bäcklund 变换 (1.47), 方程 (1.46) 的一个非平凡解 ω' 可以通过求解一阶方程组

$$\begin{aligned} \omega'_u &= \frac{2\beta}{\rho}\sin\left(\frac{\omega'}{2}\right), \\ \omega'_v &= \frac{2}{\beta\rho}\sin\left(\frac{\omega'}{2}\right) \end{aligned} \tag{1.53}$$

得到, 它的解就是单孤立子解

$$\omega' = 4\tan^{-1}\left[\exp\left(\frac{\beta}{\rho}u + \frac{1}{\beta\rho}v + \alpha\right)\right], \tag{1.54}$$

其中 α 是一个积分常数. 需要注意的是, 这里

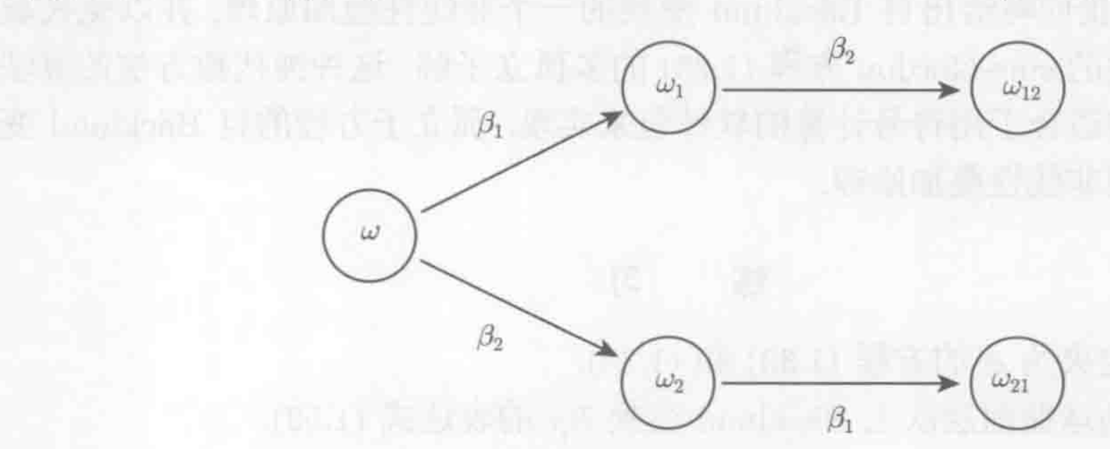
$$\begin{aligned} \omega'_u &= \frac{2\beta}{\rho}\,\mathrm{sech}\left(\frac{\beta}{\rho}u + \frac{1}{\beta\rho}v + \alpha\right), \\ \omega'_v &= \frac{2}{\beta\rho}\,\mathrm{sech}\left(\frac{\beta}{\rho}u + \frac{1}{\beta\rho}v + \alpha\right) \end{aligned} \tag{1.55}$$

的图形才是峰状的.

进一步, 包含有非线性相互作用的多孤立子解的解析表达式可以通过纯代数方法得到. 这是从自 Bäcklund 变换 $\mathbb{B}_\beta$ 导出的漂亮的非线性叠加原理的结论, 此方法最早在 1892 年由 Bianchi[35] 给出, 并写在他的名著[37] 中, 这就是

1.3.1 Bianchi 的可换性定理

设 ω 是 sine-Gordon 方程 (1.25) 的一个种子解, ω_1 和 ω_2 分别是 ω 通过 Bäcklund 变换 $\mathbb{B}_{\beta_1}$ 和 $\mathbb{B}_{\beta_2}$ 得到的解, 即 $\omega_1 = \mathbb{B}_{\beta_1}(\omega)$, $\omega_2 = \mathbb{B}_{\beta_2}(\omega)$. 记 $\omega_{12} = \mathbb{B}_{\beta_2}(\omega_1)$, $\omega_{21} = \mathbb{B}_{\beta_1}(\omega_2)$. 上述过程可以用*Bianchi* 图来表示 (图 1.1).



一个自然的问题是何时可换性条件 $\omega_{12}=\omega_{21}$ 成立. 为讨论这个问题, 我们写出上述 Bianchi 图中 Bäcklund 变换的 u 部分:

$$\omega_{1,u}=\omega_u+\frac{2\beta_1}{\rho}\sin\left(\frac{\omega_1+\omega}{2}\right), \tag{1.56}$$

$$\omega_{2,u}=\omega_u+\frac{2\beta_2}{\rho}\sin\left(\frac{\omega_2+\omega}{2}\right), \tag{1.57}$$

$$\omega_{12,u}=\omega_{1,u}+\frac{2\beta_2}{\rho}\sin\left(\frac{\omega_{12}+\omega_1}{2}\right), \tag{1.58}$$

$$\omega_{21,u}=\omega_{2,u}+\frac{2\beta_1}{\rho}\sin\left(\frac{\omega_{21}+\omega_2}{2}\right). \tag{1.59}$$

如果要求

$$\omega_{12}=\omega_{21}=\Omega, \tag{1.60}$$

那么由 (1.56) – (1.59) 式相加减, 即 (1.56)−(1.57)+(1.58)−(1.59) 得到

$$0=\frac{2}{\rho}\left[\beta_1\left\{\sin\left(\frac{\omega_1+\omega}{2}\right)-\sin\left(\frac{\Omega+\omega_2}{2}\right)\right\}\right. \tag{1.61}$$

$$\left.+\beta_2\left\{\sin\left(\frac{\Omega+\omega_1}{2}\right)-\sin\left(\frac{\omega_2+\omega}{2}\right)\right\}\right], \tag{1.62}$$

从而有

$$\tan\left(\frac{\Omega-\omega}{4}\right)=\frac{\beta_2+\beta_1}{\beta_2-\beta_1}\tan\left(\frac{\omega_2-\omega_1}{4}\right).$$

所以可换性条件 (1.60) 成立的必要条件是

$$\Omega=\omega+4\tan^{-1}\left[\frac{\beta_2+\beta_1}{\beta_2-\beta_1}\tan\left(\frac{\omega_2-\omega_1}{4}\right)\right]. \tag{1.63}$$

如果将此 Ω 的表达式代替 (1.58) 式和 (1.59) 式中的 ω_{12} 和 ω_{21}, 那么在方程 (1.56) 和 (1.57) 成立时, (1.58) 式和 (1.59) 式是恒等式. 此外, 由 (1.63) 式, Bäcklund 变换的 v 部分也成立. 由上述讨论, 我们可以得到封闭的 Bianchi 图, 如图 1.2 所示. (1.63) 式表示一个非线性叠加原理, 称为**可换性定理**, 它从一组解 $\{\omega,\omega_1,\omega_2\}$ 产生一个新解 Ω.

通过反复应用可换性定理, 可以构造出*Bianchi* 格, 从而可用纯代数方法生成 sine-Gordon 方程的 N- 孤立子解, 它是 N 个单孤立子解通过带参数 $\beta=\beta_1,\cdots,\beta_N$ 的 Bäcklund 变换非线性叠加得到的, 其中每作一次 Bäcklund 变换, 都要引入一个新的 Bäcklund 参数 β_i, 从而生成第 i 个孤立子解. 这个过程可以用图 1.3 所示的 Bianchi 格来描述.

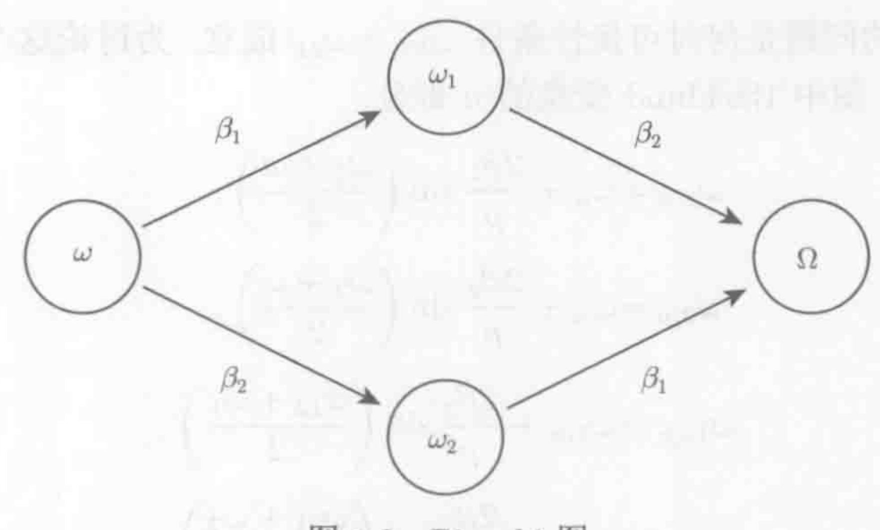


图 1.2　Bianchi 图

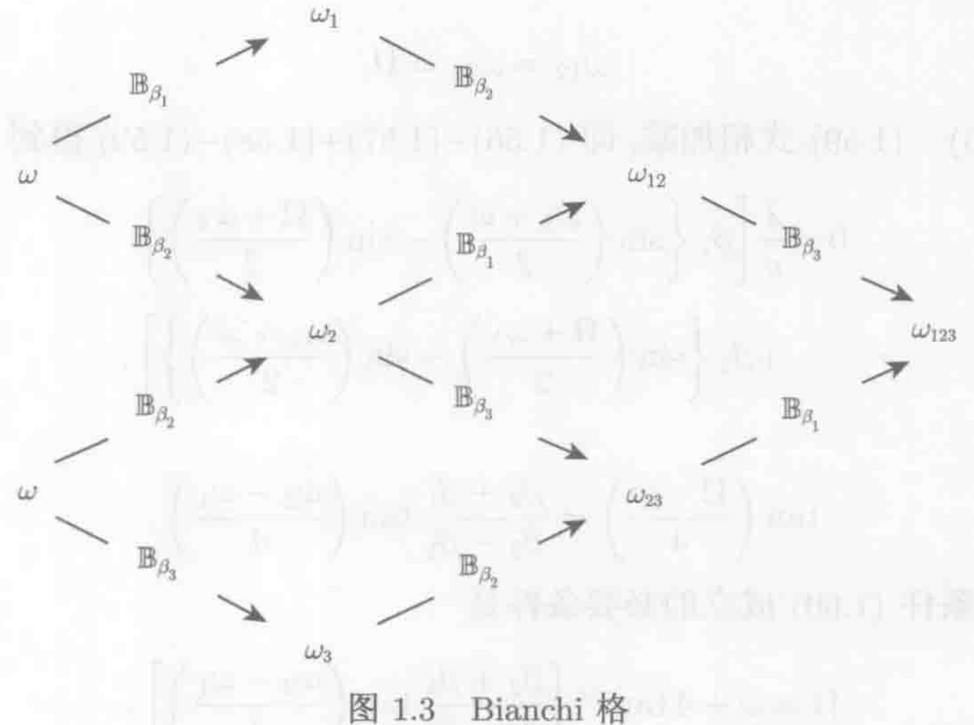


图 1.3　Bianchi 格

1.3.2　物理应用

Seeger 等[345] 利用 sine-Gordon 方程的可换性定理研究了与一个晶体位错模型相关的纽结型和呼吸子型解的相互作用. 随后, Lamb[223] 和 Barnard[23] 相继用这个方法分析了共振介质中超短光脉冲的传播, 用非线性叠加原理得到了 “$2N\pi$” 光脉冲的解析表达式, 这些 $2N\pi$ 脉冲最终分裂为 N 个稳定的 2π 脉冲. 这个现象在实验上被 Gibbs 和 Slusher[150] 所发现, 在他们的实验中, 铷蒸气中的一个 6π 脉冲分裂成了三个 2π 脉冲. 超短脉冲传输中的这个分裂现象在 Rogers 和 Shadwick 的书[311] 中有所讨论.

1.4 伪球孤立子曲面和呼吸子

本节中, 我们用线性层次上的 Bäcklund 变换 (1.52) 构造 sine-Gordon 方程的孤立子解所相应的伪球曲面. 这时, 更简单的是方法利用伪球曲面的曲率线坐标

$$x = u + v, \quad y = u - v. \tag{1.64}$$

记 $\omega = 2\theta$, 那么 (1.24) 式中的第一、第二基本形式成为

$$\mathrm{I} = \cos^2\theta\,\mathrm{d}x^2 + \sin^2\theta\,\mathrm{d}y^2, \tag{1.65}$$

$$\mathrm{II} = \frac{1}{\rho}\sin\theta\cos\theta\,(\mathrm{d}x^2 - \mathrm{d}y^2). \tag{1.66}$$

于是, 可以构造正交向量组

$$\boldsymbol{A}^* = \frac{\boldsymbol{r}_x}{\cos\theta}, \quad \boldsymbol{B}^* = \frac{\boldsymbol{r}_y}{\sin\theta}, \quad \boldsymbol{C}^* = \boldsymbol{N}, \tag{1.67}$$

而由 Gauss-Weingarten 方程组 (1.26) 和 (1.27) 得到

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}^* \\ \boldsymbol{B}^* \\ \boldsymbol{C}^* \end{pmatrix}_x = \begin{pmatrix} 0 & \theta_y & \frac{1}{\rho}\sin\theta \\ -\theta_y & 0 & 0 \\ -\frac{1}{\rho}\sin\theta & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}^* \\ \boldsymbol{B}^* \\ \boldsymbol{C}^* \end{pmatrix}, \tag{1.68}$$

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}^* \\ \boldsymbol{B}^* \\ \boldsymbol{C}^* \end{pmatrix}_y = \begin{pmatrix} 0 & \theta_x & 0 \\ -\theta_x & 0 & -\frac{1}{\rho}\cos\theta \\ 0 & \frac{1}{\rho}\cos\theta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}^* \\ \boldsymbol{B}^* \\ \boldsymbol{C}^* \end{pmatrix}. \tag{1.69}$$

这个关于 $\{\boldsymbol{A}^*, \boldsymbol{B}^*, \boldsymbol{C}^*\}$ 的线性方程组相容的充要条件是

$$\theta_{xx} - \theta_{yy} = \frac{1}{\rho^2}\sin\theta\cos\theta. \tag{1.70}$$

这个在曲率线坐标下的 sine-Gordon 方程在物理应用中是最常见的, 通常 x 表示空间变量, 而 y 表示时间变量. 为此, 常称方程 (1.70) 为 1+1 维 sine-Gordon 方程.[4]

1.4.1 伪球面

方程 (1.70) 的静态单孤立子解

$$\theta = 2\tan^{-1}\left[\exp\left(\frac{x}{\rho}+\alpha\right)\right] \tag{1.71}$$

可以从 (1.54) 式中取 $u = v = \dfrac{x}{2}$, $\beta = 1$ 得到, 我们将看到它对应于一个旋转伪球曲面, 称为 Beltrami 伪球面[352].

下面建立静态单孤立子解 (1.71) 与伪球面的联系. 我们知道平面曲线 $z = \phi(r)$ 绕 z 轴旋转得到的旋转曲面的位置向量为

$$\boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} r\cos\eta \\ r\sin\eta \\ \phi(r) \end{pmatrix}, \tag{1.72}$$

这里, 所有的圆 $r =$ 常数 是纬线, 而曲线 $\eta =$ 常数 是经线. 曲面 (1.72) 的第一、第二基本形式为

$$\begin{aligned} \mathrm{I} &= [1+\phi'(r)^2]\,\mathrm{d}r^2 + r^2\,\mathrm{d}\eta^2, \\ \mathrm{II} &= \frac{\phi''(r)\,\mathrm{d}r^2}{\sqrt{1+\phi'(r)^2}} + \frac{r\phi'(r)\mathrm{d}\eta^2}{\sqrt{1+\phi'(r)^2}}. \end{aligned} \tag{1.73}$$

于是, $F = f = 0$, 从而坐标曲线 $r =$ 常数 和 $\eta =$ 常数, 即纬线和经线是旋转曲面上的曲率线. 如果记

$$\mathrm{I} = \mathrm{d}\xi^2 + r^2\mathrm{d}\eta^2, \tag{1.74}$$

其中

$$\mathrm{d}\xi = \sqrt{1+\phi'(r)^2}\,\mathrm{d}r, \quad r = r(\xi), \tag{1.75}$$

那么 Gauss 定理 (1.13) 给出全曲率

$$\mathcal{K} = -\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}\xi^2}, \tag{1.76}$$

于是 $\mathcal{K} = -1/\rho^2$ 的旋转伪球曲面满足

$$r = c_1\cosh\frac{\xi}{\rho} + c_2\sinh\frac{\xi}{\rho}, \tag{1.77}$$

其中 ρ 是常数. 特别地, 当 $c_1 = c_2 = c$ 时, 对应的曲面称为抛物旋转伪球曲面, 它上面的经线为

$$z = \phi(r) = \int \sqrt{1 - (c^2/\rho^2)e^{2\xi/\rho}}\, \mathrm{d}\xi. \tag{1.79}$$

以

$$\sin\psi = \frac{c}{\rho} e^{\xi/\rho}$$

代入 (1.79) 式得

$$z = \rho\left(\cos\psi + \ln\left|\tan\frac{\psi}{2}\right|\right), \tag{1.80}$$

而

$$\mathrm{d}z = \cot\psi\, \mathrm{d}r,$$

即 ψ 是经线的切向同 z 轴的夹角. 另一方面, 经线上一点沿切线到 z 轴的距离 $d = r\,\mathrm{cosec}\,\psi = \rho =$ 常数, 具有这个性质的曲线称为*曳物线*. 所以, 抛物旋转伪球曲面是由一条曳物线绕 z 轴旋转产生的旋转曲面, 它是伪球面.

为了得到对应于伪球面的 sine-Gordon 方程 (1.70) 的解, 伪球面必须取适当的参数使得第一、第二基本形式成为 (1.65) 和 (1.66) 的形式. 用 ψ 和 η 来表示的话, 伪球面的位置向量是

$$\boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} \rho\sin\psi\cos\eta \\ \rho\sin\psi\sin\eta \\ \rho\left(\cos\psi + \ln\left|\tan\dfrac{\psi}{2}\right|\right) \end{pmatrix}, \tag{1.81}$$

因此

$$\begin{aligned} \mathrm{I} &= \rho^2\cot^2\psi\, \mathrm{d}\psi^2 + \rho^2\sin^2\psi\, \mathrm{d}\eta^2, \\ \mathrm{II} &= \rho\cot\psi\, \mathrm{d}\psi^2 - \rho\sin\psi\cos\psi\, \mathrm{d}\eta^2. \end{aligned} \tag{1.82}$$

现在用

$$\mathrm{d}x = \rho\ \mathrm{cosec}\,\psi\, \mathrm{d}\psi, \quad y = \rho\eta \tag{1.83}$$

引入新的坐标 x, y, 那么 (1.82) 式中的 I 和 II 同 (1.65) 和 (1.66) 式中的对应量是完全一样的, 这里 $\theta = \psi$. 对 (1.83) 式积分就得到单孤立子解 (1.71).

如果用曲率线参数 x 和 y 来表示, 伪球面的位置向量就是[5]

$$\boldsymbol{r}(x, y) = \begin{pmatrix} \rho\,\mathrm{sech}\left(\dfrac{x}{\rho} + \alpha\right)\cos\left(\dfrac{y}{\rho}\right) \\ \rho\,\mathrm{sech}\left(\dfrac{x}{\rho} + \alpha\right)\sin\left(\dfrac{y}{\rho}\right) \\ \rho\left[\dfrac{x}{\rho} + \alpha - \tanh\left(\dfrac{x}{\rho} + \alpha\right)\right] \end{pmatrix}. \tag{1.84}$$

这里, 坐标曲线 $x=$ 常数 和 $y=$ 常数 分别是纬线和经线. 利用位置向量 (1.84) 可画出相应的伪球面, 如图 1.4 所示.

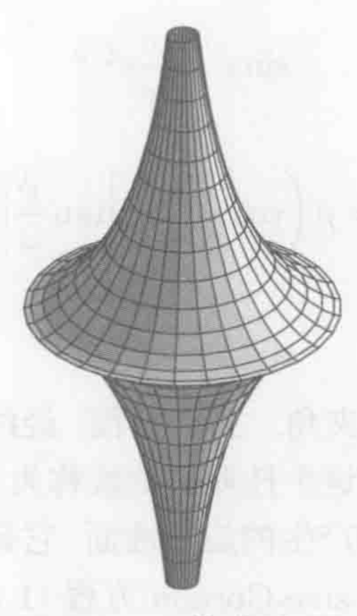


图 1.4　Beltrami 伪球面 ($\zeta=\pi/2$)

1.4.2　伪球螺旋面

如果将一条曲线绕一根轴旋转同时沿平行于该轴的方向平移, 而且平移速度与旋转速度之比为常数, 那么就得到一个*螺旋面*. 特别地, 由曳物线产生的螺旋面是一个伪球曲面, 称为*Dini 曲面*. 如果用上面的坐标 x,y 表示, 它的位置向量是

$$\boldsymbol{r}(x,y)=\begin{pmatrix}\rho\sin\zeta\,\mathrm{sech}\,\chi\cos\left(\dfrac{y}{\rho}\right)\\ \rho\sin\zeta\,\mathrm{sech}\,\chi\sin\left(\dfrac{y}{\rho}\right)\\ x-\rho\sin\zeta\,\tanh\chi\end{pmatrix},\tag{1.85}$$

其中

$$\chi=\frac{x-y\cos\zeta}{\rho\sin\zeta},\quad \zeta\text{ 是常数}.\tag{1.86}$$

当 $\zeta=\pi/2$ 时我们就重新得到了伪球面. 这里, 曳物线的切线长度是 $\rho\sin\zeta$, 产生曳物线的平移速度与旋转速度之比是 $\rho\cos\zeta$. 对应的 1+1 维 sine-Gordon 方程 (1.70) 带参数 $\beta=\tan(\zeta/2)$ 的单孤立子解 (1.54) 在曲率线坐标下为

$$\begin{aligned}\theta=\frac{\omega}{2}&=2\arctan\left[\exp\left\{\frac{1}{2\rho}\left(\beta+\frac{1}{\beta}\right)x+\frac{1}{2\rho}\left(\beta-\frac{1}{\beta}\right)y\right\}\right]\\&=2\arctan\exp\chi.\end{aligned}\tag{1.87}$$

由 (1.85) 式给出的 Dini 曲面的位置向量如图 1.5 所示.

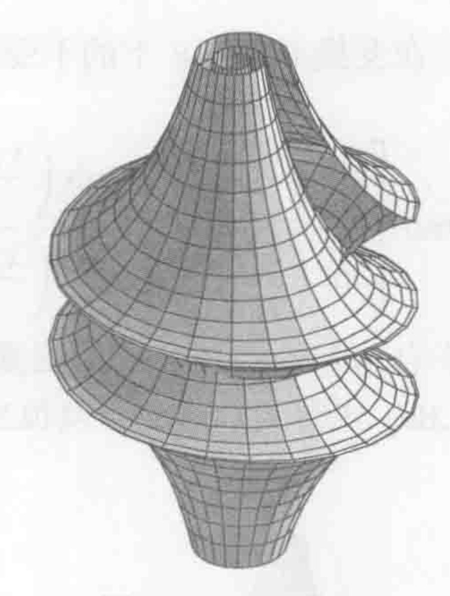


图 1.5 Dini 曲面

1.4.3 双孤立子曲面

在曲率线坐标 x, y 下, 1+1 维 sine-Gordon 方程 (1.70) 的 Bäcklund 变换 (1.47) 是

$$\left.\begin{aligned} \theta'_x - \theta_y &= \frac{1}{\rho\sin\zeta}(\sin\theta'\cos\theta - \cos\zeta\cos\theta'\sin\theta), \\ \theta'_y - \theta_x &= \frac{1}{\rho\sin\zeta}(\cos\theta'\sin\theta - \cos\zeta\sin\theta'\cos\theta), \end{aligned}\right\} \quad \mathbb{B}_\beta \tag{1.88}$$

其中 $\beta = \tan(\zeta/2)$. 进一步, 如果 $\boldsymbol{r}$ 是对应于方程 (1.70) 的解 θ 的伪球曲面的位置向量, 那么对应于 $\theta' = \mathbb{B}_\beta(\theta)$ 的新的伪球曲面的位置向量为

$$\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{r} + L\left[\frac{\cos\theta'}{\cos\theta}\boldsymbol{r}_x - \frac{\sin\theta'}{\sin\theta}\boldsymbol{r}_y\right], \tag{1.89}$$

其中 $L = \rho\sin\zeta$.

由非线性叠加原理 (1.63),

$$\tan\left(\frac{\theta_{12} - \theta_0}{2}\right) = \frac{\sin\left(\dfrac{\zeta_2 + \zeta_1}{2}\right)\tan\left(\dfrac{\theta_2 - \theta_1}{2}\right)}{\sin\left(\dfrac{\zeta_2 - \zeta_1}{2}\right)}, \tag{1.90}$$

这里 θ_0 是种子解, $\theta_1 = \mathbb{B}_{\beta_1}(\theta_0)$, $\theta_2 = \mathbb{B}_{\beta_2}(\theta_0)$, $\theta_{12} = \mathbb{B}_{\beta_2}(\theta_1) = \mathbb{B}_{\beta_1}(\theta_2)$. 如果取种子解为真空解 $\theta_0 = 0$, 那么

$$\theta_i = 2\arctan(\exp\chi_i), \quad i = 1, 2, \tag{1.91}$$

其中

$$\chi_i = \frac{1}{\quad}(x - y\cos\zeta_i), \quad \zeta_1 \neq \zeta_2 \tag{1.92}$$

利用 sine-Gordon 方程 (1.70) 在变换 $\theta \to -\theta$ 下的不变性, (1.90) 式给出**双孤立子解**

$$\Theta^{\pm} = \pm 2 \arctan \left[\frac{\sin\left(\frac{\zeta_2+\zeta_1}{2}\right)\sinh\left(\frac{\chi_1-\chi_2}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\zeta_2-\zeta_1}{2}\right)\cosh\left(\frac{\chi_1+\chi_2}{2}\right)} \right]. \tag{1.93}$$

对应于方程 (1.70) 的解 (1.93) 的伪球曲面的位置向量 $\boldsymbol{r}'$ 可以通过将 $\theta = \theta_1, \zeta = \zeta_2, \theta' = \Theta^{\pm}$ 代入 (1.89) 式得到. 对应于双孤立子解的伪球曲面如图 1.6 所示.

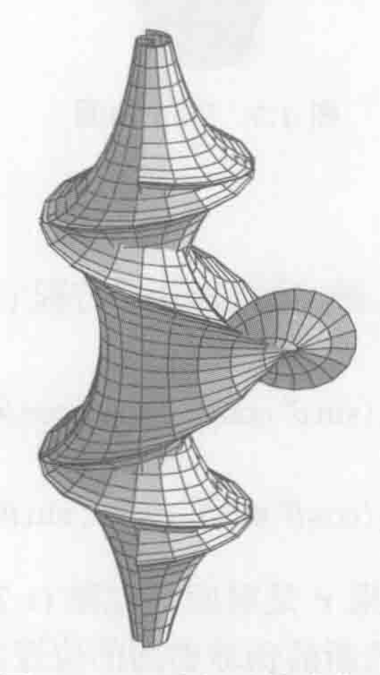


图 1.6　双孤立子伪球曲面

1.4.4　呼吸子

呼吸子解是一类重要的周期双孤立子解. 我们将用可换性定理给出呼吸子解的解析表达式, 并构造相应的伪球曲面.

取 Bäcklund 参数 $\beta_i = \tan(\zeta_i/2)$, 则由 (1.93) 式给出的双孤立子解 Θ^+ 成为

$$\Theta^{+} = 2 \arctan \left[\frac{\beta_2+\beta_1}{\beta_2-\beta_1} \frac{\sinh\left(\frac{\chi_1-\chi_2}{2}\right)}{\cosh\left(\frac{\chi_1+\chi_2}{2}\right)} \right], \tag{1.94}$$

而生成它的单孤立子解由 (1.91) 式给出, 其中

$$\chi_i = \frac{1}{2\beta_i \rho}[(1+\beta_i^2)x - (1-\beta_i^2)y]. \tag{1.95}$$

为了得到周期解, 需要取互为复共轭的 Bäcklund 参数 $\beta_1 = c + \mathrm{i}d$ 和 $\beta_2 = c - \mathrm{i}d$, 这时由 (1.93) 式得到

$$\Theta^{+} = 2\arctan\left[\frac{c\sin\left(\dfrac{d}{2\rho(c^2+d^2)}\xi\right)}{d\cosh\left(\dfrac{c}{2\rho(c^2+d^2)}\eta\right)}\right], \tag{1.96}$$

其中 $\xi = [1-(c^2+d^2)]x - [1+(c^2+d^2)]y$, $\eta = [1+(c^2+d^2)]x - [1-(c^2+d^2)]y$. 因此 Θ^{+} 是实函数, 且关于变量 ξ 是周期的.

如果我们要求 $|\beta_1| = 1$, 那么 $c^2 + d^2 = 1$, 从而得到关于 y 周期的解

$$\Theta^{+} = -2\arctan\left[\frac{c\sin(dy/\rho)}{d\cosh(cx/\rho)}\right]. \tag{1.97}$$

由于这个解并不随着 y 的变化而平移, 我们称之为静态呼吸子解.

1.4.5 静态呼吸子曲面

我们已经知道, θ_{12} 既可由 $\mathbb{B}_{\beta_2}(\theta_1)$ 生成, 也可由 $\mathbb{B}_{\beta_1}(\theta_2)$ 生成, 因此由 (1.89) 式, 可以有对称表示

$$\begin{aligned} \boldsymbol{r}_{12} = \frac{1}{2}\Bigg[&\boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{r}_2 + \rho\cos\theta_{12}\left(\sin\zeta_2\frac{\boldsymbol{r}_{1,x}}{\cos\theta_1} + \sin\zeta_1\frac{\boldsymbol{r}_{2,x}}{\cos\theta_2}\right) \\ &+\rho\sin\theta_{12}\left(\sin\zeta_2\frac{\boldsymbol{r}_{1,y}}{\sin\theta_1} + \sin\zeta_1\frac{\boldsymbol{r}_{2,y}}{\sin\theta_2}\right)\Bigg]. \end{aligned} \tag{1.98}$$

对静态呼吸子解,

$$\begin{aligned} &\sin\zeta_1 = \sin\zeta_2 = \frac{1}{c}, \\ &\chi_2 = \frac{1}{\rho}(cx - \mathrm{i}dy) = \bar{\chi}_1, \quad \boldsymbol{r}_2 = \bar{\boldsymbol{r}}_1, \quad \theta_2 = \bar{\theta}_1. \end{aligned} \tag{1.99}$$

在 (1.85) 式中分别取 $\zeta = \zeta_1$ 和 ζ_2, 得到 $\boldsymbol{r}_1$ 和 $\boldsymbol{r}_2$, 将它们代入 (1.98) 式中, 得到对应于实的静态呼吸子解 (1.97) 的伪球曲面, 在取 $\rho = 1$ 时, 它的位置向量为

$$\begin{aligned} \boldsymbol{r}_{\text{呼吸子}} = &\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x \end{pmatrix} + \frac{2d}{c}\frac{\sin(dy)\cosh(cx)}{d^2\cosh^2(cx) + c^2\sin^2(dy)}\begin{pmatrix} \sin y \\ -\cos y \\ 0 \end{pmatrix} \\ &+ \frac{2d^2}{c}\frac{\cosh(cx)}{d^2\cosh^2(cx) + c^2\sin^2(dy)}\begin{pmatrix} \cos y\cos(dy) \\ \sin y\cos(dy) \\ -\sinh(cx) \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{1.100}$$

其中 $c = \sqrt{1-d^2}$. 容易证明曲率线 $y =$ 常数 是平面曲线, 从而上述伪球曲面是 En-

对任何一个 0 到 1 之间的有理数 d, 有一个静态呼吸子伪球曲面, 它关于参数 y 是周期的. 记 $d = p/q$, 其中 p, q 是互素的整数, $p < q$, 那么呼吸子解的周期是 $2\pi q/p$. 对应于不同数值 d 的静态呼吸子伪球曲面见图 1.7.

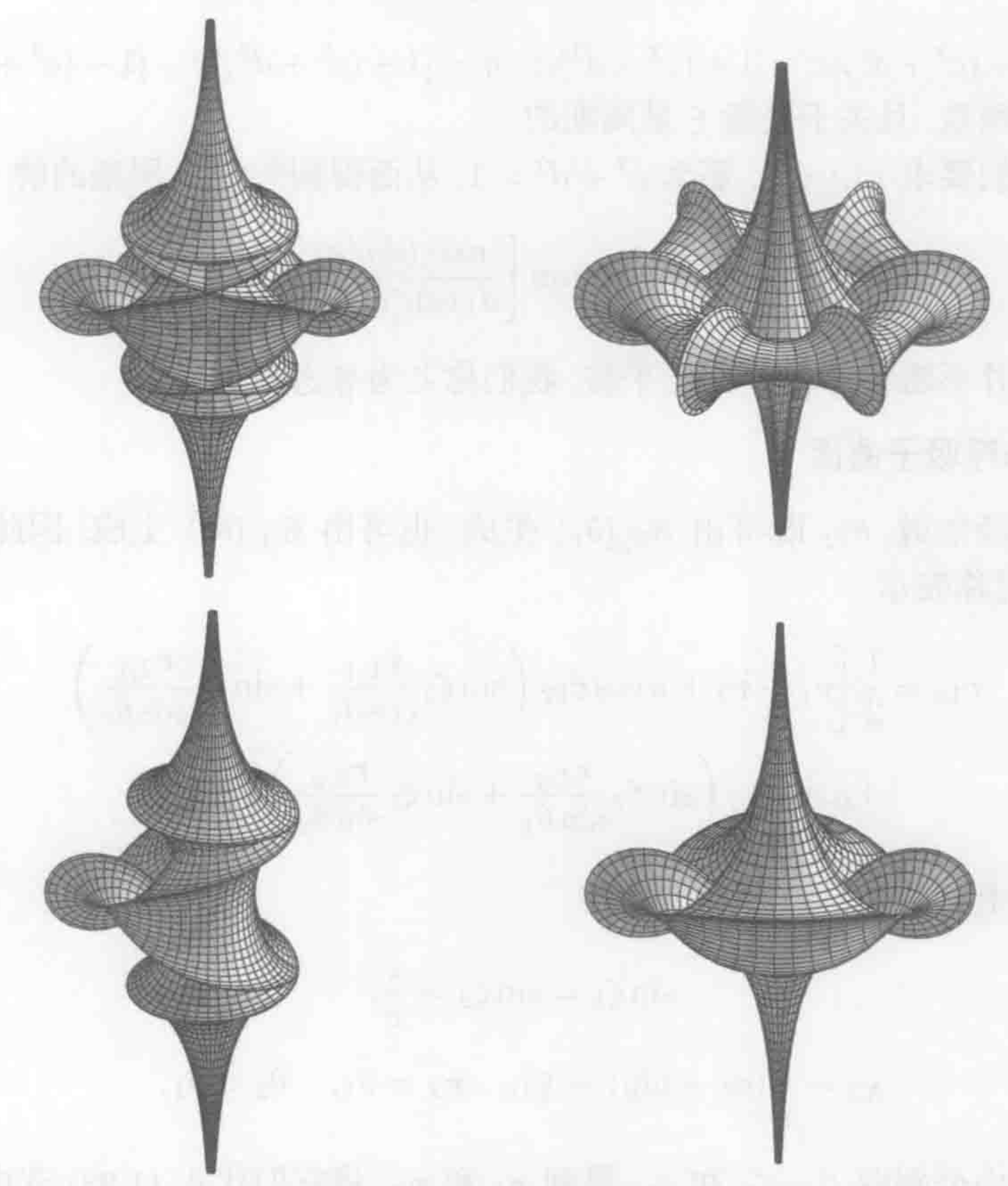


图 1.7　静态呼吸子伪球曲面[181]: $\dfrac{p}{q} = \dfrac{1}{4}, \dfrac{3}{4}, \dfrac{1}{5}, \dfrac{1}{2}$

反复应用 (1.89) 式, 我们就能得到以前用可换性定理算得的 sine-Gordon 方程的 N 孤立子解所相应伪球曲面的位置向量.

练　习

1. 建立 Bäcklund 变换关系 (1.88) 和 (1.89).

2. 对于双孤立子解 (1.93), 画出它的时间演化, 其时间范围既要包含非线性相互作用, 也要包含分解为两个单孤立子解的过程.

1.5 平行曲面和一类 Weingarten 曲面上的诱导 Bäcklund 变换

给定一个曲面 Σ, 设它的位置向量为 $\boldsymbol{r}$, 那么由

$$\tilde{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{r} + c\boldsymbol{N}, \quad c \text{ 为常数} \tag{1.101}$$

决定的曲面 $\tilde{\Sigma}$ 称为 Σ 的*平行曲面*. 这里, c 表示 Σ 同 $\tilde{\Sigma}$ 之间沿法向的 (常值) 距离. 如果取 Σ 上的曲率线坐标 x, y, 那么由 (1.101) 式得到

$$\begin{aligned} \tilde{\boldsymbol{r}}_x &= \boldsymbol{r}_x + c\boldsymbol{N}_x = \boldsymbol{r}_x - \frac{ce}{E}\boldsymbol{r}_x = (1 - c\kappa_1)\boldsymbol{r}_x, \\ \tilde{\boldsymbol{r}}_y &= \boldsymbol{r}_y + c\boldsymbol{N}_y = \boldsymbol{r}_y - \frac{cg}{G}\boldsymbol{r}_y = (1 - c\kappa_2)\boldsymbol{r}_y, \end{aligned} \tag{1.102}$$

其中 κ_1 和 κ_2 为 Σ 在 $\boldsymbol{r}$ 处的*主曲率*.[6] 于是

$$\begin{gathered} \tilde{E} = (1 - c\kappa_1)^2 E, \quad \tilde{F} = 0, \quad \tilde{G} = (1 - c\kappa_2)^2 G, \\ \tilde{H}^2 = (1 - c\kappa_1)^2 (1 - c\kappa_2)^2 H^2, \end{gathered} \tag{1.103}$$

而

$$\tilde{\boldsymbol{N}} = \frac{\boldsymbol{r}_x \times \boldsymbol{r}_y}{\tilde{H}} = \epsilon \boldsymbol{N}, \tag{1.104}$$

这里 $\epsilon = \pm 1$ 由 $(1 - c\kappa_1)(1 - c\kappa_2)$ 的正负决定. 进一步,

$$\tilde{e} = \epsilon(1 - c\kappa_1)e, \quad \tilde{f} = 0, \quad \tilde{g} = \epsilon(1 - c\kappa_2)g. \tag{1.105}$$

所以, 原来曲面 Σ 上的曲率线参数成为平行曲面 $\tilde{\Sigma}$ 上的曲率线参数, 而对应点的切平面互相平行.

平行曲面 $\tilde{\Sigma}$ 的主曲率是

$$\tilde{\kappa}_1 = \frac{\tilde{e}}{\tilde{E}} = \frac{\epsilon\kappa_1}{(1 - c\kappa_1)}, \quad \tilde{\kappa}_2 = \frac{\tilde{g}}{\tilde{G}} = \frac{\epsilon\kappa_2}{(1 - c\kappa_2)}, \tag{1.106}$$

从而 $\tilde{\Sigma}$ 的平均曲率 $\tilde{\mathcal{M}}$ 和全曲率 $\tilde{\mathcal{K}}$ 是

$$\tilde{\mathcal{M}} = \frac{1}{2}(\tilde{\kappa}_1 + \tilde{\kappa}_2) = \frac{\epsilon(\mathcal{M} - c\mathcal{K})}{1 - 2c\mathcal{M} + c^2\mathcal{K}}, \tag{1.107}$$

$$\tilde{\mathcal{K}} = \tilde{\kappa}_1\tilde{\kappa}_2 = \frac{\mathcal{K}}{1 - 2c\mathcal{M} + c^2\mathcal{K}}. \tag{1.108}$$

---

[6]如果用主曲率来表示, ...

1.5.1 常平均曲率曲面和 Bonnet 定理

设 $\Sigma = \tilde{\Sigma}|_{c=0}$ 是具有 $\mathcal{K} = -1/\rho^2$ 的伪球曲面, 那么平行曲面 $\tilde{\Sigma}$ 的平均曲率和全曲率为

$$\tilde{\mathcal{M}} = \frac{\epsilon(\mathcal{M} + c/\rho^2)}{1 - 2c\mathcal{M} - c^2/\rho^2}, \quad \tilde{\mathcal{K}} = \frac{-1}{\rho^2(1 - 2c\mathcal{M} - c^2/\rho^2)}, \tag{1.109}$$

由此得到关系

$$(\rho^2 + c^2)\tilde{\mathcal{K}} + 2c\epsilon\tilde{\mathcal{M}} = -1, \tag{1.110}$$

或等价地用主曲率表示为

$$\left[\tilde{\kappa}_1 + \frac{c\epsilon}{\rho^2 + c^2}\right]\left[\tilde{\kappa}_2 + \frac{c\epsilon}{\rho^2 + c^2}\right] = \frac{-\rho^2}{(\rho^2 + c^2)^2}. \tag{1.111}$$

于是平行于给定伪球曲面 Σ 的曲面 $\tilde{\Sigma}$ 是特殊的 *Weingarten* 曲面, 即它们的平均曲率 $\tilde{\mathcal{M}}$ 和全曲率 $\tilde{\mathcal{K}}$ 是函数相关的, 或等价地, 它们的主曲率 κ_1 和 κ_2 是函数相关的.[7]

如果曲面 Σ 具有正常 Gauss曲率

$$\mathcal{K} = \frac{1}{\rho^2}, \tag{1.112}$$

那么 Gauss 方程组成为可积的椭圆 sinh-Gordon 方程[8], 相应平行曲面的平均曲率为

$$\tilde{\mathcal{M}} = \frac{\epsilon(\mathcal{M} - c/\rho^2)}{1 - 2c\mathcal{M} + c^2/\rho^2}, \tag{1.113}$$

它同 $\mathcal{M}$ 无关的充要条件为

$$c = \pm\rho. \tag{1.114}$$

这时, $\tilde{\mathcal{M}}$ 是常数, 从而得到下列 Bonnet 定理.

定理 1 *具有正常Gauss曲率 $\mathcal{K} = 1/\rho^2$ 的曲面允许两个具有平均曲率$\pm 1/(2\rho)$的平行曲面, 它们同正常 Gauss 曲率曲面的距离均为 ρ.*

在上面的讨论中, 随着参数 c 的变化, 可以认为基准伪球曲面 $\tilde{\Sigma}|_{c=0}$ 以固定速度沿法向运动, 从而产生一系列满足 (1.110) 式的 Weingarten 曲面. 在这种运动中, 曲率线在法向平移 (1.101) 下不变, 同时它们生成互相正交的曲面, 并且这些曲面与平行曲面 $\tilde{\Sigma}$ 正交.

---

[7] Weingarten 曲面与某些孤立子方程的联系可参见文献 [75].

[8] 也称为 [illegible] 方程. —— 译者.

1.5.2 一个导出的 Bäcklund 变换

如果知道一族曲面 Σ 的 Bäcklund 变换, 那么自然导出一族平行曲面的 Bäcklund 变换. 特别是, 我们可以得到由关系 (1.111) 决定的 Weingarten 曲面的 Bäcklund 变换. 曲面 Σ 的 Bäcklund 变换由 (1.89) 式给出, 即

$$\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{r} + \rho(\boldsymbol{N} \times \boldsymbol{N}'), \tag{1.115}$$

其中 $\boldsymbol{N}'$ 由 (1.41) 式给出, 在曲率线坐标下,

$$\begin{aligned}\boldsymbol{N}' =& \frac{L}{\rho\sin 2\theta}[-\cos(\theta'-\theta)+\cos(\theta'+\theta)]\boldsymbol{r}_x \\ &+\frac{L}{\rho\sin 2\theta}[-\cos(\theta'-\theta)-\cos(\theta'+\theta)]\boldsymbol{r}_y + \left(1-\frac{L\beta}{\rho}\right)\boldsymbol{N} \\ =& \frac{L}{\rho}\left(\frac{\sin\theta'}{\cos\theta}\boldsymbol{r}_x - \frac{\cos\theta'}{\sin\theta}\boldsymbol{r}_y\right) + \left(1-\frac{L\beta}{\rho}\right)\boldsymbol{N}.\end{aligned} \tag{1.116}$$

Σ 和 Σ' 的平行曲面 $\tilde{\Sigma}$ 和 $\tilde{\Sigma}'$ 分别由

$$\tilde{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{r} + c\boldsymbol{N}, \quad \tilde{\boldsymbol{r}}' = \boldsymbol{r}' + c'\boldsymbol{N}' \tag{1.117}$$

给出, 所以

$$\begin{aligned}\tilde{\boldsymbol{r}}' =& \tilde{\boldsymbol{r}} + \rho(\tilde{\boldsymbol{N}} \times \tilde{\boldsymbol{N}}') + c'\tilde{\boldsymbol{N}}' - c\boldsymbol{N} \\ =& \tilde{\boldsymbol{r}} + L\left[\frac{\cos\theta'}{\cos\theta}\boldsymbol{r}_x - \frac{\sin\theta'}{\sin\theta}\boldsymbol{r}_y\right] \\ &+\frac{c'L}{\rho}\left[\frac{\sin\theta'}{\cos\theta}\boldsymbol{r}_x - \frac{\cos\theta'}{\sin\theta}\boldsymbol{r}_y\right] + \left[c'\left(1-\frac{L\beta}{\rho}\right)-c\right]\boldsymbol{N} \\ =& \tilde{\boldsymbol{r}} + L\left[\frac{\cos\theta'+(c'/\rho)\sin\theta'}{\cos\theta-(c'/\rho)\sin\theta}\tilde{\boldsymbol{r}}_x - \frac{\sin\theta'+(c'/\rho)\cos\theta'}{\sin\theta+(c'/\rho)\cos\theta}\tilde{\boldsymbol{r}}_y\right] \\ &+\epsilon\left[c'\left(1-\frac{L\beta}{\rho}\right)-c\right]\tilde{\boldsymbol{N}}.\end{aligned} \tag{1.118}$$

这给出了作用在平均曲率 $\tilde{\mathcal{M}}$ 和全曲率 $\tilde{\mathcal{K}}$ 满足 (1.110) 式的 Weingarten 曲面上的 Bäcklund 变换. 由于

$$\mathcal{K}' = -\frac{1}{\rho^2}, \quad \mathcal{M}' = -\frac{1}{\rho}\cot 2\theta', \tag{1.119}$$

在这个 Bäcklund 变换作用下,

$$\begin{aligned}\tilde{\mathcal{K}}' &= \frac{-1}{\rho^2(\rho^2 - c'^2 + 2c'\rho\cot 2\theta')}, \\ \tilde{\mathcal{M}}' &= \frac{\epsilon(c'-\rho\cot 2\theta')}{\cdots}\end{aligned} \tag{1.120}$$

我们已经知道, (1.118) 式中的 θ 和 θ' 是由 (1.88) 式决定的 Bäcklund 变换 $\mathbb{B}_\beta$ 联系起来的, 同时, (1.118) 式给出

$$|\tilde{\boldsymbol{r}}' - \tilde{\boldsymbol{r}}|^2 = L^2 + c'^2 - 2cc'\cos\zeta + c^2, \tag{1.121}$$

从而 $\tilde{\boldsymbol{r}}' - \tilde{\boldsymbol{r}}$ 的长度为常数.

满足条件

$$(c^2 \pm \rho^2)\mathcal{K} + 2c\epsilon\mathcal{M} = -1 \tag{1.122}$$

的 Weingarten 曲面是孤立子曲面, 因为它们是常 Gauss 曲率曲面的平行曲面. 如果假设 (1.122) 式中的 c 和 ρ 关于某个坐标系是 "调和" 的, 那么对应的 "广义 Weingarten 曲面"[329, 332, 333] 也是可积的. 下节中, 我们要讨论 $c = 0$, $\rho_{uv} = 0$ 的特殊情形, 即在渐近坐标下成立

$$\left(\frac{1}{\sqrt{\mathcal{K}}}\right)_{xy} = 0, \tag{1.123}$$

对应的曲面是经典 Bianchi 曲面. 进一步, Bobenko[40] 建立了由

$$(\partial_x^2 + \partial_y^2)\left(\frac{1}{\mathcal{M}}\right) = 0 \tag{1.124}$$

给出的 "反调和平均曲率曲面" 的可积性, 这里 $c = \pm\rho$, $(\partial_x^2 + \partial_y^2)\rho = 0$, 并在 (1.122) 式中取负号, 而 x 和 y 表示 "共形" 坐标 (参见第 5 章). 这些曲面推广了上一小节中讨论的常平均曲率曲面.

1.6 Bianchi 方程组及其自 Bäcklund 变换

在 1.1 节中, 我们已经知道渐近坐标下的双曲曲面由

$$\begin{aligned}
&a_v + \frac{1}{2}\frac{\rho_v}{\rho}a - \frac{1}{2}\frac{\rho_u}{\rho}b\cos\omega = 0,\\
&b_u + \frac{1}{2}\frac{\rho_u}{\rho}b - \frac{1}{2}\frac{\rho_v}{\rho}a\cos\omega = 0,\\
&\omega_{uv} + \frac{1}{2}\left(\frac{\rho_u}{\rho}\frac{b}{a}\sin\omega\right)_u + \frac{1}{2}\left(\frac{\rho_v}{\rho}\frac{a}{b}\sin\omega\right)_v - ab\sin\omega = 0
\end{aligned} \tag{1.125}$$

决定, 对应的第一、第二基本形式是

$$\begin{aligned}
\mathrm{I} &= \rho^2(a^2\,\mathrm{d}u^2 + 2ab\cos\omega\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v + b^2\,\mathrm{d}v^2),\\
\mathrm{II} &= 2\rho ab\sin\omega\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v,
\end{aligned} \tag{1.126}$$

而 Gauss曲率为

$$\mathcal{K} = -\frac{1}{\rho^2} < 0. \tag{1.127}$$

1890 年, Bianchi[33] 在约束

$$\rho_{uv} = 0 \tag{1.128}$$

下给出了双曲曲面的一个纯几何构造, 这些曲面称为*Bianchi 曲面*. 现在我们在不限制 Gauss 曲率的情况下导出双曲曲面的 Bäcklund 变换, 在特殊情况下得到伪球曲面、Tzitzeica 曲面和 Bianchi 曲面的 Bäcklund 变换. 下面首先导出双曲曲面的球表示下的 Mainardi-Codazzi 方程组. 令人感兴趣的是, 这些曲面的法向量在看作为 u 和 v 的函数时满足一个孤立子理论中著名的向量方程.

1.6.1 双曲曲面及其球表示

对给定的曲面 $\Sigma: \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u,v)$, 当 u 和 v 变化时, 法向量 $\boldsymbol{N} = \boldsymbol{N}(u,v)$ 给出单位球面 $\boldsymbol{N}^2 = 1$ 上的坐标系, 这个坐标系称为曲面的*球表示*或*Gauss 表示*. 对应的球面的第一基本形式为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{N}^2 = \mathcal{E}\,\mathrm{d}u^2 + 2\mathcal{F}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v + \mathcal{G}\,\mathrm{d}v^2, \tag{1.129}$$

其中

$$\mathcal{E} = \boldsymbol{N}_u^2, \quad \mathcal{F} = \boldsymbol{N}_u \cdot \boldsymbol{N}_v, \quad \mathcal{G} = \boldsymbol{N}_v^2. \tag{1.130}$$

球表示的度量可以用 Σ 的第一基本形式来表示, 在渐近坐标下, 对具有 Gauss 曲率

$$\mathcal{K} = -\frac{1}{\rho^2} \tag{1.131}$$

的双曲曲面,

$$E = \rho^2\mathcal{E}, \quad F = -\rho^2\mathcal{F}, \quad G = \rho^2\mathcal{G}. \tag{1.132}$$

因此, 双曲曲面的 Weingarten 方程组成为

$$\boldsymbol{r}_u = \frac{\rho}{\mathcal{H}}(\mathcal{F}\boldsymbol{N}_u - \mathcal{E}\boldsymbol{N}_v), \quad \boldsymbol{r}_v = \frac{\rho}{\mathcal{H}}(\mathcal{F}\boldsymbol{N}_v - \mathcal{G}\boldsymbol{N}_u), \tag{1.133}$$

其中 $\mathcal{H}^2 = \mathcal{E}\mathcal{G} - \mathcal{F}^2$, 而 Mainardi-Codazzi 方程组成为

$$\frac{\rho_u}{\rho} = -2\tilde{\Gamma}^2_{12}, \quad \frac{\rho_v}{\rho} = -2\tilde{\Gamma}^1_{12}, \tag{1.134}$$

其中 $\tilde{\Gamma}^k_{ij}$ 是球表示的度量的 Christoffel 记号. 进一步, (1.134) 式的相容性条件为

$$\frac{\partial}{\partial u}\tilde{\Gamma}^1_{12} = \frac{\partial}{\partial v}\tilde{\Gamma}^2_{12}, \tag{1.135}$$

反之, 如果单位球面上的一个坐标系用某个向量值函数 $\boldsymbol{N}=\boldsymbol{N}(u,v)$, $\boldsymbol{N}^2=1$ 来表示, 则此坐标系可以看作为双曲曲面在渐近坐标下的球表示的充要条件是对应的系数 $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ 满足条件 (1.135). 这个定理的证明是构造性的. 关系式 (1.135) 保证存在函数 ρ 满足 (1.134) 式, 这也意味着, 方程组 (1.133) 是相容的. 然后容易证明 $\boldsymbol{N}$ 确实是由 $\boldsymbol{r}$ 定义的曲面的法向. 需要注意的是, 向量 $\boldsymbol{r}$ 在允许位似变换 (包括缩放和平移变换) 下是唯一确定的, 因为 ρ 在相差一个相乘因子下是唯一的, 而 $\boldsymbol{r}$ 还可相差一个相加的积分常数.

上述结果可以重述如下. 如果用双曲曲面的法向量 $\boldsymbol{N}$ 来表示, 第一、第二基本形式为

$$\begin{aligned}\mathrm{I}&=\rho^2(\boldsymbol{N}_u^2\,\mathrm{d}u^2-2\boldsymbol{N}_u\cdot\boldsymbol{N}_v\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v+\boldsymbol{N}_v^2\,\mathrm{d}v^2),\\ \mathrm{II}&=2\rho(\boldsymbol{N}_u\times\boldsymbol{N}_v)\cdot\boldsymbol{N}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v=\pm2\rho|\boldsymbol{N}_u\times\boldsymbol{N}_v|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v,\end{aligned}\tag{1.136}$$

而

$$\mathcal{K}=-\frac{1}{\rho^2}=-\frac{f^2}{EG-F^2}=-\frac{f^2}{\rho^4[\boldsymbol{N}_u^2\boldsymbol{N}_v^2-(\boldsymbol{N}_u\cdot\boldsymbol{N}_v)^2]}.\tag{1.137}$$

由 Gauss-Weingarten 方程组, $\boldsymbol{N}$ 满足双曲型方程

$$\boldsymbol{N}_{uv}+\frac{1}{2}\frac{\rho_v}{\rho}\boldsymbol{N}_u+\frac{1}{2}\frac{\rho_u}{\rho}\boldsymbol{N}_v+\mathcal{F}\boldsymbol{N}=\boldsymbol{0}.\tag{1.138}$$

同 $\boldsymbol{N}$ 作外积得到向量方程

$$(\rho\boldsymbol{N}\times\boldsymbol{N}_u)_v+(\rho\boldsymbol{N}\times\boldsymbol{N}_v)_u=\boldsymbol{0},\tag{1.139}$$

这就是当 (1.133) 式写作

$$\boldsymbol{r}_u=\rho\boldsymbol{N}_u\times\boldsymbol{N},\quad \boldsymbol{r}_v=-\rho\boldsymbol{N}_v\times\boldsymbol{N}\tag{1.140}$$

时的相容性条件. 最后这组关系通常被称为*Lelieuvre* **公式** (见文献 [118]).

反之, 对于向量方程 (1.139) 满足 $\boldsymbol{N}^2=1$ 的任一解, 存在向量值函数 $\boldsymbol{r}$ 满足 (1.140) 式. 于是有

$$\boldsymbol{r}_u\cdot\boldsymbol{N}=0,\quad \boldsymbol{r}_v\cdot\boldsymbol{N}=0,\quad \boldsymbol{r}_u\cdot\boldsymbol{N}_u=0,\quad \boldsymbol{r}_v\cdot\boldsymbol{N}_v=0,\tag{1.141}$$

从而 $\boldsymbol{r}$ 可以看作是用渐近坐标表示的一个曲面的位置向量, 它的第一、第二基本形式由 (1.136) 式给出. 事实上, 可以直接验证, 在 (1.139) 式成立时, Gauss-Mainardi-Codazzi 方程组 (1.125) 一定成立. 于是, 向量方程 (1.139), 或等价的

$$\begin{aligned}&\varepsilon_{uv}+\frac{1}{2}\frac{\rho_v}{\rho}\varepsilon_u+\frac{1}{2}\frac{\rho_u}{\rho}\varepsilon_v=2\frac{\varepsilon_u\varepsilon_v\bar{\varepsilon}}{|\varepsilon|^2+1},\\ &\boldsymbol{N}=\frac{1}{|\varepsilon|^2+1}\begin{pmatrix}\varepsilon+\bar{\varepsilon}\\ -\mathrm{i}(\varepsilon-\bar{\varepsilon})\\ |\varepsilon|^2-1\end{pmatrix}\end{aligned}\tag{1.142}$$

是 Gauss-Mainardi-Codazzi 方程组 (1.125) 的另一种表示. 特别地, 经典 Bianchi 方程组等价于方程 $(1.142)_1$ 加上条件 $\rho_{uv}=0$.

令人感兴趣的是, 向量方程 (1.139) 在孤立子理论中有重要意义. 为此, 引入矩阵值函数

$$N=\boldsymbol{N}\cdot\boldsymbol{\sigma}, \tag{1.143}$$

其中 $\boldsymbol{\sigma}=(\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3)^{\mathrm{T}}$, σ_i 是标准的 Pauli 矩阵, 即

$$\sigma_1=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix},\quad \sigma_2=\begin{pmatrix}0 & -\mathrm{i}\\ \mathrm{i} & 0\end{pmatrix},\quad \sigma_3=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}, \tag{1.144}$$

那么 (1.139) 式可以等价地写为

$$(\rho NN_u)_v+(\rho NN_v)_u=0,\quad N^2=\mathbb{1},\quad N^{\dagger}=N. \tag{1.145}$$

这是非线性 σ 模型[394] 的推广, 相应的 Lie 群是 $O(3)$. 对于 Lie 群 $O(2,1)$, 相应的非线性 σ 型模型是

$$(\rho SS_u)_v+(\rho SS_v)_u=0,\quad \rho_{uv}=0,\quad S^2=-\mathbb{1},\quad \bar{S}=S. \tag{1.146}$$

如果将矩阵 S 写作

$$S=\frac{1}{\varepsilon+\bar{\varepsilon}}\begin{pmatrix}\mathrm{i}(\varepsilon-\bar{\varepsilon}) & -2\varepsilon\bar{\varepsilon}\\ 2 & -\mathrm{i}(\varepsilon-\bar{\varepsilon})\end{pmatrix} \tag{1.147}$$

并将 u,v 看作复共轭变量 $z,\bar{z}$, 那么就得到广义相对论中的 Ernst 方程[121]

$$\varepsilon_{z\bar{z}}+\frac{1}{2}\frac{\rho_{\bar{z}}}{\rho}\varepsilon_z+\frac{1}{2}\frac{\rho_z}{\rho}\varepsilon_{\bar{z}}=\frac{\varepsilon_z\varepsilon_{\bar{z}}}{\Re(\varepsilon)},\quad \rho_{z\bar{z}}=0. \tag{1.148}$$

所以, Ernst 方程可以看作是 Bianchi 方程组的椭圆对应.

进一步, 可以通过将非线性 σ 模型放在一个称作 LKR 系统[324] 的更大的框架下来构造 $2+1$ 维 Bianchi 方程组以及相关的广义相对论中的 Ernst 方程.

1.6.2 双曲曲面的一个 Bäcklund 变换

这里我们考虑满足相切条件

$$\boldsymbol{r}'=\boldsymbol{r}+p\boldsymbol{r}_u+q\boldsymbol{r}_v \tag{1.149}$$

的 Bäcklund 变换, 即要求连接曲面 Σ 和 Σ' 上对应点的线段与 Σ 相切. 如果进一步假设 Σ' 同 Σ 一样以 u,v 为渐近坐标, 那么条件

(1.150)

给出了关于函数 p 和 q 的两个二阶非线性微分方程. 这些方程的任一解给出了双曲曲面 Σ 和 Σ' 之间的形为 (1.149) 的变换.

如果要求向量 $\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}$ 同时还与第二个曲面 Σ' 相切, 那么情况就不同了, 这时通常要引入标准正交向量组, 它包含 Σ 的单位法向量 $\boldsymbol{N}$ 和曲率线的单位切向量. 曲率线的切向量是

$$\frac{\boldsymbol{r}_u}{a}\pm\frac{\boldsymbol{r}_v}{b} \tag{1.151}$$

或等价的

$$\frac{\boldsymbol{N}_u}{a}\pm\frac{\boldsymbol{N}_v}{b}. \tag{1.152}$$

用 Bianchi[33] 的方法, 我们取切向量构成的标准正交基

$$\boldsymbol{V}=\frac{1}{2\sin\dfrac{\Omega}{2}}\left(\frac{\boldsymbol{N}_u}{a}-\frac{\boldsymbol{N}_v}{b}\right),\quad \boldsymbol{W}=\frac{1}{2\cos\dfrac{\Omega}{2}}\left(\frac{\boldsymbol{N}_u}{a}+\frac{\boldsymbol{N}_v}{b}\right), \tag{1.153}$$

其中

$$\Omega=\omega+\pi. \tag{1.154}$$

Bianchi 的想法基于曲面 Σ 的球表示, 它的第一基本形式为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{N}^2=a^2\,\mathrm{d}u^2+2ab\cos\Omega\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v+b^2\,\mathrm{d}v^2, \tag{1.155}$$

因此 Ω 表示 $\boldsymbol{N}=\boldsymbol{N}(u,v)$ 产生的球面上坐标曲线之间的夹角.

用标准正交基 $\{\boldsymbol{V},\boldsymbol{W},\boldsymbol{N}\}$ 表示时, Gauss-Weingarten 方程组是

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{V}\\ \boldsymbol{W}\\ \boldsymbol{N}\end{pmatrix}_u=\begin{pmatrix}0 & -\Omega_1 & -a\sin\dfrac{\Omega}{2}\\ \Omega_1 & 0 & -a\cos\dfrac{\Omega}{2}\\ a\sin\dfrac{\Omega}{2} & a\cos\dfrac{\Omega}{2} & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{V}\\ \boldsymbol{W}\\ \boldsymbol{N}\end{pmatrix}, \tag{1.156}$$

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{V}\\ \boldsymbol{W}\\ \boldsymbol{N}\end{pmatrix}_v=\begin{pmatrix}0 & \Omega_2 & b\sin\dfrac{\Omega}{2}\\ -\Omega_2 & 0 & -b\cos\dfrac{\Omega}{2}\\ -b\sin\dfrac{\Omega}{2} & b\cos\dfrac{\Omega}{2} & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{V}\\ \boldsymbol{W}\\ \boldsymbol{N}\end{pmatrix},$$

这里

$$\Omega_1=\frac{1}{2}\Omega_u-\frac{1}{2}\frac{a}{b}\frac{\rho_v}{\rho}\sin\Omega,\quad \Omega_2=\frac{1}{2}\Omega_v-\frac{1}{2}\frac{b}{a}\frac{\rho_u}{\rho}\sin\Omega. \tag{1.157}$$

上述方程组相容的充要条件是 a, b, ρ 和 $\omega = \Omega - \pi$ 满足 Gauss-Mainardi-Codazzi 方程组 (1.125). 方程组 (1.156) 可以从形为

$$\begin{aligned} \boldsymbol{r}_u &= -\rho a \cos\frac{\Omega}{2}\boldsymbol{V} + \rho a \sin\frac{\Omega}{2}\boldsymbol{W}, \\ \boldsymbol{r}_v &= \rho b \cos\frac{\Omega}{2}\boldsymbol{V} + \rho b \sin\frac{\Omega}{2}\boldsymbol{W} \end{aligned} \tag{1.158}$$

的 Weingarten 方程组直接得到. 一旦知道了 $\boldsymbol{V}$ 和 $\boldsymbol{W}$, Σ 的位置向量就可以从方程组 (1.158) 积分得到.

在此基础上, 我们可以得到双曲曲面的 Bäcklund 变换. 因为两个双曲曲面都取了渐近坐标, 它们的位置向量 $\boldsymbol{r}$ 和 $\boldsymbol{r}'$ 满足 Lelieuvre 公式 (1.140), 即

$$\begin{aligned} \boldsymbol{r}_u &= \boldsymbol{\nu}_u \times \boldsymbol{\nu}, \quad & \boldsymbol{r}_v &= -\boldsymbol{\nu}_v \times \boldsymbol{\nu}, \\ \boldsymbol{r}'_u &= \boldsymbol{\nu}'_u \times \boldsymbol{\nu}', \quad & \boldsymbol{r}'_v &= -\boldsymbol{\nu}'_v \times \boldsymbol{\nu}', \end{aligned} \tag{1.159}$$

其中

$$\boldsymbol{\nu} = \sqrt{\rho}\boldsymbol{N}, \quad \boldsymbol{\nu}' = \sqrt{\rho'}\boldsymbol{N}'. \tag{1.160}$$

$\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\nu}'$ 满足的方程 (1.138) 成为[9]

$$\boldsymbol{\nu}_{uv} = \Lambda\boldsymbol{\nu}, \quad \boldsymbol{\nu}'_{uv} = \Lambda'\boldsymbol{\nu}', \tag{1.161}$$

而 Gauss 曲率为

$$\mathcal{K} = -\frac{1}{|\boldsymbol{\nu}|^4}, \quad \mathcal{K}' = -\frac{1}{|\boldsymbol{\nu}'|^4}. \tag{1.162}$$

$\boldsymbol{r}' - \boldsymbol{r}$ 同时与 Σ 和 Σ' 相切的条件成为

$$\boldsymbol{r}' - \boldsymbol{r} = m\boldsymbol{\nu}' \times \boldsymbol{\nu}. \tag{1.163}$$

将 (1.163) 式中的 $\boldsymbol{r}'$ 代入 $(1.159)_3$ 式得

$$\boldsymbol{\nu}'_u \times (\boldsymbol{\nu}' - m\boldsymbol{\nu}) + \boldsymbol{\nu}_u \times (m\boldsymbol{\nu}' - \boldsymbol{\nu}) - m_u\boldsymbol{\nu}' \times \boldsymbol{\nu} = \boldsymbol{0}, \tag{1.164}$$

它在方向 $\boldsymbol{\nu}' - m\boldsymbol{\nu}$ 上的分量给出

$$(m^2 - 1)(\boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{\nu}_u) \cdot \boldsymbol{\nu}' = 0. \tag{1.165}$$

类似地, $(1.159)_4$ 式给出

$$(m^2 - 1)(\boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{\nu}_v) \cdot \boldsymbol{\nu}' = 0. \tag{1.166}$$

所以, 如果假设向量 $\boldsymbol{\nu}_u, \boldsymbol{\nu}_v$ 和 $\boldsymbol{\nu}$ 线性无关, 且 $\Sigma' \neq \Sigma$, 那么 $m^2 = 1$. 不妨设

$$m = 1, \tag{1.167}$$

从而 (1.164) 式以及相应的关于 v 导数的式子简化为

$$(\boldsymbol{\nu}'_u + \boldsymbol{\nu}_u) \times (\boldsymbol{\nu}' - \boldsymbol{\nu}) = \mathbf{0}, \quad (\boldsymbol{\nu}'_v - \boldsymbol{\nu}_v) \times (\boldsymbol{\nu}' + \boldsymbol{\nu}) = \mathbf{0}. \tag{1.168}$$

这些必要条件可以写为

$$\boldsymbol{\nu}'_u + \boldsymbol{\nu}_u = k(\boldsymbol{\nu}' - \boldsymbol{\nu}), \quad \boldsymbol{\nu}'_v - \boldsymbol{\nu}_v = l(\boldsymbol{\nu}' + \boldsymbol{\nu}), \tag{1.169}$$

其中 k, l 是待定的函数. 将 $(1.169)_1$ 式对 v 求导, $(1.169)_2$ 式对 u 求导, 并利用方程组 (1.161), 我们就得到约束条件

$$\begin{aligned} (\Lambda' - kl - k_v)\boldsymbol{\nu}' + (\Lambda - kl + k_v)\boldsymbol{\nu} &= \mathbf{0}, \\ (\Lambda' - kl - l_u)\boldsymbol{\nu}' - (\Lambda - kl + l_u)\boldsymbol{\nu} &= \mathbf{0}. \end{aligned} \tag{1.170}$$

如果假设 $\boldsymbol{\nu}$ 和 $\boldsymbol{\nu}'$ 不平行, 那么

$$\Lambda = -k_v + kl, \quad \Lambda' = k_v + kl, \quad l_u = k_v. \tag{1.171}$$

由最后一式得, 存在势函数 ψ 满足

$$k = -(\ln\psi)_u, \quad l = -(\ln\psi)_v, \tag{1.172}$$

这时另外两式为

$$\psi_{uv} = \Lambda\psi, \quad \Lambda' = \Lambda - 2(\ln\psi)_{uv}, \tag{1.173}$$

而 (1.169) 式成为

$$(\psi\boldsymbol{\nu}')_u = -\psi\boldsymbol{\nu}_u + \psi_u\boldsymbol{\nu}, \quad (\psi\boldsymbol{\nu}')_v = \psi\boldsymbol{\nu}_v - \psi_v\boldsymbol{\nu}. \tag{1.174}$$

(1.173) 式和 (1.174) 式决定了经典的*Moutard 变换*, 我们将在第 3 章中讨论它与 Tzitzeica 曲面的联系. 就目前而言, 设 $\boldsymbol{r}$ 是渐近坐标下双曲曲面 Σ 的位置向量, $\boldsymbol{\nu}$ 是满足*Moutard 方程组* $(1.161)_1$ 的法向量, 那么当 ψ 是 Moutard 方程组 $(1.173)_1$ 的解时, 方程组 (1.174) 相容. 当取 $m = 1$ 时, (1.163) 式给出的向量 $\boldsymbol{r}'$ 是第二个双曲曲面 Σ' 的位置向量, 它也以 u, v 为渐近坐标, 并且 $\boldsymbol{r}' - \boldsymbol{r}$ 同时与 Σ 和 Σ' 相切.

1.6.3 Bianchi 方程组

Gauss-Mainardi-Codazzi 方程组 (1.125) 是一组关于函数 ω, a, b, ρ 的*欠定系统*. 于是, 可以加上一个约束, 使之在上一小节得出的 Bäcklund 变换下不变. 这里, 我们要求 Gauss 曲率 $\mathcal{K}$ 在 Bäcklund 变换下不变, 即

$$\mathcal{K}' = \mathcal{K} = -\frac{1}{\ }, \tag{1.175}$$

将 $\boldsymbol{N}'$ 写成

$$\boldsymbol{N}' = \cos\sigma \boldsymbol{N} + \sin\sigma(\cos\theta\, \boldsymbol{V} + \sin\theta\, \boldsymbol{W}), \tag{1.176}$$

其中 σ 表示法向 $\boldsymbol{N}$ 与 $\boldsymbol{N}'$ 之间的夹角, 然后将 (1.160) 式代入 (1.168) 式, 得到

$$\begin{aligned} \theta_u &= \frac{1}{2}\Omega_u + a\tan\frac{\sigma}{2}\cos\left(\theta + \frac{\Omega}{2}\right) - \frac{1}{2}\frac{a}{b}\frac{\rho_v}{\rho}\sin\Omega, \\ \theta_v &= -\frac{1}{2}\Omega_v - b\cot\frac{\sigma}{2}\cos\left(\theta - \frac{\Omega}{2}\right) + \frac{1}{2}\frac{b}{a}\frac{\rho_u}{\rho}\sin\Omega, \end{aligned} \tag{1.177}$$

$$\sigma_u = -\frac{\rho_u}{\rho}\tan\frac{\sigma}{2}, \quad \sigma_v = \frac{\rho_v}{\rho}\cot\frac{\sigma}{2}. \tag{1.178}$$

它们相容当且仅当

$$\rho_{uv} = 0. \tag{1.179}$$

这样, 就重新得到了 Bianchi 所给出的对于具有 Gauss曲率

$$\mathcal{K} = -\frac{1}{\rho^2}, \qquad \rho = U(u) + V(v) \tag{1.180}$$

的双曲曲面的经典 Bäcklund 变换. 上述曲面称为 Bianchi 曲面.

为了得到 Bianchi 曲面更明显的 Bäcklund 变换, 我们求解方程组 (1.178) 得到

$$\mu = \tan\frac{\sigma}{2} = \pm\sqrt{\frac{V(v)-k}{U(u)+k}}, \tag{1.181}$$

其中 k 是积分常数. 另一方面, (1.177) 式是著名的 Frobenius 系统

$$\theta_{u^i} = f_i + \sin\theta\, g_i + \cos\theta\, h_i \tag{1.182}$$

的特殊情形, 其中 $(u^1, u^2) = (u, v)$, 我们知道 Frobenius 系统等价于 Riccati 方程, 从而是可线性化的. 事实上, 设

$$\theta = 2\arctan\frac{\phi^1}{\phi^2}, \tag{1.183}$$

则 (1.177) 式的通解可以用线性方程组

$$\begin{aligned} \phi_u &= \left[-\mu a\sin\frac{\Omega}{2}X_1 + \mu a\cos\frac{\Omega}{2}X_2 + \frac{1}{2}\left(\Omega_u - \frac{a}{b}\frac{\rho_v}{\rho}\sin\Omega\right)X_3\right]\phi, \\ \phi_v &= \left[-\mu^{-1}b\sin\frac{\Omega}{2}X_1 - \mu^{-1}b\cos\frac{\Omega}{2}X_2 + \frac{1}{2}\left(-\Omega_v + \frac{b}{a}\frac{\rho_v}{\rho}\sin\Omega\right)X_3\right]\phi \end{aligned} \tag{1.184}$$

的解表示出来, 这里

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi^1 \\ \phi^2 \end{pmatrix}, \tag{1.185}$$

$$X_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad X_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad X_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{1.186}$$

用孤立子理论的语言来说, 线性方程组 (1.184) 表示 Bianchi 方程组 (1.125)、(1.128) 的一个 "非等谱" Lax 对, 因为这里可以将 μ 看作是一个非常数的 "谱参数". 事实上, 像在伪球曲面情形一样, 如果让 $k \to \infty$, 这个 Lax 对就是 Gauss-Weingarten 方程组 (1.156) 的 $su(2)$ 表示. Levi 和 Sym[234] 用它的一个规范等价形式得到了 Bianchi 方程组的矩阵 Darboux 变换.

现在将 Bäcklund 变换 (1.163) 或等价的

$$\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{r} - \left(\frac{2\mu}{1+\mu^2}\right)\frac{1}{\sin\Omega}\left[\cos\left(\theta - \frac{\Omega}{2}\right)\frac{\boldsymbol{r}_u}{a} + \cos\left(\theta + \frac{\Omega}{2}\right)\frac{\boldsymbol{r}_v}{b}\right] \tag{1.187}$$

应用到最简单的 (退化) Bianchi 曲面. 第一个应用是 Bianchi 给出的, 他以双曲抛物面

$$z = \frac{1}{2}(x^2 - y^2) \tag{1.188}$$

作为种子曲面. 在渐近坐标下, 对应的位置向量是

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}}(u+v), \quad y = \frac{1}{\sqrt{2}}(u-v), \quad z = uv, \tag{1.189}$$

而 Gauss 曲率

$$\mathcal{K} = -\frac{1}{(u^2+v^2+1)^2} \tag{1.190}$$

恰为我们所需要的形式. 容易验证, 方程组 (1.177) 的一个特解给出了第二个曲面 Σ' 的位置

$$\begin{gathered} x' = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(3u - v\frac{1-3u^2}{1+u^2}\right), \quad y' = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(3u + v\frac{1-3u^2}{1+u^2}\right), \\ z' = \frac{uv}{\sqrt{2}}\left(\frac{3-u^2}{1+u^2}\right). \end{gathered} \tag{1.191}$$

这个曲面的一部分如图 1.8 所示.

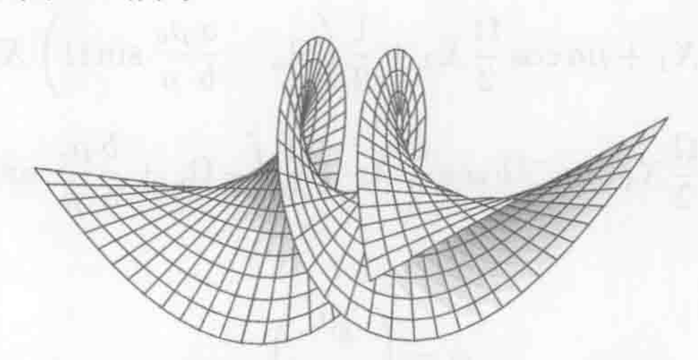


图 1.8 双曲抛物面产生的一个 Bianchi 曲面

在 Bianchi 变换的第二个应用中, 取一个退化种子曲面, 它的坐标曲线互相平行, 即 $\omega = 0$. 这时可取

$$\Omega = \pi, \quad a = \alpha(\rho)\rho_u, \quad b = \beta(\rho)\rho_v, \tag{1.192}$$

Gauss-Mainardi-Codazzi 方程组成为

$$\alpha_\rho + \frac{1}{2}\frac{\alpha}{\rho} - \frac{1}{2}\frac{\beta}{\rho} = 0, \quad \beta_\rho + \frac{1}{2}\frac{\beta}{\rho} - \frac{1}{2}\frac{\alpha}{\rho} = 0, \tag{1.193}$$

它的通解为

$$\alpha = c_1 + \frac{c_2}{\rho}, \quad \beta = c_1 - \frac{c_2}{\rho}. \tag{1.194}$$

由 Frobenius 系统 (1.177) 得

$$\begin{aligned} \frac{\theta_u}{\sin\theta} &= -\left(c_1 + \frac{c_2}{\rho}\right)\rho_u \tan\frac{\sigma}{2}, \\ \frac{\theta_v}{\sin\theta} &= -\left(c_1 - \frac{c_2}{\rho}\right)\rho_v \cot\frac{\sigma}{2}, \end{aligned} \tag{1.195}$$

再考虑到 (1.178) 式, 有

$$\tan\frac{\theta}{2} = \exp\gamma, \qquad \gamma = c_2\sigma - c_1\rho\sin\sigma + c_3, \tag{1.196}$$

因此

$$\sin\theta = \frac{1}{\cosh\gamma}, \quad \cos\theta = -\tanh\gamma. \tag{1.197}$$

另一方面, 求解 Gauss-Weingarten 方程组 (1.156) 得到

$$\boldsymbol{V} = \begin{pmatrix} \cos\delta \\ \sin\delta \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{W} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{N} = \begin{pmatrix} \sin\delta \\ -\cos\delta \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{1.198}$$

其中 $\delta = c_1\rho\cos\sigma + c_2\ln\rho$, 进而得到退化种子曲面 Σ 的位置向量

$$\boldsymbol{r} = \left(\frac{1}{2}c_1\rho^2 + c_2\rho\cos\sigma\right)\boldsymbol{W}. \tag{1.199}$$

记

$$\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{r} + \rho\sin\sigma(\sin\theta\,\boldsymbol{V} - \cos\theta\,\boldsymbol{W}) \tag{1.200}$$

为第二个曲面 Σ' 的位置向量, 那么

$$\boldsymbol{r}' = \begin{pmatrix} \rho\dfrac{\sin\sigma}{\cosh\gamma}\cos\delta \\ \rho\dfrac{\sin\sigma}{\cosh\gamma}\sin\delta \\ \cdots \end{pmatrix}. \tag{1.201}$$

在 $c_2 = 0$ 时, 位置向量 r' 关于 σ 是周期的. 这类曲面中一个典型的例子见图 1.9, 其中坐标曲线是 $\rho =$ 常数 和 $\sigma =$ 常数.

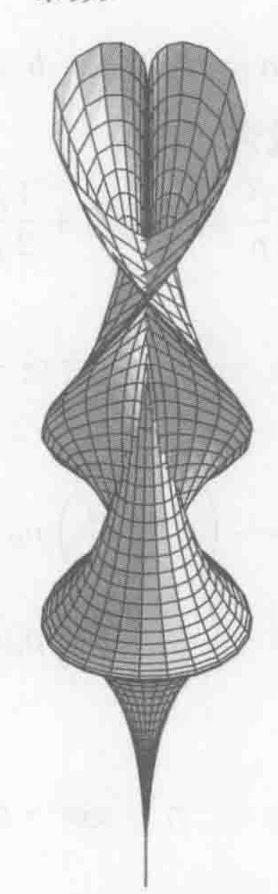


图 1.9 $c_2 = c_3 = 0$ 时的 Bianchi 曲面

文献 [290] 构造了单孤立子 Bianchi 曲面并作出了它的图像.

练 习

1. (a) 导出曲面球表示的第一基本形式

$$\mathrm{d}\boldsymbol{N}^2 = \mathcal{E}\,\mathrm{d}u^2 + 2\mathcal{F}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v + \mathcal{G}\,\mathrm{d}v^2,$$

其中

$$\mathcal{E} = H^{-2}(e^2G - 2efF + f^2E),$$

$$\mathcal{F} = H^{-2}(efG - (eg + f^2)F + fgE),$$

$$\mathcal{G} = H^{-2}(f^2G - 2fgF + g^2E).$$

(b) 证明在渐近坐标下单位法向量 $\boldsymbol{N}$ 满足双曲型方程

$$\boldsymbol{N}_{uv} + \frac{1}{2}\frac{\rho_v}{\rho}\boldsymbol{N}_u + \frac{1}{2}\frac{\rho_u}{\rho}\boldsymbol{N}_v + \mathcal{F}\boldsymbol{N} = 0.$$

(c) 证明连接单位球面

上北极与 (x,y) 平面上用 $\varepsilon = x_0 + \mathrm{i}y_0$ 表示的一点的线段与球面的交点为

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z-1 \end{pmatrix} = \frac{1}{|\varepsilon|^2+1}\begin{pmatrix} \varepsilon+\bar{\varepsilon} \\ -\mathrm{i}(\varepsilon-\bar{\varepsilon}) \\ |\varepsilon|^2-1 \end{pmatrix}.$$

于是, 法向量 $\boldsymbol{N}$ 的参数化 $(1.142)_2$ 表示单位球到复平面的球极投影.

2.(a) 证明在渐近坐标下向量

$$\frac{\boldsymbol{r}_u}{a} \pm \frac{\boldsymbol{r}_v}{b}, \quad \frac{\boldsymbol{N}_u}{a} \pm \frac{\boldsymbol{N}_v}{b}$$

与曲率线相切.

(b) 导出标准正交向量组 $\{\boldsymbol{V}, \boldsymbol{W}, \boldsymbol{N}\}$ 满足的线性方程组 (1.156).

3.(a) 证明在变换

$$\theta = 2\arctan y$$

下, 非线性方程

$$\dot{\theta} = f(t) + g(t)\sin\theta + h(t)\cos\theta$$

变为*Riccati* 方程

$$\dot{y} = \tfrac{1}{2}f(t)(1+y^2) + g(t)y + \tfrac{1}{2}h(t)(1-y^2).$$

(b) 证明上述 Riccati 方程的通解为

$$y = \frac{\phi^1}{\phi^2},$$

其中 $\phi = (\phi^1\ \phi^2)^{\mathrm{T}}$ 是线性方程组

$$\dot{\phi} = [g(t)X_1 + h(t)X_2 + f(t)X_3]\phi$$

的通解, 而矩阵 X_i 由 (1.186) 式所定义.

4. (a) 证明对于双曲抛物面 (1.189), 方程组 (1.177) 的解是

$$\tan\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\omega}{4}\right) = \frac{\sqrt{u^2+v^2+1}}{u(c\sqrt{v^2+1}-v)},$$

其中

$$\mu = \frac{\sqrt{v^2+1}}{u}.$$

第 2 章　曲线和曲面的运动及其同孤立子的联系

对于孤立子理论与不可伸长曲线的运动的几何联系，最早的工作是 Da Rios 在 1906 年对无界理想流体中孤立涡丝的空间运动的研究[97]. 在帕多瓦大学, Da Rios 在 Levi-Civita 指导下, 利用现在所称的局部归纳近似方法得到了涡丝的曲率和挠率随时间发展所满足的一组耦合非线性方程组. Levi-Civita 意识到这项工作的重要性, 将其收入 1932 年出版的综述[235] 中并作了推广. 但是, 直到 1965 年 Da Rios 方程组才被 Betchov[30] 重新发现. 1972 年, 基于 Betchov 早期的几何研究和 Kambe 与 Takao[189] 关于变形涡圈的实验工作, Hasimoto[162] 发现可以从 Da Rios 方程组得到孤立子理论中著名的 NLS 方程.

1977 年, Lamb[224] 发现了某些曲线的空间运动与 sine-Gordon 方程、变形 Korteweg-de Vries 方程以及非线性 Schrödinger 方程的联系. Lakshmanan 等[222] 用曲线的空间运动导出了 Heisenberg 自旋方程. 最近, Doliwa 和 Santini[112] 研究了常曲率空间中不可伸长曲线的运动与孤立子系统的联系, 他们的文章中有大量有关可积运动的文献.

对沿曲面的三元正交标架的研究可追溯到 Lamé[226]. Weingarten, Bianchi 和 Darboux 建立了一组非线性方程组来描述一族伪球曲面上的三元正交标架 (见 Eisenhart 的书[118]). 这个 Weingarten 方程组可以用曲率线坐标下伪球曲面的法向运动得到, 它的自 Bäcklund 变换由 sine-Gordon 方程的经典 Bäcklund 变换直接导出. 最近发现, 描述曲面上三元正交标架的经典 Lamé 方程组可用反散射方法求解[391]. 于是, 1840 年建立的 Lamé 方程组应该是经典微分几何中发现的最早的孤立子系统, 并且 Darboux 已经知道 Lamé 方程组存在 Bäcklund 变换这一可积性的典型特征.

本章主要讨论曲线和曲面的运动同现代孤立子理论的联系.

2.1　常挠率和常曲率曲线的运动以及同 sine-Gordon 方程的联系

在 Hasimoto 开创性的文章以及后来 Lamb[224] 的研究中, 孤立子曲线的运动是用同时依赖于曲率和挠率的复杂变量来讨论的. 现在, 我们可以利用标准正交标架 $\{\boldsymbol{t}, \boldsymbol{n}, \boldsymbol{b}\}$ 容易地做到这一点. 本节中, 通过常挠率的不可伸长曲线的运动导出

sine-Gordon 方程, 而此曲线的运动扫出一个伪球曲面.

设 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s,t)$ 是一条在空间中运动的曲线 C 的位置向量, 那么它的单位切向量、主法向量和从法向量满足著名的 Serret-Frenet 关系

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{t}_s &= \kappa \boldsymbol{n},\\
\boldsymbol{n}_s &= \tau \boldsymbol{b}-\kappa \boldsymbol{t},\\
\boldsymbol{b}_s &= -\tau \boldsymbol{n},
\end{aligned}
\tag{2.1}
$$

其中 s 是 C 上的弧长, κ 是曲率, τ 是挠率. 在考虑运动曲线时, 时间 t 作为参数出现在方程组 (2.1) 中.

最广泛的保持 $\{\boldsymbol{t},\boldsymbol{n},\boldsymbol{b}\}$ 标准正交的空间演化方程为

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{t}_t &= \alpha \boldsymbol{n}+\beta \boldsymbol{b},\\
\boldsymbol{n}_t &= -\alpha \boldsymbol{t}+\gamma \boldsymbol{b},\\
\boldsymbol{b}_t &= -\beta \boldsymbol{t}-\gamma \boldsymbol{n}.
\end{aligned}
\tag{2.2}
$$

这里, 对弧长参数的导数和对时间的导数必须可交换, 这意味着 C 不可伸长. 因此, 由 (2.1) 式和 (2.2) 式的相容性条件 $\boldsymbol{t}_{st}=\boldsymbol{t}_{ts}$ 等得到

$$
\begin{aligned}
\alpha_s &= \kappa_t+\beta\tau,\\
\beta_s &= \kappa\gamma-\tau\alpha,\\
\gamma_s &= \tau_t-\kappa\beta.
\end{aligned}
\tag{2.3}
$$

2.1.1 常挠率不可伸长曲线的运动

由 (2.3) 式得到

$$
(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)_s = 2(\alpha\kappa_t+\gamma\tau_t). \tag{2.4}
$$

特别当 $\alpha=0$, $\tau_t=0$ 时, $\beta^2+\gamma^2=\delta^2(t)$. 可以设

$$
\beta=\delta(t)\sin\sigma,\quad \gamma=\delta(t)\cos\sigma,
$$

从而相容性条件 (2.3) 式成为

$$
\sigma_{st} = -\delta(t)\tau(s)\sin\sigma, \tag{2.5}
$$

其中

$$
\kappa=\sigma_s. \tag{2.6}
$$

如果取 $\tau=1/\rho=\tau_0$, $\delta=-1/\rho$, 那么 (2.5) 式在对应 $\{\sigma,s,t\}\leftrightarrow\{\omega,u,v\}$ 下就成为

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{t} \\ \boldsymbol{n} \\ \boldsymbol{b} \end{pmatrix}_s = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_s & 0 \\ -\sigma_s & 0 & 1/\rho \\ 0 & -1/\rho & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{t} \\ \boldsymbol{n} \\ \boldsymbol{b} \end{pmatrix}, \tag{2.7}$$

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{t} \\ \boldsymbol{n} \\ \boldsymbol{b} \end{pmatrix}_t = \begin{pmatrix} 0 & 0 & (-1/\rho)\sin\sigma \\ 0 & 0 & (-1/\rho)\cos\sigma \\ (1/\rho)\sin\sigma & (1/\rho)\cos\sigma & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{t} \\ \boldsymbol{n} \\ \boldsymbol{b} \end{pmatrix}. \tag{2.8}$$

这个方程组的相容性条件就是 sine-Gordon 方程.

用几何语言来说, 具有常挠率和曲率 $\kappa = \omega_u$ 的曲线的运动与 sine-Gordon 方程 (1.25) 相联系. 一个自然的问题是, 这里用曲线运动导出 sine-Gordon 方程的过程与经典的用伪球曲面导出 sine-Gordon 方程的过程之间是否有联系. 事实上, 比较两个线性表示 (1.29) 和 (2.7)、(2.8), 我们可以明显看到这两个方程组在对应

$$\{\omega, u, v\} \leftrightarrow \{-\sigma, s, t\}, \quad \{\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}\} \leftrightarrow \{\boldsymbol{t}, \boldsymbol{n}, \boldsymbol{b}\}. \tag{2.9}$$

下是等价的.[1] 于是, 与 sine-Gordon 方程相联系的常挠率曲线在运动时扫出一个伪球曲面, 而且在任一时刻该曲线是曲面上的一条渐近曲线. 这和经典的 Beltrami-Enneper 定理是一致的, 该定理说, Gauss 曲率为 $-1/\rho^2$ 的双曲曲面上渐近线的挠率大小是 $1/\rho$[352].

对应 (2.9) 使得我们能够得到一个 Lamb 表示下常挠率曲线的运动速度 $\boldsymbol{r}_t$ 的表达式. 由 $(1.28)_2$ 式,

$$\boldsymbol{r}_v = \cos\omega\boldsymbol{A} + \sin\omega\boldsymbol{B},$$

因此速度

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{r}_t = \cos\sigma\,\boldsymbol{t} - \sin\sigma\,\boldsymbol{n}. \tag{2.10}$$

对应于 sine-Gordon 方程一个特解的运动的常挠率曲线可以通过该解对应的伪球曲面来得到. 取渐近坐标下伪球曲面的位置向量, 则一条参数曲线随另一个参数的演化即为所求. 对于双孤立子解, 我们就得到具有两个圈的曲线, 当时间演化时, 这两个圈沿着曲线相互作用, 最后相互通过对方而保持形状不变, 只是由于有非线性作用而伴随一个位置的相移.

2.1.2 常曲率不可伸长曲线的运动

我们考虑 (2.4) 式的另一个特殊情形: $\gamma = 0$, $\kappa_t = 0$. 这时方程组 (2.3) 有解

$$\begin{gathered}\alpha=-\frac{\cos\sigma}{\rho},\quad \beta=\frac{\sin\sigma}{\rho},\\ \kappa=\frac{1}{\rho},\quad \tau=\sigma_s,\end{gathered}\tag{2.11}$$

其中 σ 是 sine-Gordon 方程

$$\sigma_{st}=\frac{1}{\rho^2}\sin\sigma\tag{2.12}$$

的一个解. 相容性条件 (2.12) 所对应的线性表示是

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{t}\\ \boldsymbol{n}\\ \boldsymbol{b}\end{pmatrix}_s=\begin{pmatrix}0 & 1/\rho & 0\\ -1/\rho & 0 & \sigma_s\\ 0 & -\sigma_s & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{t}\\ \boldsymbol{n}\\ \boldsymbol{b}\end{pmatrix},\tag{2.13}$$

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{t}\\ \boldsymbol{n}\\ \boldsymbol{b}\end{pmatrix}_t=\begin{pmatrix}0 & (-1/\rho)\cos\sigma & (1/\rho)\sin\sigma\\ (1/\rho)\cos\sigma & 0 & 0\\ (-1/\rho)\sin\sigma & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{t}\\ \boldsymbol{n}\\ \boldsymbol{b}\end{pmatrix}.\tag{2.14}$$

这个方程组可以通过

$$\{\omega,u,v\}\leftrightarrow\{\sigma,s,t\},\quad \{\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}\}\leftrightarrow\{\boldsymbol{b},\boldsymbol{n},-\boldsymbol{t}\}\tag{2.15}$$

对应于线性表示 (1.29). 但是, 这里 $\boldsymbol{t}\cdot\boldsymbol{N}=\boldsymbol{t}\cdot\boldsymbol{C}=-1\neq 0$, 因此运动的常曲率曲线并不落在相应的伪球曲面上, 从而也不扫出该伪球曲面.

2.2 sine-Gordon 方程的一个 2×2 线性表示

我们已经知道 sine-Gordon 方程可以通过伪球曲面的 Gauss-Weingarten 方程组所生成的 3×3 线性方程组 (1.29) 得到, 或者通过描述常挠率曲线上正交标架 $\{\boldsymbol{t},\boldsymbol{n},\boldsymbol{b}\}$ 演化的 3×3 线性方程组 (2.7)、(2.8) 得到. 这两种表示是等价的.

另一方面, sine-Gordon 方程也可以从一个 2×2 线性方程组的相容性条件得到. Loewner[238] 于 1952 年将无穷小 Bäcklund 变换应用在气体动力学中的速端曲线方程时, 已隐含了这样一个线性表示. 当代对 Loewner 工作的重新解释发现了它同孤立子理论的紧密联系[210, 211].

1973 年, Ablowitz 等[1] 引入了标准的 2×2 AKNS 线性系统, 它包含了经典 sine-Gordon 方程的表示. 这个 2×2 线性表示通过标准正交标架 $\{\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}\}$ 同 3×3 线性表示 (1.29) 相联系, 同时又与渐近坐标下伪球曲面的 Gauss-Weingarten 方程

我们注意到, 方程组 (1.29) 等价于

$$\begin{aligned}\Psi_u &= S\Psi,\\ \Psi_v &= T\Psi,\end{aligned} \tag{2.16}$$

其中

$$S=\begin{pmatrix}0 & -\omega_u & 0\\ \omega_u & 0 & 1/\rho\\ 0 & -1/\rho & 0\end{pmatrix},$$
$$T=\begin{pmatrix}0 & 0 & (1/\rho)\sin\omega\\ 0 & 0 & (-1/\rho)\cos\omega\\ (-1/\rho)\sin\omega & (1/\rho)\cos\omega & 0\end{pmatrix}, \tag{2.17}$$

$$\Psi=\begin{pmatrix}A_1 & A_2 & A_3\\ B_1 & B_2 & B_3\\ C_1 & C_2 & C_3\end{pmatrix}, \tag{2.18}$$

而其矩阵元 A_i, B_i, C_i 是单位向量 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$ 的分量. 由 $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C})$ 构成右手系的标准正交基得到矩阵 Ψ 既是特殊的 (即 $\det\Psi = 1$), 又是正交的 (即 $\Psi^{\mathrm{T}}\Psi = \mathbb{1}$). 满足这些条件的矩阵全体在乘法下构成一个 Lie 群 $SO(3)$ (特殊正交群), 它是三维欧氏空间中旋转群的一个表示[343].

线性方程组 (2.16) 的相容性条件是

$$S_v - T_u + [S,T] = 0, \tag{2.19}$$

这里 $[S,T] = ST - TS$ 表示 S 和 T 的交换子. 将 (2.17) 式中的 S 和 T 代入条件 (2.19) 就得到 sine-Gordon 方程 (1.25).

与一个 Lie 群相对应有一个 Lie 代数, 它是向量空间 V 并带有 Lie 括号运算 $[\cdot,\cdot] : V\times V \to V$, 该运算满足双线性、反对称性和 Jacobi 恒等式

$$[a,[b,c]] + [b,[c,a]] + [c,[a,b]] = 0, \quad \forall\, a,b,c \in V. \tag{2.20}$$

$SO(3)$ 的 Lie 代数可以看作为一个以 $\{L_1, L_2, L_3\}$ 为基的实向量空间, 这里

$$L_1=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix},\quad L_2=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 0\end{pmatrix},\quad L_3=\begin{pmatrix}0 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}, \tag{2.21}$$

而 Lie 括号运算为矩阵的交换子. 矩阵 L_i 满足交换关系

这些交换关系完全刻画了 $SO(3)$ 的 Lie 代数 $so(3)$. 现在, $S,T \in so(3)$, 且

$$S = \omega_u L_3 - \frac{1}{\rho} L_1, \tag{2.23}$$

$$T = \frac{1}{\rho}\cos\omega\, L_1 + \frac{1}{\rho}\sin\omega\, L_2. \tag{2.24}$$

下面讨论 $\{\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}\}$ 的 3×3 线性表示与 2×2 AKNS 线性表示之间的关系. $so(3)$ 可用 Pauli 矩阵

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{2.25}$$

表示为 2×2 的形式. 矩阵 σ_i, $i=1,2,3$ 满足交换关系

$$[\sigma_1,\sigma_2] = 2\mathrm{i}\sigma_3, \quad [\sigma_2,\sigma_3] = 2\mathrm{i}\sigma_1, \quad [\sigma_3,\sigma_1] = 2\mathrm{i}\sigma_2. \tag{2.26}$$

同交换关系 (2.22) 相比较可知, 由

$$e_k = \frac{\sigma_k}{2\mathrm{i}} \tag{2.27}$$

所定义的 $\{e_1,e_2,e_3\}$ 生成的 Lie 代数与 $\{L_1,L_2,L_3\}$ 生成的 Lie 代数在对应 $e_k \leftrightarrow L_k$ 下同构. 于是, 我们可以从 sine-Gordon 方程 (1.25) 的 3×3 线性表示出发构造它的 2×2 线性表示. 设 $S = s_1L_1 + s_2L_2 + s_3L_3$, $T = t_1L_1 + t_2L_2 + t_3L_3$ 为 $so(3)$ 中的元素, 并满足相容性条件 (2.19), 那么矩阵

$$P = s_1e_1 + s_2e_2 + s_3e_3, \quad Q = t_1e_1 + t_2e_2 + t_3e_3$$

满足

$$P_v - Q_u + [P,Q] = 0. \tag{2.28}$$

所以, sine-Gordon 方程 (1.25) 可以作为 2×2 线性表示

$$\begin{aligned} \Phi_u &= P\Phi, \\ \Phi_v &= Q\Phi \end{aligned} \tag{2.29}$$

的相容性条件, 其中

$$P = \omega_u e_3 - \frac{1}{\rho}e_1 = \frac{\mathrm{i}}{2}\begin{pmatrix} -\omega_u & 1/\rho \\ 1/\rho & \omega_u \end{pmatrix}, \tag{2.30}$$

引入规范变换 $\tilde{\Phi} = G\Phi$, 这里

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \mathrm{i} & -\mathrm{i} \end{pmatrix},$$

则由 (2.29) 式和 (2.30) 式决定的线性表示规范等价于方程组

$$\tilde{\Phi}_u = GPG^{-1}\tilde{\Phi} = \begin{pmatrix} \mathrm{i}/2\rho & -\omega_u/2 \\ \omega_u/2 & -\mathrm{i}/2\rho \end{pmatrix}\tilde{\Phi},$$

$$\tilde{\Phi}_v = GQG^{-1}\tilde{\Phi} = -\frac{\mathrm{i}}{2\rho}\begin{pmatrix} \cos\omega & \sin\omega \\ \sin\omega & -\cos\omega \end{pmatrix}\tilde{\Phi}.$$

利用方程 (1.25) 在变换

$$\tilde{\omega} = -\omega, \quad \tilde{u} = \frac{u}{\lambda}, \quad \tilde{v} = \lambda v \tag{2.31}$$

下的不变性, 在上面的方程组中引入实 "谱参数", 从而得到标准的 sine-Gordon 方程 (1.25) 的 2×2 AKNS 线性表示

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}_{\tilde{u}} &= \frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix} 0 & \tilde{\omega}_{\tilde{u}} \\ -\tilde{\omega}_{\tilde{u}} & 0 \end{pmatrix} + \mathrm{i}\frac{\lambda}{\rho}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right]\tilde{\Phi}, \\ \tilde{\Phi}_{\tilde{v}} &= \frac{\mathrm{i}}{2\lambda\rho}\begin{pmatrix} -\cos\tilde{\omega} & \sin\tilde{\omega} \\ \sin\tilde{\omega} & \cos\tilde{\omega} \end{pmatrix}\tilde{\Phi}. \end{aligned} \tag{2.32}$$

2.3 伪球曲面的运动, Weingarten 方程组及其 Bäcklund 变换

我们已经建立了 sine-Gordon 方程与静态伪球曲面的几何之间的联系, 或者说与这些曲面上常挠率曲线的运动之间的联系. 本节中, 我们要讨论伪球曲面的某些运动, 其中一类运动产生非简谐格点模型的连续极限, 并可约化到变形 Korteweg-de Vries 方程 (参见文献 [257]), 另一类运动产生一个经典系统, 它对应于描述三元正交曲面的 Lamé 方程的特殊情形[118]. 这种考虑曲面运动的方式自然导致相容可积系统的概念.

考虑渐近坐标 u, v 下伪球曲面 $\Sigma : \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v, t)$ 的运动. 在任一时刻 t, 全曲率 $\mathcal{K} = \mathcal{K}(t)$ 在 Σ 上为负常数. 按 (1.28) 式引入标准正交基 $\{\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}\}$, 从而 Gauss-Weingarten 方程组由 (1.29) 式给出, 不过现在 $\rho = \rho(t)$, $\omega = \omega(u, v, t)$. 保持

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} \end{pmatrix}_t = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} \end{pmatrix}, \tag{2.33}$$

其中 a, b, c 是 u, v, t 的实函数. 以时间 t 为参数的线性方程组 (1.29) 包含了以下的信息: 曲面 Σ 是伪球曲面, 并且以渐近曲线的弧长为参数. 为了构造保持这些性质的时间演化, (2.33) 式必须与方程组 (1.29) 相容, 从而必须有相容性条件 $\boldsymbol{A}_{ut} = \boldsymbol{A}_{tu}$, $\boldsymbol{A}_{vt} = \boldsymbol{A}_{tv}$ 等, 这给出了关于 a, b, c 的线性非齐次方程组

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}_u = \begin{pmatrix} 0 & 1/\rho & 0 \\ -1/\rho & 0 & -\omega_u \\ 0 & \omega_u & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\omega_u \\ 0 \\ 1/\rho \end{pmatrix}_t, \tag{2.34}$$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}_v = \begin{pmatrix} 0 & -(1/\rho)\cos\omega & -(1/\rho)\sin\omega \\ (1/\rho)\cos\omega & 0 & 0 \\ (1/\rho)\sin\omega & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ (1/\rho)\sin\omega \\ -(1/\rho)\cos\omega \end{pmatrix}_t. \tag{2.35}$$

在 sine-Gordon 方程 (1.25) 成立时这个方程组是相容的.

至此, 曲面 Σ 的演化是用标架场 $\{\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}\}$ 的演化来表示的. 下面将看到, 考虑 Σ 的速度 $\boldsymbol{r}_t$ 是一种简便的方法. 设 $\boldsymbol{r}_t$ 在标准正交标架 $\{\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}\}$ 下的表示为

$$\boldsymbol{r}_t = l\boldsymbol{A} + m\boldsymbol{B} + n\boldsymbol{C}, \tag{2.36}$$

则

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A}_t &= \boldsymbol{r}_{ut} = \boldsymbol{r}_{tu} = (l\boldsymbol{A} + m\boldsymbol{B} + n\boldsymbol{C})_u \\ &= (l_u + m\omega_u)\boldsymbol{A} + (-l\omega_u + m_u - n/\rho)\boldsymbol{B} + (m/\rho + n_u)\boldsymbol{C}, \\ \boldsymbol{B}_t &= [\omega_t - n/\rho - (l_u + m\omega_u)\cot\omega + l_v \operatorname{cosec}\omega]\boldsymbol{A} \\ &\quad + [(-\omega_t + l\omega_u - m_u + 2n/\rho)\cot\omega + m_v \operatorname{cosec}\omega]\boldsymbol{B} \\ &\quad + [l/\rho - (n_u + 2m/\rho)\cot\omega + n_v \operatorname{cosec}\omega]\boldsymbol{C}, \end{aligned}$$

而 $\boldsymbol{C}_t = \boldsymbol{A}_t \times \boldsymbol{B} + \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}_t$. $\{\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}\}$ 保持标准正交的要求给出

$$l_u + m\omega_u = 0, \tag{2.37}$$

$$\omega_t - l\omega_u + m_u - 2n/\rho - m_v \sec\omega = 0, \tag{2.38}$$

这时,

$$a=-l\omega_u+m_u-n/\rho, \tag{2.40}$$

$$b=n_u+m/\rho, \tag{2.41}$$

$$c=-(n_u+2m/\rho)\cot\omega+l/\rho+n_v\operatorname{cosec}\omega. \tag{2.42}$$

将约束条件 (2.37)–(2.39) 重新组合后得到 l 满足的方程

$$l_{uv}=l_v\omega_u\cot\omega+l_u\frac{\sin\omega}{\rho^2\omega_u}, \tag{2.43}$$

而 m 和 n 分别由

$$m=-l_u/\omega_u, \tag{2.44}$$

$$n=\frac{\rho}{2}(\omega_t-l\omega_u+m_u-m_v\sec\omega) \tag{2.45}$$

决定.

将 (2.40)–(2.42) 式决定的 $\{a,b,c\}$ 代入 (2.34) 式和 (2.35) 式得到运动满足的其他约束, 它们是

$$n_{uu}=(n_u\cot\omega-n_v\operatorname{cosec}\omega)\omega_u+\frac{n}{\rho^2}+\frac{2}{\rho}(m\omega_u\cot\omega-m_u), \tag{2.46}$$

$$n_{vv}=(n_v\cot\omega-n_u\operatorname{cosec}\omega)\omega_v+\frac{n}{\rho^2}+\frac{2\sec\omega}{\rho}(m_v-m\omega_v\cot\omega), \tag{2.47}$$

$$n_{uv}=\frac{n}{\rho^2}\cos\omega+\left(\frac{1}{\rho}\right)_t\sin\omega. \tag{2.48}$$

于是, 为使 (2.36) 式表示一个合理的演化, 方程组 (2.43)–(2.48) 必须有解.

如果 $\{a,b,c\}$ 已知, 也就是标架 $\{\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}\}$ 的运动已知, 那么 (2.40)–(2.42) 式给出了决定 $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{r}_t$ 的 $\{l,m,n\}$ 满足的线性非齐次方程组. 例如, 有一类解满足 $\dot\rho=0$,

$$\{a,b,c\}=\{\zeta(t)\rho\,\omega_u,\ \delta(t)\sin\omega,\ -\zeta(t)-\delta(t)\cos\omega\} \tag{2.49}$$

以及附加的线性发展方程

$$\omega_t=\rho\ [\delta(t)\omega_v-\zeta(t)\omega_u], \tag{2.50}$$

这里, $\delta(t)$, $\zeta(t)$ 是 t 的任意函数. 与解 (2.49) 相容的运动由

$$\{l,m,n\}=\{\rho(\delta\cos\omega-\zeta),\ \rho\delta\sin\omega,\ 0\} \tag{2.51}$$

2.3.1 非简谐格点模型的连续极限

$\{l,m,n\}$ 另一个可能的运动由

$$\{l,m,n\} = \left\{\rho\left[\frac{\omega_u^2}{4} + \delta\cos\omega - \zeta\right], \rho\left[\delta\sin\omega - \frac{\omega_{uu}}{2}\right], \omega_u\right\} \tag{2.52}$$

决定, 其中

$$\begin{aligned} \omega_t &= \frac{\rho}{2}\omega_{uuu} + \frac{\rho}{4}\omega_u^3 + \left(\frac{3}{2\rho} - \rho\zeta\right)\omega_u + \delta\rho\omega_v, \\ \omega_{uv} &= \frac{1}{\rho^2}\sin\omega, \end{aligned} \tag{2.53}$$

$\delta = \delta(t), \zeta = \zeta(t)$ 是任意函数, $\dot{\rho} = 0$. 这时, Σ 的全曲率 $\mathcal{K}$ 在整个运动中保持常数. 将 (2.52) 式代入 (2.40)–(2.42) 式即得到 $\{a,b,c\}$. 由 (1.29) 式和时间演化 (2.33) 构成的方程组的相容性条件就是耦合非线性方程组 (2.53). 从中消去 ω_v 得到

$$\omega_{ut} = \frac{\rho}{2}\omega_{uuuu} + \frac{3}{4}\rho\omega_u^2\omega_{uu} + \left(\frac{3}{2\rho} - \rho\zeta\right)\omega_{uu} + \frac{\delta}{\rho}\sin\omega. \tag{2.54}$$

满足 $\delta \neq 0$ 和 $\zeta = 3/(2\rho^2)$ 的上述孤立子方程首先由 Konno 等[203] 作为非简谐格点中波的传播模型的连续极限得到.

(2.54) 式在 $\delta = 0, \zeta = 3/(2\rho^2)$ 的特殊情形导出关于 $\omega' = \omega_u$ 的变形 *Korteweg-de Vries 方程* (mKdV 方程)

$$\omega'_{t'} + \omega'_{u'u'u'} + 6\omega'^2\omega'_{u'} = 0, \tag{2.55}$$

其中 $u' = u/2, t' = -t, \rho = 16$. mKdV 方程在无碰撞等离子体内非线性 Alfvèn 波的研究中有重要应用[188], 而它同非简谐格点中声波传播之间的关系由 Zabusky[388] 所研究.

2.3.2 Weingarten 方程组

如果具有 Gauss 曲率 $\mathcal{K} = -1/\rho^2$ 的曲面 Σ 作纯法向运动, 并且允许它的 Gauss 曲率随时间变化, 则关系式 (2.37)–(2.39) 给出

$$\{l,m,n\} = \{0, 0, \rho\omega_t/2\}. \tag{2.56}$$

将它们代入 (2.46)–(2.48) 式就得到

$$\begin{aligned} \omega_{uut} &= \omega_u\omega_{ut}\cot\omega - \omega_u\omega_{vt}\operatorname{cosec}\omega + \frac{1}{\rho^2}\omega_t, \\ \omega_{vvt} &= \omega_v\omega_{vt}\cot\omega - \omega_v\omega_{ut}\operatorname{cosec}\omega + \frac{1}{\rho^2}\omega_t, \end{aligned} \tag{2.57}$$

于是, 对法向运动 (2.56), 有

$$\boldsymbol{r}_t = \rho\theta_t \boldsymbol{N} \quad (\theta = \omega/2), \tag{2.58}$$

并且在曲率线坐标 $x = u + v, y = u - v$ 下, (2.57) 式等价于

$$\boxed{\begin{gathered} \theta_{xyt} - \theta_x\theta_{yt}\cot\theta + \theta_y\theta_{xt}\tan\theta = 0, \\ \left(\frac{\theta_{xt}}{\cos\theta}\right)_x - \frac{1}{\rho}\left(\frac{1}{\rho}\sin\theta\right)_t - \frac{1}{\sin\theta}\theta_y\theta_{yt} = 0, \\ \left(\frac{\theta_{yt}}{\sin\theta}\right)_y + \frac{1}{\rho}\left(\frac{1}{\rho}\cos\theta\right)_t + \frac{1}{\cos\theta}\theta_x\theta_{xt} = 0, \\ \theta_{xx} - \theta_{yy} = \frac{1}{\rho^2}\sin\theta\cos\theta. \end{gathered}} \tag{2.59}$$

这个方程组出现在 Eisenhart 的书[119] 中, 它同一类特殊的三元正交曲面相联系, Weingarton (ρ 为常数时)、Darboux 和 Bianchi 曾作过很多研究. 特别是, Darboux 发现这个方程组的通解依赖于 5 个任意的单变量函数 (参见 [182]). 需要注意的是, 在方程组 (2.59) 中, $(2.59)_2$ 和 $(2.59)_3$ 两式中的任一个都是另一个以及 $(2.59)_4$ 式的结论, 从而 $(2.59)_2$ 式或 $(2.59)_3$ 式中的一个是多余的.

在上面讨论的运动中, 由于 Σ 作的是纯法向运动, 当 t 变化时, Σ 上的参数曲线扫过的曲面总和 Σ 正交. 但是, 曲面上的曲率线是互相正交的, 所以 x 参数曲线扫出的曲面同 y 参数曲线扫出的曲面也正交. 这两族曲面加上在任一时刻 t 的伪球曲面族, 就形成了曲面的三元正交系统. 我们将方程组 (2.59) 称为 Weingarten 方程组, 它描述了曲面的三元正交系统, 其中一族是伪球曲面. 下一小节中将导出 Weingarten 方程组的自 Bäcklund 变换, 利用它的形如 (1.63) 式的非线性叠加原理即可得到与 Weingarten 方程组 (2.59) 的多孤立子解相联系的三元正交系统.

2.3.3 Bäcklund 变换

对于运动伪球曲面 Σ 上任一点的位置向量, 对每一时刻 t 应用 Bäcklund 变换都可得到一个新的伪球曲面, 这里我们要求保持运动所必须满足的约束. 特别地, 对于 Weingarten 方程组和非简谐格点方程, 要构造保持运动所必须满足的约束的自 Bäcklund 变换. 这些自 Bäcklund 变换具有 (1.63) 形式的非线性叠加原理, 这可从 2×2 线性表示在适当的规范变换下的不变性导出.

对于 2×2 线性系统 (2.29), 其中 P 和 Q 由 (2.30) 式给出, 我们加上由 (2.33) 式表示的 2×2 时间演化. 考虑线性表示

$$\begin{aligned}\Phi_u &= P(\omega)\Phi,\\ \Phi_v &= Q(\omega)\Phi,\\ \Phi_t &= R(\omega)\Phi.\end{aligned} \tag{2.60}$$

由于

$$\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix} = -aL_3 + bL_2 - cL_1,$$

在对应 $e_k \leftrightarrow L_k$ 下,

$$R(\omega) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \mathrm{i}a & -b+\mathrm{i}c \\ b+\mathrm{i}c & -\mathrm{i}a \end{pmatrix}, \tag{2.61}$$

其中 $a = a(\omega)$, $b = b(\omega)$, $c = c(\omega)$.

在 (2.60) 式中引入规范变换 $\Phi' = H\Phi$, 则有

$$\begin{aligned}\Phi'_u &= P'\Phi',\\ \Phi'_v &= Q'\Phi',\\ \Phi'_t &= R'\Phi',\end{aligned} \tag{2.62}$$

其中

$$\begin{aligned}&P' = (H_u + HP)H^{-1}, \quad Q' = (H_v + HQ)H^{-1},\\ &R' = (H_t + HR)H^{-1}.\end{aligned} \tag{2.63}$$

现在可以在曲面 Σ 的 Bäcklund 变换 Σ' 上引入标准正交标架 $\{\boldsymbol{A}', \boldsymbol{B}', \boldsymbol{C}'\}$, 其中 $\boldsymbol{A}' = \boldsymbol{r}'_u$, $\boldsymbol{B}' = -\boldsymbol{A}' \times \boldsymbol{N}'$, $\boldsymbol{C}' = \boldsymbol{N}'$ 由 (1.38)、(1.39) 和 (1.41) 式给出. 如果 Ψ 是以 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$ 为行的矩阵, Ψ' 是相应带撇的矩阵, 那么由 (1.52) 式得

$$\Psi' = \Lambda\Psi, \tag{2.64}$$

其中变换矩阵

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1 - \dfrac{L}{\rho}\beta\sin^2\phi & \dfrac{L\beta}{\rho}\sin\phi\cos\phi & \dfrac{L}{\rho}\sin\phi \\ \dfrac{L}{\rho}\beta\sin\phi\cos\phi & 1 - \dfrac{L\beta}{\rho}\cos^2\phi & -\dfrac{L}{\rho}\cos\phi \\ -\dfrac{L}{\rho}\sin\phi & \dfrac{L}{\rho}\cos\phi & 1 - L\dfrac{\beta}{\rho} \end{pmatrix}, \tag{2.65}$$

$\phi = (\omega + \omega')/2$.

$$\Lambda^{\mathrm{T}}\Lambda = \mathbb{1}, \quad \det\Lambda = 1. \tag{2.66}$$

从几何观点来看, 这些关系来自于两个右手的标准正交标架通过一个旋转相联系这一事实.

利用附录 A 中给出的 $su(2)$ 与 $so(3)$ 的同构, 对应于 Λ 的 $SU(2)$ 变换为

$$H = (1+\beta^2)^{-1/2}\begin{pmatrix} 1 & -\mathrm{i}\beta e^{-\mathrm{i}\phi} \\ -\mathrm{i}\beta e^{\mathrm{i}\phi} & 1 \end{pmatrix}. \tag{2.67}$$

(2.67) 式中的 H 给出规范变换

$$\Phi' = H(\phi,\beta)\Phi, \tag{2.68}$$

它作用于 2×2 线性表示

$$\Phi_u = P(\omega)\Phi,$$
$$\Phi_v = Q(\omega)\Phi$$

上, 得到[2]

$$\Phi'_u = P(\omega')\Phi',$$
$$\Phi'_v = Q(\omega')\Phi'.$$

这个依赖于 β 的规范变换给出了第 7 章要讨论的矩阵 Darboux 变换的一个典型例子. 在非线性层面上, 它导出了 sine-Gordon 方程 (1.25) 的自 Bäcklund 变换 (1.47).

考虑到相关的时间演化 $(2.60)_3$, (2.67) 式中的 Bäcklund 参数 β 允许与 t 有关. 由 (2.67) 式及 (2.61) 式得到

$$\begin{aligned} R' &= H_t H^{-1} + HRH^{-1} = H_t H^{\dagger} + HRH^{\dagger} \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \mathrm{i}a' & -b'+\mathrm{i}c' \\ b'+\mathrm{i}c' & -\mathrm{i}a' \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{2.69}$$

其中 $H^{\dagger} = \bar{H}^{\mathrm{T}}$,

$$\begin{aligned} a' &= a - \frac{2\beta}{1+\beta^2}[\beta(a+\phi_t) + (b\cos\phi + c\sin\phi)], \\ b' &= b + \frac{2}{1+\beta^2}[\beta(a+\phi_t)\cos\phi + \dot{\beta}\sin\phi - \beta^2\cos\phi\,(b\cos\phi + c\sin\phi)], \\ c' &= c + \frac{2}{1+\beta^2}[\beta(a+\phi_t)\sin\phi - \dot{\beta}\cos\phi - \beta^2\sin\phi\,(b\cos\phi + c\sin\phi)]. \end{aligned} \tag{2.70}$$

对于与 sine-Gordon 方程相容的非线性方程, 将具体的 $\{a, b, c\}$ 代入 (2.70) 式就得到它们的自 Bäcklund 变换.

Weingarten 方程组

考虑 Weingarten 方程组 (2.57), 其中 $\{l, m, n\}$ 由 (2.56) 式给出. 由 (2.40)–(2.42) 式得到

$$\{a, b, c\} = \left\{-\frac{\omega_t}{2}, \frac{\rho}{2}\omega_{ut}, \frac{\rho}{2}(\omega_{vt}\operatorname{cosec}\omega - \omega_{ut}\cot\omega)\right\}. \tag{2.71}$$

当成立

$$R' = R(\omega') \tag{2.72}$$

时, 将 (2.71) 式代入 $(2.70)_1$ 式得到

$$\omega'_t = \frac{1+\beta^2}{1-\beta^2}\omega_t + \frac{2\rho\beta}{1-\beta^2}\operatorname{cosec}\omega\left[\omega_{vt}\sin\left(\frac{\omega'+\omega}{2}\right) - \omega_{ut}\sin\left(\frac{\omega'-\omega}{2}\right)\right]. \tag{2.73}$$

从这个关系、经典 Bäcklund 关系 (1.47) 以及 Weingarten 方程组 (2.57) 得出, $(2.70)_{2,3}$ 式在 β 满足

$$\frac{\dot\beta}{\beta} = \frac{\dot\rho}{\rho}\left(\frac{\beta^2+1}{\beta^2-1}\right) \tag{2.74}$$

时是成立的, 从而可解得

$$\beta(t) = k\rho(t)\left[1 \pm \sqrt{1 - 1/(k^2\rho^2(t))}\right], \tag{2.75}$$

k 是任意的积分常数, 这里取为非零常数. 需要注意的是, 使得 Gauss 曲率满足 $\mathcal{K} = -1/\rho^2(t) < 0$ 的任意时间演化的 Bäcklund 参数 $\beta(t)$ 所满足的 (2.75) 式同 (1.35) 式一致, 这里 $k = 1/L$.

容易验证经典 Bäcklund 关系 (1.47) 同关系式 (2.73) 在 Weingarten 方程组 (2.57) 满足时是相容的. 于是, Weingarten 方程组的自 Bäcklund 变换可如下构造.

定理 2 *Weingarten 方程组 (2.57) 在 Bäcklund 变换*

$$\begin{aligned}
\omega'_u &= \omega_u + \frac{2\beta}{\rho}\sin\left(\frac{\omega'+\omega}{2}\right),\\
\omega'_v &= -\omega_v + \frac{2}{\beta\rho}\sin\left(\frac{\omega'-\omega}{2}\right),\\
\omega'_t &= \frac{1+\beta^2}{1-\beta^2}\omega_t + \frac{2\rho\beta}{1-\beta^2}\operatorname{cosec}\omega\left[\omega_{vt}\sin\left(\frac{\omega'+\omega}{2}\right) - \omega_{ut}\sin\left(\frac{\omega'-\omega}{2}\right)\right]
\end{aligned} \tag{2.76}$$

下保持不变, 这里 $\mathcal{K} = -1/\rho^2(t)$, $\beta = \beta(t)$ 由 (2.75) 式给出.

非简谐格点方程组

对于 (2.53) 式, 记 $\zeta = 3/(2\rho^2)$, 则由 (2.40)–(2.42) 式得到

$$\{a, b, c\} = \left\{\frac{\omega_u}{\ } - \omega_t + \delta\rho\omega_v, \frac{\omega_{uu}}{\ } + \delta\sin\omega, \frac{\omega_u^2}{\ } - \frac{1}{\ } - \delta\cos\omega\right\}, \tag{2.77}$$

并且 $\dot{\rho}=0, \dot{\beta}=0$. 考虑条件 (2.72), 将 (2.77) 式代入 $(2.70)_1$ 式得

$$\begin{aligned}\omega'_t=&\omega_t+\frac{\beta^2}{\rho}\omega_u+\beta\omega_{uu}\cos\left(\frac{\omega'+\omega}{2}\right)+\left(\frac{\beta}{2}\omega_u^2+\frac{\beta^3}{\rho^2}\right)\sin\left(\frac{\omega'+\omega}{2}\right)\\&+\delta\left[-2\rho\omega_v+\frac{2}{\rho}\sin\left(\frac{\omega'-\omega}{2}\right)\right],\end{aligned}\tag{2.78}$$

这里 $\omega=\omega(u,v,t)$, $\omega'=\omega'(u,v,t)$, 当然还需要 Bäcklund 关系 (1.47). 于是我们可以验证下列结论.

定理 3 方程组

$$\begin{aligned}\omega_t&=\frac{\rho}{2}\omega_{uuu}+\frac{\rho}{4}\omega_u^3+\delta\rho\omega_v,\\\omega_{uv}&=\frac{1}{\rho^2}\sin\omega\end{aligned}\tag{2.79}$$

在 Bäcklund 变换

$$\begin{aligned}\omega'_u=&\omega_u+\frac{2\beta}{\rho}\sin\left(\frac{\omega'+\omega}{2}\right),\\\omega'_v=&-\omega_v+\frac{2}{\beta\rho}\sin\left(\frac{\omega'-\omega}{2}\right),\\\omega'_t=&\omega_t+\frac{\beta^2}{\rho}\omega_u+\beta\omega_{uu}\cos\left(\frac{\omega'+\omega}{2}\right)\\&+\left(\frac{\beta}{2}\omega_u^2+\frac{\beta^3}{\rho^2}\right)\sin\left(\frac{\omega'+\omega}{2}\right)+\delta\left[-2\rho\omega_v+\frac{2}{\rho}\sin\left(\frac{\omega'-\omega}{2}\right)\right]\end{aligned}\tag{2.80}$$

下保持不变, 这里 $\dot{\rho}=\dot{\beta}=0$.

注意到 Bäcklund 变换 (2.80) 的 "空间" 部分同由 (1.47) 式给出的经典 sine-Gordon 方程的 Bäcklund 变换 $\mathbb{B}_\beta$ 相同, 因此 $\mathbb{B}_\beta$ 的可换性定理 (1.63) 同时适用于方程组 (2.57) 和 (2.79). 事实上, 对于同经典 sine-Gordon 方程相容的任何可积系统, 也就是由伪球曲面的相容运动导出的可积系统, 这个非线性叠加原理都是成立的. 特别地, 如果全曲率 $\mathcal{K}=-1/\rho^2(t)$, 在将可换性定理应用于 Weingarten 方程组时, Bäcklund 参数 β_i 同时间的依赖关系为

$$\beta_i(t)=k_i\rho(t)\left[1\pm\sqrt{1-1/(k_i^2\rho^2(t))}\right].$$

Konno 和 Sanuki[204] 应用可换性定理 (1.63) 导出了方程 (2.54) 的扭结解和孤立子解. 图 2.1 显示了运动孤立子对静止孤立子的影响. 此时, 静止孤立子仍保持不动, 只是由于第二个脉冲的影响而产生了一个相移. 图 2.2 显示了两个振幅符号相反的运动孤立子的碰撞过程. 在 [167] 中有更多关于扭结–反扭结相互作用的详细介绍.

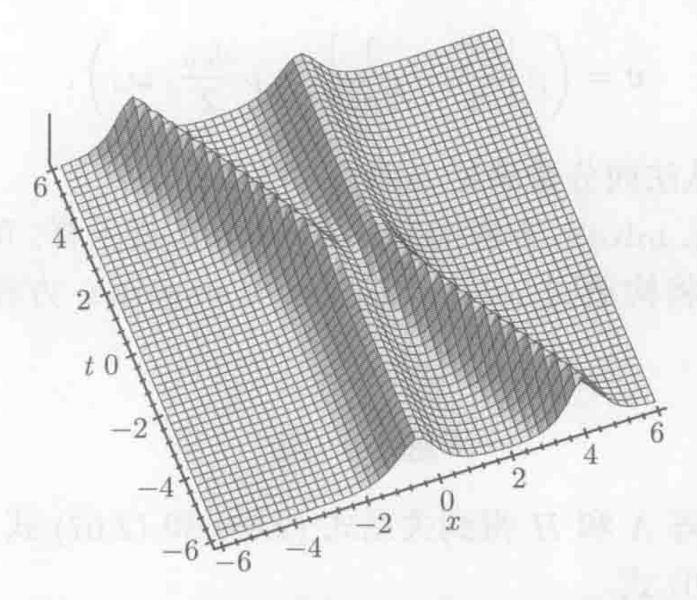


图 2.1 振幅符号相同的两个孤立子的碰撞

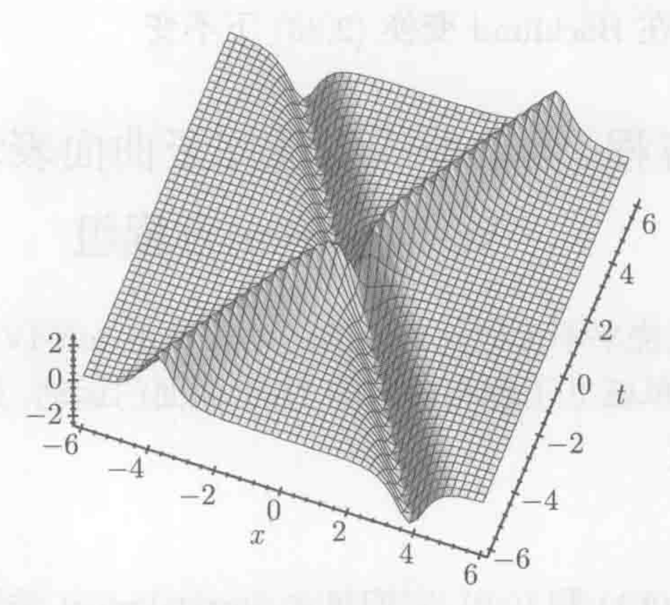


图 2.2 振幅符号相反的两个孤立子的碰撞

势 mKdV 方程

(2.80) 式取 $\delta = 0$ 时, 得到势 mKdV 方程

$$\omega_t = \frac{\rho}{2}\omega_{uuu} + \frac{\rho}{4}\omega_u^3 \tag{2.81}$$

的自 Bäcklund 变换 $(2.80)_{1,3}$, 从而得到 mKdV 方程 (2.55) 的自 Bäcklund 变换. mKdV 方程的多孤立子解已由 Hirota 和 Satsuma 用可换性定理得到[167]. 一类非线性格点通过长波连续近似与耦合的 mKdV-KdV 方程相联系, 它的 Bäcklund 变换和可换性定理由 Wadati 给出[374].

在 $\delta = 0$ 和 $\zeta = 3/(2\rho^2)$ 时的 (2.52) 式表明势 mKdV 方程可以和具有全曲率 $\mathcal{K} = -1/\rho^2$ 的伪球曲面 Σ 的运动相联系, 它的速度是

$$\boldsymbol{v} = \left(\rho\left[\frac{\omega_u^2}{4} - \frac{3}{2\rho^2}\right], -\rho\frac{\omega_{uu}}{2}, \omega_u\right). \tag{2.82}$$

注意到 Σ 的速度的从法向分量满足 mKdV 方程.

下一节将要看到, mKdV 方程同 sine-Gordon 方程一样, 可以由常挠率曲线适当的运动生成, 同时将构造同 mKdV 方程和 Weingarten 方程组相联系的孤立子曲面.

练　　习

1. (a) 分别对矩阵 Λ 和 H 得到关系式 (2.65) 和 (2.67) 式.
   (b) 证明 (2.70) 式.
2. 对于 Bäcklund 参数 $\beta(t)$ 导出 (2.75) 式.
3. 验证 (2.79) 式在 Bäcklund 变换 (2.80) 下不变.

2.4 mKdV 方程, 运动曲线与孤立子曲面表示以及孤立子 Weingarten 方程组

本节中, 将通过无挠率不可伸长曲线的运动来导出 mKdV 方程, 然后得到同势 mKdV 方程 (2.81) 的单孤立子解相联系的 Dini 曲面的运动, 最后构造孤立子三元正交 Weingarten 系统.

2.4.1 mKdV 方程

现在回到方程组 (2.1) 和 (2.2), 它们包含 Serret-Frenet 关系以及标准正交标架 $\{\boldsymbol{t}, \boldsymbol{n}, \boldsymbol{b}\}$ 的时间演化, 它们的相容性条件是方程组 (2.3).

如果运动曲线 C 的速度向量 $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{r}_t$ 有分解

$$\boldsymbol{v} = \lambda\boldsymbol{t} + \mu\boldsymbol{n} + \nu\boldsymbol{b}, \tag{2.83}$$

那么相容性条件 $\boldsymbol{r}_{ts} = \boldsymbol{r}_{st}$ 给出

$$\lambda_s\boldsymbol{t} + \lambda(\kappa\boldsymbol{n}) + \mu_s\boldsymbol{n} + \mu(\tau\boldsymbol{b} - \kappa\boldsymbol{t}) + \nu_s\boldsymbol{b} + \nu(-\tau\boldsymbol{n}) = \alpha\boldsymbol{n} + \beta\boldsymbol{b},$$

从而有

$$\begin{aligned} \lambda_s - \mu\kappa &= 0, \\ \lambda\kappa + \mu_s - \nu\tau &= \alpha, \\ \mu\tau + \nu_s &= \beta. \end{aligned} \tag{2.84}$$

曲线 C 的曲率 κ 和挠率 τ 的时间演化可以通过将 $(2.84)_{2,3}$ 式代入 $(2.3)_{1,3}$ 式而用速度分量 λ, μ, ν 来表示:

$$\kappa_t = (\lambda\kappa + \mu_s - \nu\tau)_s - (\mu\tau + \nu_s)\tau, \tag{2.85}$$

$$\tau_t = \gamma_s + (\mu\tau + \nu_s)\kappa, \tag{2.86}$$

其中

$$\gamma = \frac{1}{\kappa}[(\mu\tau + \nu_s)_s + \tau(\lambda\kappa + \mu_s - \nu\tau)]. \tag{2.87}$$

如果无挠率不可伸长曲线的运动满足 $\mu = -\kappa_s$, 那么 $(2.84)_1$ 式给出

$$\lambda = -\frac{\kappa^2}{2} + c_1(t), \tag{2.88}$$

其中 $c_1(t)$ 是任一函数. 因为 $\tau = 0$, 对于任意固定的 t, 曲线是平面曲线. 如果取 $c_1(t) = 0$, 那么由 $(2.84)_{2,3}$ 式和 (2.87) 式得到

$$\begin{aligned} \{\alpha, \beta, \gamma\} &= \left\{-\kappa_{ss} - \frac{\kappa^3}{2}, \nu_s, \frac{\nu_{ss}}{\kappa}\right\}, \\ \{\lambda, \mu, \nu\} &= \left\{-\frac{\kappa^2}{2}, -\kappa_s, \nu\right\}, \end{aligned} \tag{2.89}$$

而 (2.85) 式表明曲率 κ 按 mKdV 方程

$$\boxed{\kappa_t + \kappa_{sss} + \frac{3}{2}\kappa^2\kappa_s = 0} \tag{2.90}$$

演化.

剩下的关系式 (2.86) 给出速度的从法向分量满足的条件

$$(\nu_{ss}/\kappa)_s = -\kappa\nu_s. \tag{2.91}$$

2.4.2 Dini 曲面的运动

为了构造按势 mKdV 方程 (2.81) 运动的伪球曲面, 取方程

$$\begin{aligned} \omega_t &= \frac{\rho}{2}\omega_{uuu} + \frac{\rho}{4}\omega_u^3, \\ \omega_{uv} &= \frac{1}{\rho^2}\sin\omega \end{aligned} \tag{2.92}$$

的一个解, 对应的位置向量 $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v, t)$ 通过求解 mKdV 方程

$$\omega'_{t'} + \frac{\rho}{16}\omega'_{u'u'u'} + \frac{3}{8}\rho\omega'^2\omega'_{u'} = 0 \tag{2.93}$$

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} \end{pmatrix}_{u'} = 2\begin{pmatrix} 0 & -\omega' & 0 \\ \omega' & 0 & 1/\rho \\ 0 & -1/\rho & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} \end{pmatrix}_{t'} = \begin{pmatrix} 0 & \Gamma & -\dfrac{\omega'_{u'}}{4} \\ -\Gamma & 0 & \dfrac{1}{2\rho^2}\dfrac{\omega'^2}{4} \\ \dfrac{\omega'_{u'}}{4} & -\left[\dfrac{1}{2\rho^2}-\dfrac{\omega'^2}{4}\right] & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} \end{pmatrix}, \tag{2.94}$$

加上

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} \end{pmatrix}_{v} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & (1/\rho)\sin\omega \\ 0 & 0 & -(1/\rho)\cos\omega \\ -(1/\rho)\sin\omega & (1/\rho)\cos\omega & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} \end{pmatrix} \tag{2.95}$$

得到, 其中

$$\Gamma = \frac{\rho}{8}\omega'_{u'u'} + \frac{\rho}{4}\omega'^3 - \frac{\omega'}{2\rho}, \tag{2.96}$$

$\omega' = \omega_u,\ u' = u/2,\ t' = -t.$

作为一个例子, 考虑方程组 $(2.92)_2$ 的单孤立子解

$$\omega = 4\arctan(\exp\chi), \tag{2.97}$$

其中

$$\chi = \frac{1}{\rho}\left(\beta u + \frac{v}{\beta}\right) + \xi. \tag{2.98}$$

现在 $\dot{\rho} = \dot{\beta} = 0$. 如果允许 ξ 与 t 有关, 那么将 (2.97) 式代入势 mKdV 方程 $(2.92)_1$ 得到 $\dot{\xi} = \beta^3/(2\rho^2)$, 从而 (2.98) 式给出

$$\chi = \frac{1}{\rho}\left(\beta u + \frac{v}{\beta}\right) + \frac{\beta^3}{2\rho^2}t + \epsilon, \tag{2.99}$$

其中 ϵ 是一个任意的积分常数.

由 (1.85) 式, 对应于 sine-Gordon 方程 (1.25) 的单孤立子解的伪球曲面的位置向量可表示为

$$\boldsymbol{r}^* = \begin{pmatrix} \dfrac{2\rho\beta}{1+\beta^2}\operatorname{sech}\chi\cos\left(\dfrac{u-v}{\rho}\right) \\ \dfrac{2\rho\beta}{1+\beta^2}\operatorname{sech}\chi\sin\left(\dfrac{u-v}{\rho}\right) \\ u+v-\dfrac{2\rho\beta}{1+\beta^2}\tanh\chi \end{pmatrix}. \tag{2.100}$$

这代表了一个运动的单孤立子 Dini 曲面, 其中 χ 按 (2.99) 式依赖于 t. 下面考虑 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,v,t)$ 需要满足的速度条件. 在 (2.52) 式中取 $\delta=0$, $\zeta=3/(2\rho^2)$, 就有

$$\boldsymbol{r}_t=\left(\frac{\rho}{4}\omega_u^2-\frac{3}{2\rho}\right)\boldsymbol{A}-\frac{\rho}{2}\omega_{uu}\boldsymbol{B}+\omega_u\boldsymbol{C}. \tag{2.101}$$

可设此位置向量 $\boldsymbol{r}$ 为[181]

$$\boldsymbol{r}=R(t)\boldsymbol{r}^*+\boldsymbol{s}(t), \tag{2.102}$$

其中 $R(t)$ 是一个旋转矩阵, $\boldsymbol{s}(t)$ 是一个平移向量. 代入 (2.101) 式得到

$$\begin{aligned}
\dot{R}\boldsymbol{r}^*+\dot{\boldsymbol{s}}&=R\left[\left(\frac{\rho}{4}\omega_u^2-\frac{3}{2\rho}\right)\boldsymbol{A}^*-\frac{\rho}{2}\omega_{uu}\boldsymbol{B}^*+\omega_u\boldsymbol{C}^*-\boldsymbol{r}_t^*\right]\\
&=R\begin{pmatrix}\dfrac{\beta}{\rho(1+\beta^2)}\operatorname{sech}\chi\sin\left(\dfrac{u-v}{\rho}\right)\\ \dfrac{-\beta}{\rho(1+\beta^2)}\operatorname{sech}\chi\cos\left(\dfrac{u-v}{\rho}\right)\\ -\dfrac{3}{2\rho}\end{pmatrix}\\
&=R\begin{pmatrix}0&1/(2\rho^2)&0\\-1/(2\rho^2)&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\boldsymbol{r}^*+\begin{pmatrix}0\\0\\-3/(2\rho)\end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

于是, 要求 $R(t)$ 和 $\boldsymbol{s}(t)$ 满足

$$\begin{aligned}
\dot{R}&=\frac{1}{2\rho^2}R\begin{pmatrix}0&1&0\\-1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}=-\frac{1}{2\rho^2}RL_3,\\
\dot{\boldsymbol{s}}&=R\begin{pmatrix}0\\0\\-3/(2\rho)\end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{2.103}$$

它们有解

$$R=\begin{pmatrix}\cos(t/2\rho^2)&\sin(t/2\rho^2)&0\\-\sin(t/2\rho^2)&\cos(t/2\rho^2)&0\\0&0&1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{s}=\begin{pmatrix}0\\0\\-3t/(2\rho)\end{pmatrix}.$$

所以, 对应于方程组 (2.93) 的单孤立子解的运动 Dini 曲面的位置向量是

$$
\boldsymbol{r}(u,v,t)=\begin{pmatrix} \dfrac{2\rho\beta}{1+\beta^2}\operatorname{sech}\chi\cos\left(\dfrac{u-v}{\rho}-\dfrac{t}{2\rho^2}\right) \\ \dfrac{2\rho\beta}{1+\beta^2}\operatorname{sech}\chi\sin\left(\dfrac{u-v}{\rho}-\dfrac{t}{2\rho^2}\right) \\ u+v-\dfrac{3t}{2\rho}-\dfrac{2\rho\beta}{1+\beta^2}\tanh\chi \end{pmatrix}, \tag{2.104}
$$

其中 χ 由 (2.99) 式给出.

如果在 (2.104) 式中取 $v=$ 常数, 那么得到对应于势 mKdV 方程的单孤立子解的曲面的位置向量. 图 2.3 表示了这样一个孤立子曲面, 其中 $\rho=1, \beta=1, \xi=0$, $v=0$.

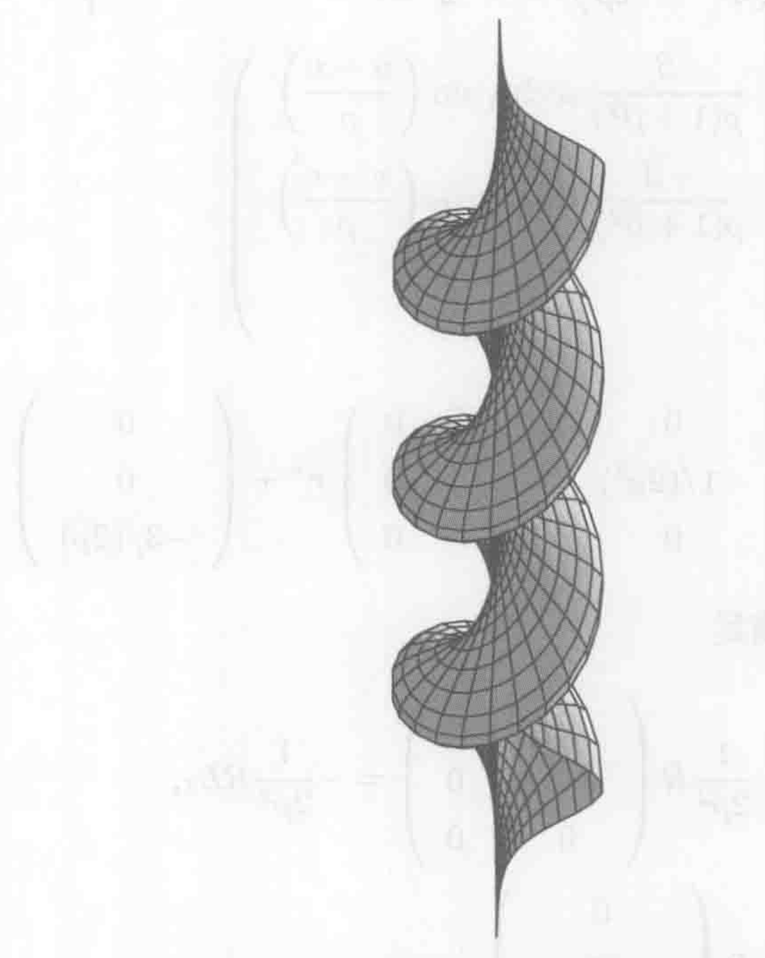


图 2.3 对应于势 mKdV 方程的孤立子曲面

2.4.3 三元正交 Weingarten 系统

相应于方程 (1.25) 的单孤立子解 (2.97)、(2.98), Weingarten 方程组 (2.57) 的解可以类似构造. 这时, 因为 $\rho=\rho(t)$, Bäcklund 参数 β 以及 ξ 都可以依赖于 t. 将 (2.97) 式代入 $(2.57)_{1,2}$ 中的任一式就得到关系 (2.75), 从而

$$
\chi=k\left[u+v\pm(u-v)\sqrt{1-1/(k^2\rho(t)^2)}\right]+\xi \tag{2.105}
$$

而对应于 sine-Gordon 方程 (1.25) 的单孤立子解的位置向量 (1.85) 给出

$$\boldsymbol{r}^* = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{k}\,\mathrm{sech}\,\chi \cos\left(\dfrac{u-v}{\rho(t)}\right) \\ \dfrac{1}{k}\,\mathrm{sech}\,\chi \sin\left(\dfrac{u-v}{\rho(t)}\right) \\ u+v-\dfrac{1}{k}\tanh\chi \end{pmatrix}, \tag{2.106}$$

其中 $\rho(t)$ 认为是已给定的.

现在要决定 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,v,t)$ 使之满足速度条件 (2.56), 即

$$\boldsymbol{r}_t = \frac{\rho\omega_t}{2}\boldsymbol{N}. \tag{2.107}$$

位置向量仍设成 (2.102) 的形式. 如果 $\dot{\xi}=0$, 那么可以取 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}^*$. 换回曲率线坐标 $x=u+v$, $y=u-v$, 位置向量是

$$\boldsymbol{r}(x,y,t) = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{k}\,\mathrm{sech}\,\chi \cos\left(\dfrac{y}{\rho}\right) \\ \dfrac{1}{k}\,\mathrm{sech}\,\chi \sin\left(\dfrac{y}{\rho}\right) \\ x-\dfrac{1}{k}\tanh\chi \end{pmatrix}, \tag{2.108}$$

其中

$$\chi = k\left[x \pm y\sqrt{1-1/(k^2\rho^2)}\right]+\xi, \quad \xi\ \text{是常数}, \tag{2.109}$$

$\rho=\rho(t)\neq 0$ 是任意函数, 此位置向量决定了 Weingarten 方程组 (2.59) 的单孤立子解所对应的曲面的三元正交系统. 坐标曲面 $t=$ 常数 是 Dini 型的伪球曲面. 以单孤立子解作为非线性叠加原理 (1.63) 的基础, 原则上可以生成 Weingarten 方程组 (2.59) 的多孤立子解所对应的正交系统. 这些 N- 孤立子解表示单孤立子解 (2.97) 的非线性叠加, 其中 χ 由 (2.109) 式给出, $k=k_i$, $i=1,\cdots,N$.

一个三元正交系统包含两族 Dini 曲面和一族球面, 它的位置向量由文献 [326] 给出:

$$\boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} \dfrac{\cos(y-t)}{\cosh(x+y+t)} \\ \dfrac{\sin(y-t)}{\cosh(x+y+t)} \\ x-\tanh(x+y+t) \end{pmatrix}, \tag{2.110}$$

曲面的图示见图 2.4. 这个特殊的 Weingarten 方程组可以从 "局部归纳梯队"[283, 284] 导出, 而后者是 NLS 梯队的另一种表示 (参见第 4 章).

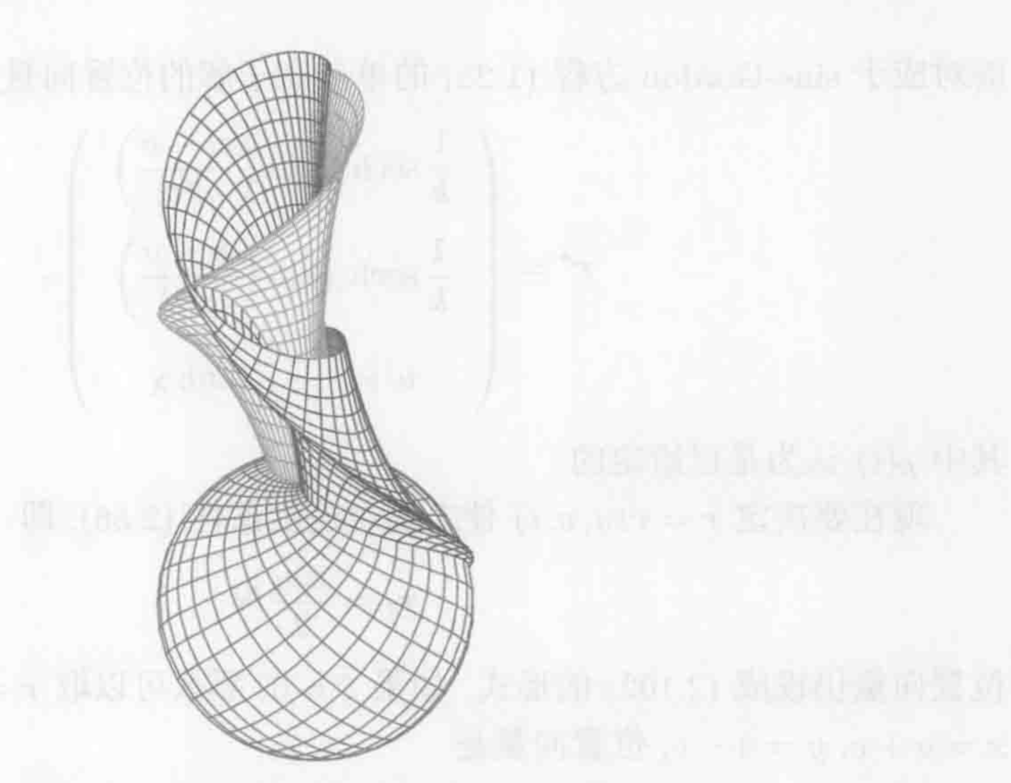


图 2.4　一个三元正交 Weingarten 系统

练　习

1. 验证 (2.94) 式给出了 mKdV 方程 (2.93) 的一个线性表示.

第 3 章　Tzitzeica 曲面, 共轭网与 Toda 格

在1907年到1910 年之间的一系列文章中, 罗马尼亚几何学家 Tzitzeica[369, 370] 研究了一类与非线性波动方程

$$\boxed{(\ln h)_{\alpha\beta} = h - h^{-2}} \tag{3.1}$$

相联系的特殊曲面. Tzitzeica 不但给出了在 Bäcklund 型变换下不变的方程 (3.1), 而且构造了带有谱参数的线性表示[370]. 在孤立子领域中重新发现Tzitzeica 方程 (3.1) 是大约七十年后的事了[111, 259].

Tzitzeica 的这项几何工作的重要性不仅仅局限于孤立子理论. 导出方程 (3.1) 的 Tzitzeica 条件在 (等变) 仿射变换下是不变的. Tzitzeica 曲面是仿射几何中球面的对应, 也称为仿射球[39]. Nomizu 和 Sasaki[277] 认为, 仿射几何起源于 Tzitzeica 在十九世纪末的工作. Tzitzeica 与 Pick 及其同时代人在此领域的早期工作可参见 Blaschke[39] 的引用. 1921 年, Jonas[184] 给出了构造 Tzitzeica 方程的解的几何方法. 到 1953 年, 他研究了方程 (3.1) 的一个等价方程 —— 仿射球方程的性质[185]. 仿射球方程不但在几何中十分重要, 而且与可积各向异性气体动力学方程组直接相联系[144–148,336].孤立子理论与仿射微分几何的进一步联系可参见 [14, 17, 80, 209, 330].

Tzitzeica 方程是一类广泛的孤立子系统 —— 二维 Toda 格方程组的特殊情况, 后者在几何上可以追溯到十九世纪关于共轭网和用 Laplace-Darboux 变换递推生成共轭网的研究. 于是, 下面将要谈到的孤立子理论中的二维 Toda 格方程组在十九世纪已由 Darboux 建立, 我们将看到 Tzitzeica 方程 (3.1) 是 Toda 格的特殊情形. 对于共轭网变换的古典研究同现代孤立子理论有着许多联系. Eisenhart 的书[119] 中给出了各种共轭网的变换, 对孤立子理论来说, 最重要的是 Jonas 于 1915 年给出的 “基本变换”[183].

3.1　Tzitzeica 曲面及其同可积气体动力学方程组的联系

我们从原始的几何问题出发导出 Tzitzeica 方程及其线性表示, 然后给出它同仿射球方程以及可积气体动力学方程组的关系.

3.1.1　Tzitzeica 方程和仿射球方程

双曲曲面 Σ 总可以用实渐近坐标 α 和 β 来表示. 这时, Gauss 方程组是

$$\begin{aligned} \boldsymbol{r}_{\alpha\alpha} &= \Gamma_{11}^1 \boldsymbol{r}_\alpha + \Gamma_{11}^2 \boldsymbol{r}_\beta, \\ \boldsymbol{r}_{\alpha\beta} &= \Gamma_{12}^1 \boldsymbol{r}_\alpha + \Gamma_{12}^2 \boldsymbol{r}_\beta + f\boldsymbol{N}, \\ \boldsymbol{r}_{\beta\beta} &= \Gamma_{22}^1 \boldsymbol{r}_\alpha + \Gamma_{22}^2 \boldsymbol{r}_\beta, \end{aligned} \tag{3.2}$$

Mainardi-Codazzi 方程组是

$$\left(\frac{f}{H}\right)_\alpha + 2\Gamma_{12}^2 \frac{f}{H} = 0, \quad \left(\frac{f}{H}\right)_\beta + 2\Gamma_{12}^1 \frac{f}{H} = 0, \tag{3.3}$$

Gauss曲率是

$$\mathcal{K} = -\frac{f^2}{H^2}. \tag{3.4}$$

于是, Mainardi-Codazzi 方程组可以写为

$$\Gamma_{12}^1 = -\frac{1}{4}[\ln(-\mathcal{K})]_\beta, \quad \Gamma_{12}^2 = -\frac{1}{4}[\ln(-\mathcal{K})]_\alpha. \tag{3.5}$$

记 d 为原点到曲面 Σ 在 P 点的切平面的距离, 那么

$$d = \boldsymbol{N} \cdot \boldsymbol{r}, \quad d_\alpha = \boldsymbol{N}_\alpha \cdot \boldsymbol{r}, \quad d_\beta = \boldsymbol{N}_\beta \cdot \boldsymbol{r}. \tag{3.6}$$

这些关系式可以看作为 $\boldsymbol{r}$ 向三个线性无关向量 $\boldsymbol{N}, \boldsymbol{N}_\alpha, \boldsymbol{N}_\beta$ 的投影. 由 Weingarten 方程组得到

$$\boldsymbol{r} = -\frac{d_\beta}{f}\boldsymbol{r}_\alpha - \frac{d_\alpha}{f}\boldsymbol{r}_\beta + d\boldsymbol{N}. \tag{3.7}$$

另一方面, 利用 (3.5) 式, 方程 $(3.2)_2$ 成为

$$\boldsymbol{r}_{\alpha\beta} = -\frac{1}{4}[\ln(-\mathcal{K})]_\beta \boldsymbol{r}_\alpha - \frac{1}{4}[\ln(-\mathcal{K})]_\alpha \boldsymbol{r}_\beta + f\boldsymbol{N}, \tag{3.8}$$

从而

$$\boldsymbol{r}_{\alpha\beta} - \frac{f}{d}\boldsymbol{r} = -\frac{1}{4}\left[\ln\left(-\frac{\mathcal{K}}{d^4}\right)\right]_\beta \boldsymbol{r}_\alpha - \frac{1}{4}\left[\ln\left(-\frac{\mathcal{K}}{d^4}\right)\right]_\alpha \boldsymbol{r}_\beta. \tag{3.9}$$

于是有

$$\boldsymbol{r}_{\alpha\beta} = \frac{f}{d}\boldsymbol{r} \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{\mathcal{K}}{d^4} = 常数 = c^2 > 0. \tag{3.10}$$

满足条件

$$\mathcal{K} = -c^2 d^4 \tag{3.11}$$

的曲面恰好就是 Tzitzeica 研究过的曲面. 由

$$\boldsymbol{r}_{\alpha\beta} = h\boldsymbol{r} \quad (h = f/d) \tag{3.12}$$

和 Gauss 方程组中剩下的方程 $(3.2)_{1,3}$ 的相容性条件得到

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{h_\alpha}{h}, \quad \Gamma_{11}^2 = \frac{a(\alpha)}{h}, \quad \Gamma_{22}^1 = \frac{b(\beta)}{h}, \quad \Gamma_{22}^2 = \frac{h_\beta}{h}, \tag{3.13}$$

其中

$$(\ln h)_{\alpha\beta} = h - \frac{ab}{h^2}. \tag{3.14}$$

由于渐近坐标可以差一个重新参数化 $\alpha \to \tilde{\alpha}(\alpha)$, $\beta \to \tilde{\beta}(\beta)$, 在函数 $a \neq 0$, $b \neq 0$ 时我们可以选取 a 和 b 为满足 $ab = 1$ 的常数. 在此 "规范" 下, Tzitzeica 曲面的位置向量满足线性方程组

$$\begin{aligned} \boldsymbol{r}_{\alpha\alpha} &= \frac{h_\alpha}{h}\boldsymbol{r}_\alpha + \frac{\lambda}{h}\boldsymbol{r}_\beta, \\ \boldsymbol{r}_{\alpha\beta} &= h\boldsymbol{r}, \\ \boldsymbol{r}_{\beta\beta} &= \frac{h_\beta}{h}\boldsymbol{r}_\beta + \frac{\lambda^{-1}}{h}\boldsymbol{r}_\alpha, \end{aligned} \tag{3.15}$$

其中 $\lambda = a = b^{-1}$ 是一个常数. 这个方程组相容的充要条件是 h 满足 Tzitzeica 方程 (3.1). Tzitzeica 方程在现代孤立子理论中被发现以后已被作了很多研究 (例如可参见文献 [52, 140, 259, 325, 327, 336]). 但是, 值得注意的是, 无论它的线性表示 (3.15) 还是在孤立子分析中起关键作用的自 Bäcklund 变换, 都已在 Tzitzeica 的早期工作中被发现了.

在仿射几何中, Tzitzeica 曲面以仿射球的形式自然产生.[1] 仿射球的定义是要求它的仿射法向指向一个固定点, 通常不妨设为坐标原点. 这是球面在仿射几何中的对应物. 在渐近坐标下, 我们将看到仿射法向平行于向量 $\boldsymbol{r}_{\alpha\beta}$, 从而仿射球由 (3.12) 式所定义, 它与 Tzitzeica 曲面相同.

在孤立子理论中, 依赖于 λ 的线性方程组 (3.15) 通常称为 Lax 三元组. 一个有趣的现象是, 平行于法向量 $\boldsymbol{N}$ 的向量

$$\boldsymbol{r}' = -\frac{1}{h}(\boldsymbol{r}_\alpha \times \boldsymbol{r}_\beta) \tag{3.16}$$

满足对偶方程组

$$\begin{aligned} \boldsymbol{r}'_{\alpha\alpha} &= \frac{h_\alpha}{h}\boldsymbol{r}'_\alpha - \frac{\lambda}{h}\boldsymbol{r}'_\beta, \\ \boldsymbol{r}'_{\alpha\beta} &= h\boldsymbol{r}', \\ \boldsymbol{r}'_{\beta\beta} &= \frac{h_\beta}{h}\boldsymbol{r}'_\beta - \frac{\lambda^{-1}}{h}\boldsymbol{r}'_\alpha. \end{aligned} \tag{3.17}$$

这可通过求导并将二阶导数用 (3.15) 式代入得到. Jonas[185] 发现, 由此可以得到与 $\Sigma' : \boldsymbol{r}' = \boldsymbol{r}'(\alpha, \beta)$ 相联系的 Lelieuvre 公式

$$\boldsymbol{r}'_\alpha = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{r}_\alpha, \quad \boldsymbol{r}'_\beta = -\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{r}_\beta. \tag{3.18}$$

进一步, $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{\nu}'$ 与 Σ' 正交, 并且容易看到

$$\frac{|\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}_\alpha, \boldsymbol{r}_\beta|}{h} = \frac{\boldsymbol{r} \cdot (\boldsymbol{r}_\alpha \times \boldsymbol{r}_\beta)}{h} = \text{常数}, \tag{3.19}$$

也就是

$$\boldsymbol{r}' \cdot \boldsymbol{r} = \text{常数}. \tag{3.20}$$

由 $\boldsymbol{r}'$ 表示的 Tzitzeica 曲面称为配极仿射球.

Lelieuvre 公式导出一个重要的事实: 在 Tzitzeica 曲面上存在两族典型的共轭曲线. 记

$$R = x, \quad u = \frac{y}{x}, \quad v = z', \tag{3.21}$$

其中 $\boldsymbol{r} = (x, y, z)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{r}' = (x', y', z')^{\mathrm{T}}$, 则 (3.16) 式和 Lelieuvre 公式 (3.18) 给出

$$hRv = R_\alpha v_\beta + R_\beta v_\alpha, \quad u_\alpha = \frac{1}{R^2} v_\alpha, \quad u_\beta = -\frac{1}{R^2} v_\beta, \tag{3.22}$$

又由后一对关系得到

$$\mathrm{d}\alpha = \frac{R}{2v_\alpha}\left(R\,\mathrm{d}u + \frac{\mathrm{d}v}{R}\right), \quad \mathrm{d}\beta = \frac{R}{2v_\beta}\left(-R\,\mathrm{d}u + \frac{\mathrm{d}v}{R}\right). \tag{3.23}$$

从而第二基本形式成为

$$\mathrm{II} \sim \mathrm{d}\alpha\,\mathrm{d}\beta \sim R^2\,\mathrm{d}u^2 - \frac{\mathrm{d}v^2}{R^2}. \tag{3.24}$$

于是, u, v 是 Tzitzeica 曲面上的共轭曲线坐标, 第二基本形式在此坐标下是对角的.

由 $R_{\alpha\beta} = hR$ 和 $(3.22)_1$ 式得到

$$\mathrm{d}\left[\frac{1}{v^2}(R_\alpha \mathrm{d}\alpha - R_\beta \mathrm{d}\beta)\right] = 0. \tag{3.25}$$

在坐标变换下,

$$\partial_\alpha = v_\alpha\left(\frac{1}{R^2}\partial_u + \partial_v\right), \quad \partial_\beta = v_\beta\left(-\frac{1}{R^2}\partial_u + \partial_v\right), \tag{3.26}$$

于是 (3.25) 式成为

$$\mathrm{d}\left(\frac{R^2 R_v}{\cdots}\mathrm{d}u + \frac{R_u}{\cdots}\mathrm{d}v\right) = 0. \tag{3.27}$$

由此得到仿射球方程

$$\boxed{\left(\frac{R_u}{R^2v^2}\right)_u=\left(\frac{R^2R_v}{v^2}\right)_v}. \tag{3.28}$$

此方程最早由德国几何学家 Jonas 得到[185]. 他指出仿射球方程 (3.28) 相比 Tzitzeica 方程有一个明显的好处, 那就是一旦知道 R, 就可以通过两次积分计算出曲面的位置向量. 下面我们来讨论此问题.

由定义 (3.16) 出发作 $\boldsymbol{r}'$ 和 $\boldsymbol{r}'_\alpha, \boldsymbol{r}'_\beta$ 的外积并利用 Lelieuvre 公式 (3.18), 我们就得到前一个仿射球的 Lelieuvre 公式

$$\boldsymbol{r}_\alpha=\boldsymbol{r}'\times\boldsymbol{r}'_\alpha,\quad \boldsymbol{r}_\beta=-\boldsymbol{r}'\times\boldsymbol{r}'_\beta. \tag{3.29}$$

这里, 不失一般性, 已取了

$$|\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_\alpha,\boldsymbol{r}_\beta|=\boldsymbol{r}\cdot(\boldsymbol{r}_\alpha\times\boldsymbol{r}_\beta)=h. \tag{3.30}$$

在变量代换 (3.26) 下, Lelieuvre 公式 (3.29) 成为

$$\boldsymbol{r}_u=R^2(\boldsymbol{r}'\times\boldsymbol{r}'_v),\quad \boldsymbol{r}_v=\frac{1}{R^2}(\boldsymbol{r}'\times\boldsymbol{r}'_u), \tag{3.31}$$

它们的前两个分量为

$$\begin{aligned}\left(\frac{y'}{z'}\right)_u&=-\frac{R^2x_v}{z'^2}, & \left(\frac{y'}{z'}\right)_v&=-\frac{x_u}{R^2z'^2},\\ \left(\frac{x'}{z'}\right)_u&=\frac{R^2y_v}{z'^2}, & \left(\frac{x'}{z'}\right)_v&=\frac{y_u}{R^2z'^2}.\end{aligned} \tag{3.32}$$

如果引入积分

$$w=\int\frac{R^2R_v}{v^2}\mathrm{d}u+\frac{R_u}{R^2v^2}\mathrm{d}v,\quad s=\int\frac{uR^2R_v}{v^2}\mathrm{d}u+\frac{uR_u+R}{R^2v^2}\mathrm{d}v \tag{3.33}$$

并利用

$$\boldsymbol{r}'\cdot\boldsymbol{r}=-1, \tag{3.34}$$

那么仿射球及其对偶的位置向量为

$$\boldsymbol{r}=\begin{pmatrix}R\\ Ru\\ -v^{-1}+R(wu-s)\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{r}'=\begin{pmatrix}sv\\ -wv\\ v\end{pmatrix}. \tag{3.35}$$

Jonas 在 [185] 中得到了所有的旋转 Tzitzeica 曲面, 它们对应于 Tzitzeica 方程的角面解. 一个典型的旋转曲面见图 3.1.

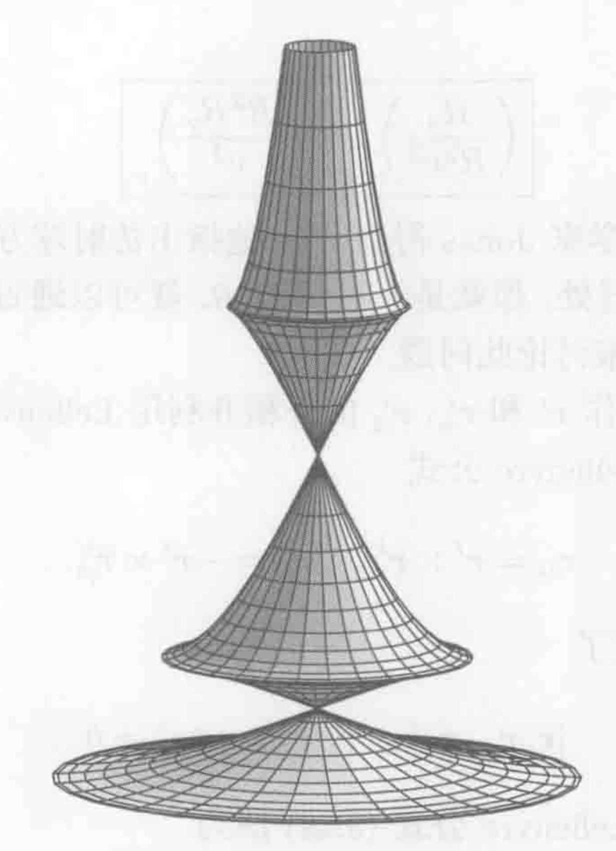


图 3.1 旋转 Tzitzeica 曲面

3.1.2 气体动力学中的仿射球方程

在 Tzitzeica 方程进入孤立子理论后, Gaffet[144−148]利用 Riemann 不变量发现, 对于一类特殊气体, 1+1 维各向异性气体动力学方程组可以约化为 Tzitzeica 方程. 这个气体动力学方程组是可积的, 并且具有孤立子解. 在这里, 用仿射球方程比 Tzitzeica 方程更方便, 因为它是直接用气体动力学变量来表示的[336]. 下面就来导出各向异性气体动力学中的仿射球方程.

对于 1+1 维 Prim 气体[289],

$$\rho = \Pi(p)S(s), \qquad \left.\frac{\partial p}{\partial \rho}\right|_s > 0, \tag{3.36}$$

描述它的运动的 Lagrange 方程是

$$-S(s)\frac{\partial^2 p}{\partial \psi^2} = \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{1}{\Pi(p)}\right). \tag{3.37}$$

这里, p, ρ 和 $s(\psi)$ 分别是气体的压强、密度和单位质量的熵, t 表示时间, ψ 是由

$$\mathrm{d}\psi = \rho(\mathrm{d}x - q\mathrm{d}t) \tag{3.38}$$

给出的 Lagrange 变量, x 是 Euler 描述下的空间坐标, q 是气体的速度. 如果记

并要求 $\Pi(p)$ 和 $S(s)$ 满足

$$\Pi(p) = \frac{R}{1-\tilde{b}R}, \quad S(s) = \psi^{4/3}, \tag{3.40}$$

那么运动的 Lagrange 方程 (3.37) 就约化为仿射球方程

$$\left(\frac{R_u}{R^2v^2}\right)_u = \left(\frac{R^2R_v}{v^2}\right)_v. \tag{3.41}$$

利用 (3.37) 的标度不变性以及关系式 (3.39) 和 (3.40), 我们还可以讨论更一般的本构方程

$$\rho = \frac{\tilde{a}(p+\tilde{c})^{1/3}\psi^{4/3}}{1-\tilde{b}(p+\tilde{c})^{1/3}}, \tag{3.42}$$

其中 $\tilde{a}$ 是一个任意常数. 为了得出对应于仿射球方程 (3.41) 的解 $R=R(u,v)$ 的气体动力学变量, $x=x(u,v)$ 可以通过

$$\frac{\partial x}{\partial v} = 3\frac{v^2}{\rho} = \frac{1-\tilde{b}R}{Rv^2}, \qquad \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} = -p_\psi = -\frac{R^2R_v}{v^2} \tag{3.43}$$

解出[2], 对应的相容性条件 $(x_v)_{uu} = (x_{uu})_v$ 由仿射球方程 (3.41) 保证. 用参数 u, v 表示时, 气体动力学变量为

$$x = x(u,v), \quad t = u, \tag{3.44}$$

$$p = R^3 - \tilde{c}, \quad \rho = \frac{3Rv^4}{1-\tilde{b}R}, \quad S(s) = v^4, \quad q = \frac{\partial x}{\partial u}. \tag{3.45}$$

Martin[242, 243] 导出了平面上稳定和不稳定各向异性气体动力学的 Monge-Ampère 型公式, 在不稳定情形, 得到了等价于 Tzitzeica 方程的 Monge-Ampère 方程. 为此, 利用微分形式, 仿射球方程可写为简单的形式

$$v^2\mathrm{d}w \wedge \mathrm{d}v = R^2\mathrm{d}u \wedge \mathrm{d}R, \quad \mathrm{d}R \wedge \mathrm{d}v = R^2v^2\mathrm{d}u \wedge \mathrm{d}w. \tag{3.46}$$

事实上, 如果将 R 和 w 看作 u, v 的函数, 则 (3.46) 式等价于

$$\begin{pmatrix} w \\ R \end{pmatrix}_u = \begin{pmatrix} 0 & R^2/v^2 \\ R^2v^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w \\ R \end{pmatrix}_v, \tag{3.47}$$

其中 w 是仿射球方程的势, 由 (3.33) 式给出.

上一小节中, 仿射球方程是从讨论仿射球的位置向量 $\boldsymbol{r}$ 开始的. 等价地, 可以用对偶向量 $\boldsymbol{r}'$ 得到 $R'=x'$, $u'=y'/x'$, $v'=z$. 这样, 就得到对偶仿射球方程, 它

与仿射球方程有相同的形式, 这源于方程组 (3.46) 关于 R, u 和 v, w 是对称的. 从而, 如果我们将 u, v 看作是 w, R 的函数, 有

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}_w = \begin{pmatrix} 0 & v^2/R^2 \\ v^2R^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}_R, \tag{3.48}$$

因此

$$\left(\frac{v_w}{v^2R^2}\right)_w = \left(\frac{v^2 v_R}{R^2}\right)_R. \tag{3.49}$$

这样, 我们得到矩阵方程 (3.47) 在速端变换

$$w' = u, \quad R' = v; \quad w = u', \quad R = v' \tag{3.50}$$

下是不变的.[3] 这与仿射球方程 (3.41) 在

$$(R, u, v) \leftrightarrow (v, w, R) \tag{3.51}$$

下的不变性相联系.

考虑气体动力学变量的逆 $\tilde{p} = R^3$ 和 $\psi = v^3$, 方程组 (3.46) 成为

$$\mathrm{d}w \wedge \mathrm{d}\psi = \mathrm{d}u \wedge \mathrm{d}\tilde{p}, \quad \mathrm{d}\tilde{p} \wedge \mathrm{d}\psi = 9(\tilde{p}\psi)^{4/3}\mathrm{d}u \wedge \mathrm{d}w. \tag{3.52}$$

于是, 以 $\tilde{p}$ 和 ψ 为自变量时, 有

$$w_{\tilde{p}} = -u_\psi, \quad 9(\tilde{p}\psi)^{4/3}(u_{\tilde{p}}w_\psi - u_\psi w_{\tilde{p}}) = 1, \tag{3.53}$$

从而有

$$\xi_{\tilde{p}\tilde{p}}\xi_{\psi\psi} - \xi_{\tilde{p}\psi}^2 + (\tilde{p}\psi)^{-4/3} = 0, \tag{3.54}$$

其中 $u = \dfrac{1}{3}\xi_{\tilde{p}}, w = -\dfrac{1}{3}\xi_\psi$. 这个 Monge-Ampère 方程是所考虑的可积气体动力学方程组的 Martin 形式. 仿射球方程在 (3.51) 下的不变性对应于 (3.54) 在 $(\tilde{p}, \psi, \xi) \to (\psi, \tilde{p}, -\xi)$ 下的不变性.

另一方面, 可以将 u 和 w 取为独立变量, 并通过 Legendre 变换建立起方程 (3.54) 和另一个 Monge-Ampère 方程

$$\Theta_{uu}\Theta_{ww} - \Theta_{uw}^2 + (\Theta_u\Theta_w)^{4/3} = 0, \tag{3.55}$$

之间的联系, 这里 $\tilde{p} = \dfrac{1}{27}\Theta_u, \psi = -\dfrac{1}{27}\Theta_w$. 所以, Tzitzeica 方程、仿射球方程和

[3] 在连续介质力学中, 速端变换下的不变性有重要的应用. 在 neo-Hookean 材料的非线性弹性中, 平面

Monge-Ampère 型方程 (3.54)、(3.55) 都是同 Tzitzeica 曲面的几何相联系的孤立子方程.

本节中, 已建立了孤立子理论与气体动力学方程组的联系. 在文献 [336] 中, 用下节将要讨论的 Bäcklund 变换构造了对应于本构关系 (3.42) 的气体动力学方程的一族解. 值得注意的是, Loewner[237] 以及 Cekirge 和 Varley[73] 先后得到了等熵气体动力学中带三个参数的本构方程

$$\rho=\frac{\tilde{a}(p+\tilde{c})^{1/3}}{1-\tilde{b}(p+\tilde{c})^{1/3}}, \tag{3.56}$$

或等价的

$$p=\left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^3(e+\tilde{\mu})^{-3}-\tilde{c},\quad \tilde{\mu}=\frac{1}{\rho_0}+\frac{\tilde{b}}{\tilde{a}}, \tag{3.57}$$

其中 $e=\rho_0/\rho-1$ 是伸缩因子. 在 [237] 中, Loewner 系统地研究了 Bäcklund 变换, 它将平面稳定气体动力学的速端方程分别在亚音速、跨音速和超音速区域中变为标准形式. 本构关系 (3.57) 使得问题可以约化为超音速流中的经典波动方程. Cekirge 和 Varley 注意到本构关系 (3.57) 可以作为理想软物质 (在物质无限膨胀时它的 Lagrange 音速单调趋于零) 的模型, 而气体在膨胀时表现出理想软物质的性质. Loewner 在 [237] 中以及 Cekirge 和 Varley 在 [73] 中建立的一些模型的本构关系, 包括 (3.57), 可以通过截断 Bergman 级数得到[72], 而 Bergman 级数与可积 Toda 格相联系[275]. 近来 [338] 中发现, Loewner 给出的或由 Bergman 级数截断所得的本构关系都有直接的孤立子解释. 气体动力学中 Loewner 给出的 Bäcklund 变换的无穷小形式在经过适当的解释后, 可导出新的 2+1 维孤立子系统[210, 211]. 这些近期的发展将 Bäcklund 变换在孤立子理论中的应用和在连续介质力学中的应用联系起来, 这两者在 Rogers 和 Shadwick 的书[311] 中是分开讨论的.

练　习

1. 对于本节考虑的 Tzitzeica 曲面, 验证

$$\begin{aligned}
E&=\frac{\psi^3}{\mu^2}\left(\psi_{\alpha\alpha}-(\ln h)_\alpha\psi_\alpha+\frac{\lambda}{h}\psi_\beta\right),\\
F&=-\frac{\psi^3}{\mu^2}(\psi_{\alpha\beta}-h\psi),\\
G&=\frac{\psi^3}{\mu^2}\left(\psi_{\beta\beta}-(\ln h)_\beta\psi_\beta+\frac{\lambda^{-1}}{h}\psi_\alpha\right),
\end{aligned}$$

其中 $\psi=1/d$.

2. (a) 证明法向与 Laplace-Beltrami 算子作用于位置向量 $\boldsymbol{r}$ 上所得的方向一

$$
\boldsymbol{N} \sim \Delta \boldsymbol{r} = \frac{1}{H}\left[\left(\frac{G\boldsymbol{r}_\alpha - F\boldsymbol{r}_\beta}{H}\right)_\alpha + \left(\frac{E\boldsymbol{r}_\beta - F\boldsymbol{r}_\alpha}{H}\right)_\beta\right],
$$

其中 $H^2 = EG - F^2$.

(b) 证明仿射法向为

$$
\boldsymbol{N}^a \sim \Delta^a \boldsymbol{r},
$$

其中 Δ^a 是与第二基本形式相联系的 Laplace-Beltrami 算子, 即

$$
\Delta^a = \frac{1}{\tilde{h}}\left[\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{g}{\tilde{h}}\frac{\partial}{\partial\alpha} - \frac{f}{\tilde{h}}\frac{\partial}{\partial\beta}\right) + \frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{e}{\tilde{h}}\frac{\partial}{\partial\beta} - \frac{f}{\tilde{h}}\frac{\partial}{\partial\alpha}\right)\right],
$$

$\tilde{h}^2 = eg - f^2$. 这给出了法向 $\boldsymbol{N}$ 与仿射法向 $\boldsymbol{N}^a$ 的相似之处 (见文献 [39]).

(c) 在渐近坐标下, 利用上面关于仿射法向的结果证明

$$
\boldsymbol{N}^a \,||\, \boldsymbol{r}_{\alpha\beta}.
$$

3. 用 Tzitzeica 方程的线性表示证明[185]

$$
h = 2\frac{RR_v}{v}\sqrt[3]{\frac{v^2}{P^2 - Q^2}},
$$

其中

$$
P = \frac{R_{uu}}{R^2} - 2\frac{R_u^2}{R^3} + R^2 R_{vv}, \quad Q = 2\left(R_{uv} - \frac{R_u R_v}{R}\right).
$$

4. (a) 证明旋转 Tzitzeica 曲面与 "静态"Tzitzeica 方程

$$
(\ln h)'' = h - h^{-2}, \qquad h = h(\alpha + \beta)
$$

的解相联系. 这解可用椭圆函数表示出来, 因为它有一个首次积分

$$
h'^2 = 2h^3 + c_0 h^2 + 1.
$$

(b) 证明在柱坐标

$$
x = \rho\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\varphi, \quad z
$$

下, 旋转曲面 $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(\rho, z)$ 的 Gauss 曲率 $\mathcal{K}$ 以及原点到该曲面的切平面的距离 d 为

$$
\mathcal{K} = \frac{z'z''}{\rho(1 + z'^2)^2}, \quad d = \frac{z - \rho z'}{\sqrt{1 + z'^2}},
$$

从而旋转 Tzitzeica 曲面由

确定, 其中 $z = z(\rho)$.

5. 证明与仿射球方程相联系的可积气体动力学方程组可以用 Monge-Ampère 方程

$$\Lambda_{qq}\Lambda_{\bar{x}\bar{x}} - \Lambda_{q\bar{x}}^2 = \Lambda^{-4}$$

来描述, 其中 q 是气体的速度, $\bar{x} = x - qt$, $\Lambda = \alpha\psi^\delta$, $\delta = -1/3$, $\alpha\delta = \pm\sqrt{3}$.

3.2 Tzitzeica 曲面的构造及其 Bäcklund 变换

Tzitzeica 不但给出了现在称为 Tzitzeica 方程的非线性方程 (3.1) 的线性表示, 而且给出了它的 Bäcklund 变换, 不过他并未给出得到 Bäcklund 变换的细节. 这里用简单的纯几何方法构造一系列 Tzitzeica 曲面来得到 Bäcklund 变换. 对于用 $(\boldsymbol{r}, h)$ 和 $(\boldsymbol{r}', h')$ 表示的两个 Tzitzeica 曲面 Σ 和 Σ', 我们要确定是否存在它们之间的一种对应, 使得对应点 P 和 P' 的连线与曲面 Σ 相切, 即

$$\boldsymbol{r}' - \boldsymbol{r} \perp \boldsymbol{N}. \tag{3.58}$$

用等式写出, 就是

$$\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{r} + \frac{a}{h}\boldsymbol{r}_\alpha + \frac{b}{h}\boldsymbol{r}_\beta, \tag{3.59}$$

其中 $a(\alpha, \beta)$, $b(\alpha, \beta)$ 使得 Σ' 是一个仿射球并同 Σ 一样参数化. 换句话说, 向量 $\boldsymbol{r}'$ 要满足 Gauss 方程组

$$\begin{aligned} \boldsymbol{r}'_{\alpha\alpha} &= \frac{h'_\alpha}{h'}\boldsymbol{r}'_\alpha + \frac{\lambda}{h'}\boldsymbol{r}'_\beta, \\ \boldsymbol{r}'_{\alpha\beta} &= h'\boldsymbol{r}', \\ \boldsymbol{r}'_{\beta\beta} &= \frac{h'_\beta}{h'}\boldsymbol{r}'_\beta + \frac{\lambda^{-1}}{h'}\boldsymbol{r}'_\alpha, \end{aligned} \tag{3.60}$$

以使得 h' 满足 Tzitzeica 方程

$$(\ln h')_{\alpha\beta} = h' - h'^{-2}. \tag{3.61}$$

只要两个曲面中的任一个可以任意选取, Σ 和 Σ' 之间的关系 (3.59) 就导出 Tzitzeica 方程的自 Bäcklund 变换.

将位置向量 $\boldsymbol{r}'$ 代入 Gauss 方程组 (3.60), 再利用原来的 Gauss 方程组 (3.15), 我们得到

$$E_0\boldsymbol{r} + E_1\boldsymbol{r}_\alpha + E_2\boldsymbol{r}_\beta = \boldsymbol{0}. \tag{3.62}$$

因为 $\{\boldsymbol{r}_\alpha, \boldsymbol{r}_\beta, \boldsymbol{N}\}$ 是线性无关的, 由 (3.7) 式得 $\{\boldsymbol{r}_\alpha, \boldsymbol{r}_\beta, \boldsymbol{r}\}$ 也是线性无关的, 从而

$$
\begin{aligned}
a_{\alpha\beta} &= \frac{h_\beta}{h} a_\alpha + h'a - \frac{a}{h^2} - \lambda^{-1}\left(\frac{b}{h}\right)_\alpha, \\
b_{\alpha\beta} &= \frac{h_\alpha}{h} b_\beta + h'b - \frac{b}{h^2} - \lambda\left(\frac{a}{h}\right)_\beta, \\
h' &= h + a_\alpha + b_\beta,
\end{aligned} \tag{3.63}
$$

而由 $(3.60)_1$ 的 $\boldsymbol{r}_\alpha$ 分量和 $(3.60)_3$ 的 $\boldsymbol{r}_\beta$ 分量得出

$$
\begin{aligned}
a_{\alpha\alpha} &= \frac{a_\alpha}{b_\beta}\left[\frac{h_\alpha}{h} b_\beta + h'b - \frac{b}{h^2} - \lambda\left(\frac{a}{h}\right)_\beta\right], \\
b_{\beta\beta} &= \frac{b_\beta}{a_\alpha}\left[\frac{h_\beta}{h} a_\alpha + h'a - \frac{a}{h^2} - \lambda^{-1}\left(\frac{b}{h}\right)_\alpha\right].
\end{aligned} \tag{3.64}
$$

比较 $(3.63)_{1,2}$ 和 (3.64) 式, 有

$$
b_\beta a_{\alpha\alpha} = a_\alpha b_{\alpha\beta}, \quad a_\alpha b_{\beta\beta} = b_\beta a_{\alpha\beta}, \tag{3.65}
$$

从而

$$
b_\beta = c a_\alpha, \quad c = \text{常数}. \tag{3.66}
$$

引入势 p 使得

$$
a = p_\beta, \quad b = c p_\alpha, \tag{3.67}
$$

积分 $(3.63)_{1,2}$ 式得到

$$
\begin{aligned}
p_{\alpha\alpha} &= \frac{1+c}{2} p_\alpha^2 + \frac{h_\alpha}{h} p_\alpha - \frac{\lambda c^{-1}}{h} p_\beta + A(\alpha), \\
p_{\beta\beta} &= \frac{1+c}{2} p_\beta^2 + \frac{h_\beta}{h} p_\beta - \frac{\lambda^{-1} c}{h} p_\alpha + B(\beta).
\end{aligned} \tag{3.68}
$$

这些方程可以通过变换代换

$$
\phi = \exp\left(-\frac{1+c}{2} p\right), \quad c = -\frac{\lambda}{\mu} \tag{3.69}
$$

线性化为

$$
\begin{aligned}
\phi_{\alpha\alpha} &= \frac{h_\alpha}{h} \phi_\alpha + \frac{\mu}{h} \phi_\beta + \frac{\lambda - \mu}{2\mu} A(\alpha), \\
\phi_{\beta\beta} &= \frac{h_\beta}{h} \phi_\beta + \frac{\mu^{-1}}{h} \phi_\alpha + \frac{\lambda - \mu}{2\mu} B(\beta).
\end{aligned} \tag{3.70}
$$

进一步, 由相容性条件 $(\phi_{\alpha\alpha})_{\beta\beta} = (\phi_{\beta\beta})_{\alpha\alpha}$ 得到, 如果 h 是 Tzitzeica 方程的解, $A(\alpha)$ 和 $B(\beta)$ 必须恒为零. 从而上述方程组有首次积分

而当 $c_0 = 0$ 时, 由 (3.59)、(3.67)、(3.69) 式确定的 $\boldsymbol{r}'$ 满足 Gauss 方程组 (3.60). 于是, 我们得到了下列结果:

定理 4 (Tzitzeica 变换) *Gauss 方程组 (3.15) 和 Tzitzeica 方程 (3.1) 在变换*

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{r} \to \boldsymbol{r}' = \boldsymbol{r} - \frac{2}{(\lambda-\mu)h}\left(\lambda\frac{\phi_\alpha}{\phi}\boldsymbol{r}_\beta - \mu\frac{\phi_\beta}{\phi}\boldsymbol{r}_\alpha\right), \\ &h \to h' = h - 2(\ln\phi)_{\alpha\beta} \end{aligned} \tag{3.72}$$

下不变, 这里 ϕ 是方程 (3.15) 在参数取为 μ 时的一个特解.

经典 Moutard 变换[264] 是在将一组线性双曲型方程组约化为解已知的方程组时引入的, Tzitzeica 变换是它的一种特殊的变化形式. Moutard 变换的基本形式及其各种变化在孤立子理论中有很多应用.

定理 5 (Moutard 变换) *双曲型方程*

$$\boldsymbol{r}_{\alpha\beta} = h\boldsymbol{r} \tag{3.73}$$

在变换

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{r} \to \boldsymbol{r}' = \boldsymbol{r} - 2\frac{\boldsymbol{m}}{\phi}, \\ &h \to h' = h - 2(\ln\phi)_{\alpha\beta} \end{aligned} \tag{3.74}$$

下保持形式不变, 这里双线性势 $\boldsymbol{m}$ 满足

$$\boldsymbol{m}_\alpha = \phi_\alpha \boldsymbol{r}, \quad \boldsymbol{m}_\beta = \phi \boldsymbol{r}_\beta, \tag{3.75}$$

ϕ 是方程 (3.73) 的标量形式的一个特解.

Moutard 变换与 Tzitzeica 变换的关系如下. 如果在 Moutard 方程 (3.73) 上加上 Gauss 方程组

$$\begin{aligned} \boldsymbol{r}_{\alpha\alpha} &= \frac{h_\alpha}{h}\boldsymbol{r}_\alpha + \frac{\lambda}{h}\boldsymbol{r}_\beta, \\ \boldsymbol{r}_{\beta\beta} &= \frac{h_\beta}{h}\boldsymbol{r}_\beta + \frac{\lambda^{-1}}{h}\boldsymbol{r}_\alpha, \end{aligned} \tag{3.76}$$

ϕ 是这组方程关于参数 μ 的一个解, 那么势 $\boldsymbol{m}$ 可以显式算出,

$$(\lambda+\mu)\boldsymbol{m} = \mu\phi\boldsymbol{r} + \lambda\frac{\phi_\alpha}{h}\boldsymbol{r}_\beta - \mu\frac{\phi_\beta}{h}\boldsymbol{r}_\alpha + \text{常向量}. \tag{3.77}$$

于是, 当积分常数取为零时, 我们有

$$\boldsymbol{r}' = \frac{\lambda-\mu}{\lambda+\mu}\left[\boldsymbol{r} - \frac{2}{(\lambda-\mu)h}\left(\lambda\frac{\phi_\alpha}{\phi}\boldsymbol{r}_\beta - \mu\frac{\phi_\beta}{\phi}\boldsymbol{r}_\alpha\right)\right], \tag{3.78}$$

这在允许相差一个常数因子时正是 Tzitzeica 变换.

需要强调的是, 通过引入斜对称势

$$\boldsymbol{S} = \phi \boldsymbol{r} - 2\boldsymbol{m}, \tag{3.79}$$

就有

$$\boldsymbol{r}' = \frac{\boldsymbol{S}}{\phi}, \tag{3.80}$$

并且 S 满足

$$\boldsymbol{S}_\alpha = \phi \boldsymbol{r}_\alpha - \phi_\alpha \boldsymbol{r}, \quad \boldsymbol{S}_\beta = \phi_\beta \boldsymbol{r} - \phi \boldsymbol{r}_\beta. \tag{3.81}$$

这就得到了经典 Moutart 变换的 "标准" 形式 (1.174). 然而, 形式 $(3.74)_1$ 表明 Moutard 变换与所谓的基本变换 (Fundamental Transformation) 有着密切的联系, 后者将在 5.4 节中讨论.

显然 Tzitzeica 变换可以用标准算法递推, 类似地, Moutard 变换也有同样的性质. 事实上, Tzitzeica 变换与 Moutard 变换的关系可以用来导出 Tzitzeica 变换显式的递推公式. 这样, 我们就可以构造多参数 Tzitzeica 曲面以及对应的 Tzitzeica 方程的解. 特别地, Michailov 给出的 Tzitzeica 方程的多孤立子解[259] 导出仿射球型的孤立子曲面. 进一步, 与双 Tzitzeica 变换和三 Moutard 变换相联系的可换性定理与构造离散可积系统有着密切的联系[273, 274, 325, 327, 330].

下面考虑 Tzitzeica 变换最简单的应用, 即它在平凡解

$$h = 1 \tag{3.82}$$

上的作用. 不妨设 $\lambda = 1$, 从而对应的 Gauss 方程组有特解

$$\begin{aligned} x &= \cos\left[\frac{1}{2}\sqrt{3}(\alpha - \beta)\right] \exp\left[-\frac{1}{2}(\alpha + \beta)\right], \\ y &= \sin\left[\frac{1}{2}\sqrt{3}(\alpha - \beta)\right] \exp\left[-\frac{1}{2}(\alpha + \beta)\right], \\ z &= \exp(\alpha + \beta). \end{aligned} \tag{3.83}$$

这代表一个旋转曲面, 见图 3.2. 从图形上看, 我们称其为 Jonas 帽 (Jonas Hexenhut[4]).[5] 它的通解可用线性变换

$$\boldsymbol{r} \to D\boldsymbol{r} \tag{3.84}$$

得到, 这里 D 是一个非退化常数矩阵.

Tzitzeica 方程的单孤立子解可以通过选取

$$\phi = (\exp \mathrm{i}\delta) \cosh \gamma, \tag{3.85}$$

$$\gamma = \frac{1}{2}\sqrt{3}(\nu^{1/3}\alpha + \nu^{-1/3}\beta), \quad \delta = \frac{1}{2}(\nu^{1/3}\alpha - \nu^{-1/3}\beta), \quad \mu = \mathrm{i}\nu \tag{3.86}$$

---

[4] 德文 Hexenhut 意为魔术师戴的帽子.—— 译者

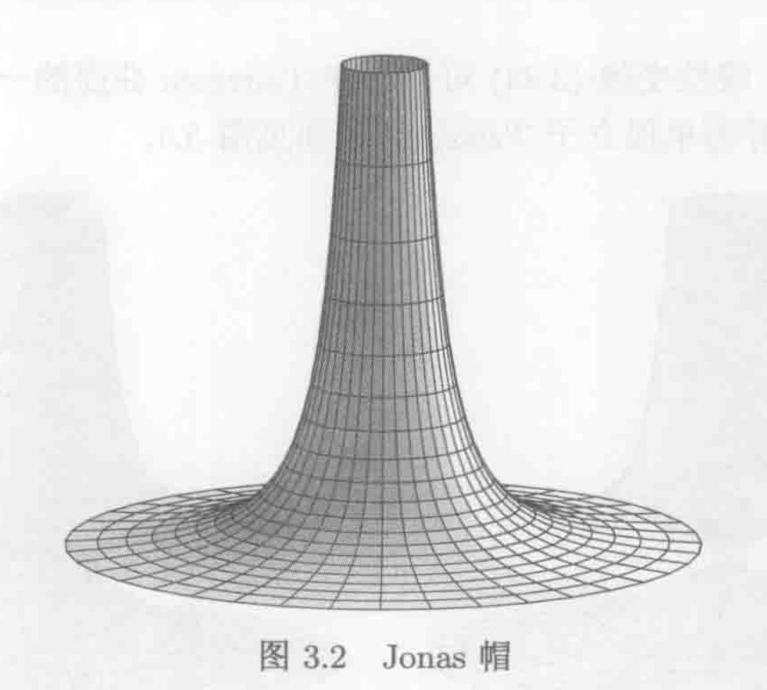


图 3.2 Jonas 帽

得到. 即使 ϕ 是复的, Tzitzeica 变换 $(3.72)_2$, 即

$$h' = 1 - \frac{3}{2\cosh^2\gamma} \tag{3.87}$$

仍是实的. 除了一个相加常数外, 它的形状是隆起的单孤立子解. 由于 h 是实的, 将 (3.83) 给出的位置向量代入变换公式 $(3.72)_1$ 并取实部就可生成一族新的曲面 Σ'. 这样, 除相差一常数因子外, 我们得到

$$\begin{aligned} x' &= [c_1\cos\kappa - c_2\sin\kappa + (c_3\cos\kappa - c_4\sin\kappa)\tanh\gamma]\exp\left[-\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\right], \\ y' &= [c_1\sin\kappa + c_2\cos\kappa + (c_3\sin\kappa + c_4\cos\kappa)\tanh\gamma]\exp\left[-\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\right], \\ z' &= (c_5 - c_6\tanh\gamma)\exp(\alpha+\beta), \qquad \kappa = \frac{1}{2}\sqrt{3}(\alpha-\beta), \end{aligned} \tag{3.88}$$

其中常数

$$\begin{aligned} &c_1 = 2 + 2\nu^2 - \nu^{2/3} - \nu^{4/3}, \qquad c_2 = \sqrt{3}(\nu^{2/3} - \nu^{4/3}), \\ &c_3 = \sqrt{3}(\nu^{1/3} + \nu^{5/3}), \qquad c_4 = 3(\nu^{1/3} - \nu^{5/3}), \\ &c_5 = 1 + \nu^2 + \nu^{2/3} + \nu^{4/3}, \qquad c_6 = \sqrt{3}(\nu^{1/3} + \nu^{5/3}). \end{aligned} \tag{3.89}$$

$\nu = 1$ 时的曲面是旋转曲面, 它对应于 Tzitzeica 方程的静态单孤立子解. 我们将此曲面叫做 Jonas 杯 (Jonas Kelch[6]). 对 $\nu \neq 1$, 曲面对应于运动单孤立子解. 静态单孤立子 Tzitzeica 曲面与一个典型的运动单孤立子 Tzitzeica 曲面见图 3.3. 同前面一样, 这里的参数曲线是 $\alpha+\beta=$ 常数 和 $\alpha-\beta=$ 常数. 注意单孤立子曲面的边和顶点由

$$h' = -\frac{1}{2}[1 - \sqrt{3}\tanh\gamma][1 + \sqrt{3}\tanh\gamma] \tag{3.90}$$

的零点确定. 此外, 线性变换 (3.84) 可以看作 Tzitzeica 曲面的一个形变. 一个典型的具有 “剪切” 的静态单孤立子 Tzitzeica 曲面见图 3.4.

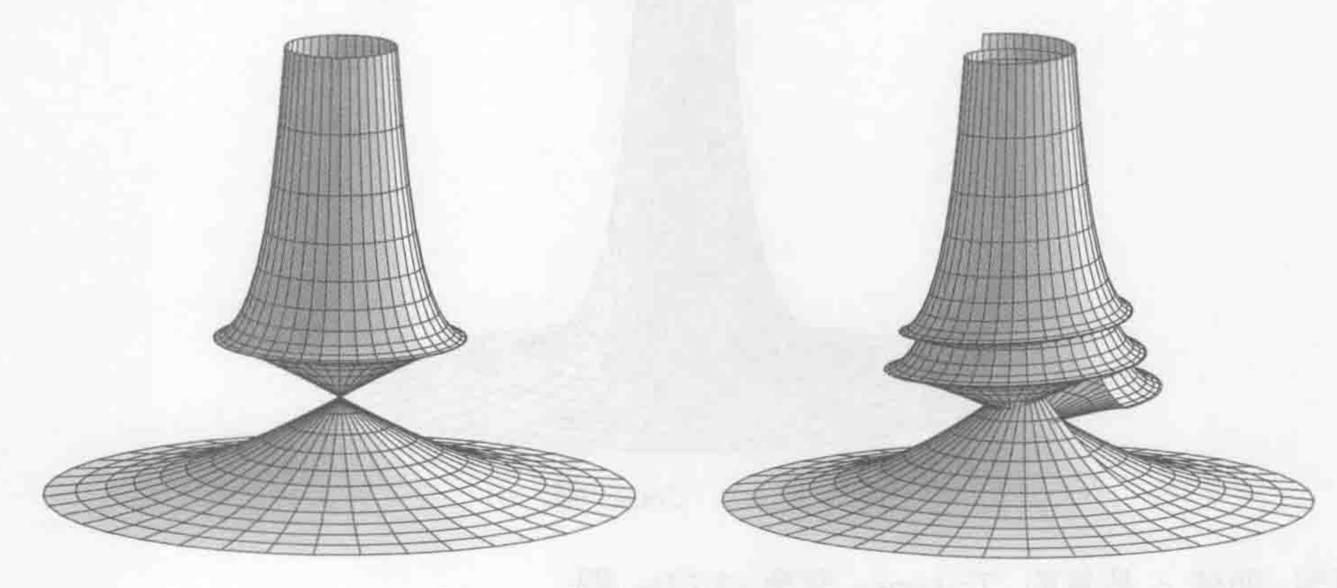


图 3.3　单孤立子 Tzitzeica 曲面

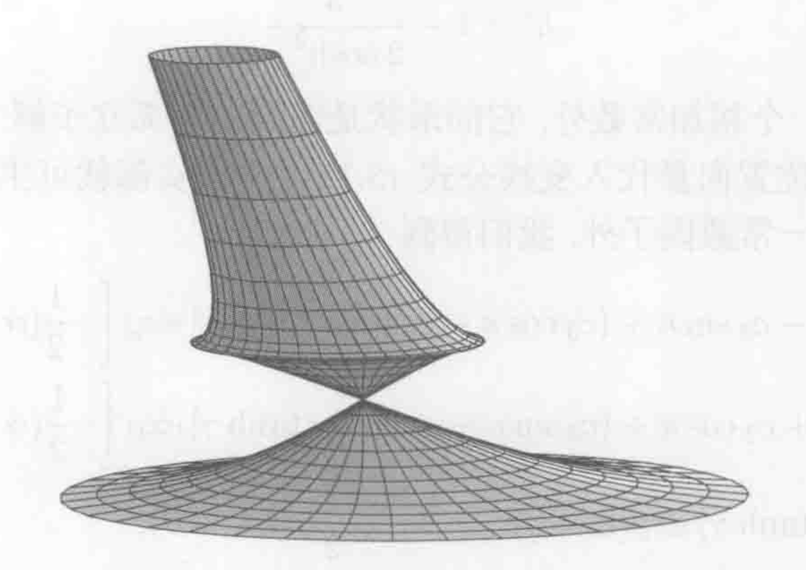


图 3.4　有 “剪切” 的静态单孤立子 Tzitzeica 曲面

Tzitzeica 方程的双孤立子解可以通过应用两次 Tzitzeica 变换得到. 特别地, 如果适当选取 Bäcklund 参数, 就可以得到静态呼吸子解

$$h'' = 1 - \frac{3\sin 2\nu(\sin 2\nu + pq\cosh\gamma\cos\delta)}{(p\sin\nu\cosh\gamma + q\cos\nu\cos\delta)^2}, \tag{3.91}$$

其中

$$\begin{aligned} \gamma &= \sqrt{3}(\alpha+\beta)\cos\nu, \qquad p^2 = 4\sin^2\nu - 1, \\ \delta &= \sqrt{3}(\alpha-\beta)\sin\nu, \qquad q^2 = 4\cos^2\nu - 1. \end{aligned} \tag{3.92}$$

这个解关于 $\alpha+\beta$ 是局域的, 而关于 $\alpha-\beta$ 是周期的, 见图 3.5.

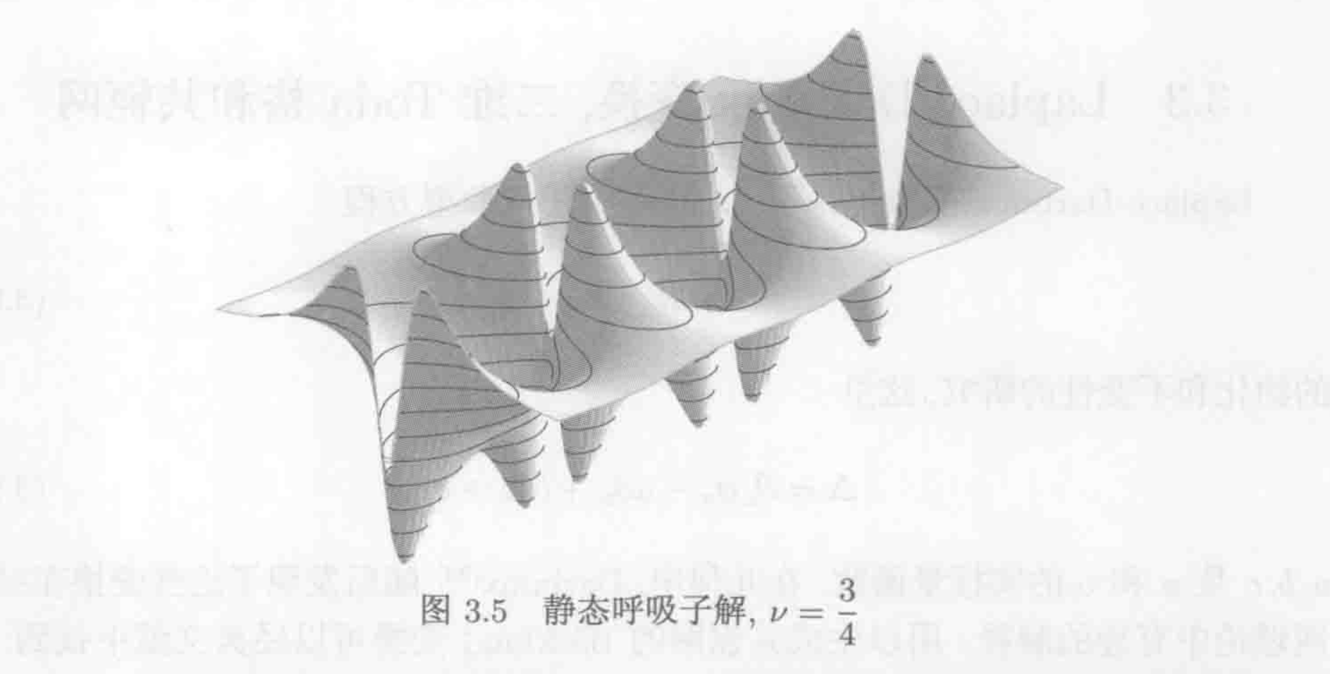


图 3.5 静态呼吸子解, $\nu = \dfrac{3}{4}$

用 Tzitzeica 变换可以构造对应于 Tzitzeica 方程解的仿射球位置向量的显式表达式. 典型的静态呼吸子 Tzitzeica 曲面见图 3.6.

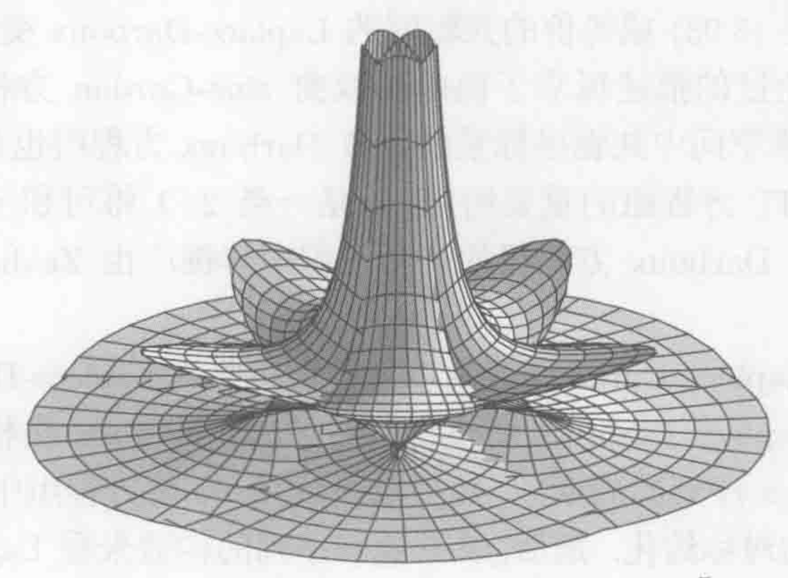


图 3.6 静态呼吸子 Tzitzeica 曲面, $\nu = \dfrac{5}{6}$

练 习

1. (a) 证明

$$\phi' = \phi^{-1}$$

是 Gauss 方程组 (3.60) 在参数取 $\mu' = -\mu$ 时的一个解.

(b) 已知 Tzitzeica 变换 (3.72) 可由条件 $\delta \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}' - \boldsymbol{r}$ 与曲面 Σ 相切唯一确定. 请导出 Tzitzeica 逆变换

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}' - \frac{2}{(\lambda - \mu')h'}\left(\lambda \frac{\phi'_\alpha}{\phi'}\boldsymbol{r}'_\beta - \mu' \frac{\phi'_\beta}{\phi'}\boldsymbol{r}'_\alpha\right),$$

3.3 Laplace-Darboux 变换, 二维 Toda 格和共轭网

Laplace-Darboux 变换起源于 Laplace 关于双曲型方程

$$\Delta r = 0 \tag{3.93}$$

的约化和不变性的研究, 这里

$$\Delta = \partial_u \partial_v + a\partial_u + b\partial_v + c, \tag{3.94}$$

a, b, c 是 u 和 v 的实标量函数. 在几何中, Darboux[93] 随后发现了这些变换在共轭网理论中有趣的解释. 用以生成共轭网的 Bäcklund 变换可以经典文献中找到, 关于共轭网的变换理论的进一步说明可见 Eisenhart[119] 或 Lane[227] 的书.

这里, 我们仅关注共轭网的变换理论与某些孤立子系统的联系. 可积二维 Toda 格模型可以从方程 (3.93) 或等价的共轭网的 Laplace-Darboux 变换序列自然得到, 它包含前几节讨论过的描述孤立子曲面的双曲 sine-Gordon 方程和 Tzitzeica 方程. 此外, 决定三维空间中共轭坐标系的经典 Darboux 方程组也是孤立子系统. 事实上, 它不但是 SIT 方程组的重要约化, 也是一类 2+1 维可积 sine-Gordon 方程组的约化[214, 340]. Darboux 方程组的一个可积矩阵推广由 Zakharov 和 Manakov 建立[392].

下面将引入 Laplace-Darboux 变换以及密切相关的 Laplace-Darboux 不变量的概念, 重复运用 Laplace-Darboux 变换将自然导出二维 Toda 格模型. 我们还将引入 Laplace-Darboux 序列的周期性, 然后概述从 Toda 格方程组中明显的 Lie 代数结构所导出特殊的对称约化. 最后, 从共轭网序列的构造来看 Laplace-Darboux 变换的几何解释.

3.3.1 Laplace-Darboux 变换

(3.94) 式给出的算子 Δ 有两个分解,

$$\Delta = (\partial_u + b)(\partial_v + a) - h, \tag{3.95}$$

$$\Delta = (\partial_v + a)(\partial_u + b) - k, \tag{3.96}$$

其中

$$h = a_u + ba - c, \quad k = b_v + ab - c. \tag{3.97}$$

这两个分解在以后有重要作用. 非零的 h, k 的存在使得 Δ 不能写成两个一阶微分

h, k 在方程 (3.93) 的规范变换

$$r \to r' = gr \tag{3.98}$$

下是不变的, 这里 g 是 u 和 v 的任意可逆函数. 在算子层次上, 上面的关系等价于 h, k 在规范变换

$$\mathcal{G} : \Delta \to \Delta' = g\Delta g^{-1} \tag{3.99}$$

下是不变的. 这个规范变换 $\mathcal{G}$ 就是从保持 Δ 形式的 r 的变换 (3.98) 导出的. 于是, 不变量 h, k 可用来表示由规范变换相联系的算子的等价类 $[h, k]$[19].

引入 Laplace-Darboux 变换的目的是为了将方程 (3.93) 约化为两个 Laplace 不变量 h, k 之一为零的方程. 两类经典 Laplace-Darboux 变换, 这里记作 σ_1 和 σ_{-1}, 对应于用分解 (3.95)、(3.96) 将 $\Delta r = 0$ 表示为一阶方程组的过程, 即[164]

$$\left.\begin{aligned} (\partial_u + b)r_1 - h(\Delta)r = 0, \\ r_1 - (\partial_v + a)r = 0 \end{aligned}\right\} \sigma_1 \tag{3.100}$$

和

$$\left.\begin{aligned} (\partial_v + a)r_{-1} - k(\Delta)r = 0, \\ r_{-1} - (\partial_u + b)r = 0. \end{aligned}\right\} \sigma_{-1} \tag{3.101}$$

容易看到, 在 (3.100) 式和 (3.101) 式给出的 Laplace-Darboux 变换 σ_1, σ_{-1} 作用下, 分别成立 $\Delta \to \Delta_1, \Delta \to \Delta_{-1}$, 其中

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= \partial_u\partial_v + (a - [\ln h(\Delta)]_v)\partial_u + b\partial_v + (c - a_u + b_v - b[\ln h(\Delta)]_v), \\ \Delta_{-1} &= \partial_u\partial_v + a\partial_u + (b - [\ln k(\Delta)]_u)\partial_v + (c - b_v + a_u - a[\ln k(\Delta)]_u), \end{aligned} \tag{3.102}$$

而算子 Δ_1 和 Δ_{-1} 的 Laplace-Darboux 不变量是

$$\begin{aligned} h(\Delta_1) = 2h(\Delta) - k(\Delta) - [\ln h(\Delta)]_{uv}, \quad k(\Delta_1) = h(\Delta), \\ h(\Delta_{-1}) = k(\Delta), \quad k(\Delta_{-1}) = 2k(\Delta) - h(\Delta) - [\ln k(\Delta)]_{uv}. \end{aligned} \tag{3.103}$$

3.3.2 Laplace-Darboux 变换的重复作用和二维 Toda 格

记 $[h_n, k_n]$ 为 σ_1 作用 n 次后的等价类. 由 (3.103) 式,

$$h_{n+1} = 2h_n - k_n - (\ln h_n)_{uv}, \quad k_{n+1} = h_n, \tag{3.104}$$

于是有递推关系

这就是可积二维 Toda 格方程组.

Toda 格方程组按不同的 Lie 代数结构有各种不同的约化. 如果记重复作用 σ_1 和 σ_{-1} 的算子为

$$\Delta_n = \sigma_1^n(\Delta), \quad \Delta_{-n} = \sigma_{-1}^n(\Delta), \tag{3.106}$$

则当

$$\Delta_p = \Delta \tag{3.107}$$

时, 称算子 Δ 具有周期 p. 利用 Laplace-Darboux 不变量, 周期性可表示为

$$h_{n+p} = h_n. \tag{3.108}$$

于是, 周期 Toda 格成为

$$\begin{pmatrix} \ln h_1 \\ \vdots \\ \ln h_p \end{pmatrix}_{uv} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & & -1 \\ -1 & 2 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ -1 & & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_p \end{pmatrix}, \tag{3.109}$$

上述矩阵中的点表示矩阵元 -1 或 2, 而其他矩阵元均为零. 于是

$$\sum_{k=1}^{p} (\ln h_k)_{uv} = 0, \tag{3.110}$$

从而

$$\prod_{k=1}^{p} h_k = f(u)g(v). \tag{3.111}$$

可以通过适当的变量代换

$$(u, v, h_k) \to (u'(u), v'(v), F(u)G(v)h_k) \tag{3.112}$$

将 (3.111) 式的右端标准化为 ± 1 (若 p 是偶数) 或 1 (若 p 是奇数). 显然周期 p 的 Toda 格由关于 $p-1$ 个未知函数的 $p-1$ 个方程组成.

周期 Toda 格 (3.109) 中的常数矩阵是秩为 $p-1$ 的无限维仿射 Kac-Moody 代数 $A_{p-1}^{(1)}$ 的 Cartan 矩阵[186]. 对于 $A_1^{(1)}$, 周期为 2, 这时 Toda 格成为 sine-Gordon 方程

$$\varphi_{uv} = 4\sinh\varphi, \tag{3.113}$$

这里取了标准化条件

对于周期 3, 有 Fordy-Gibbons 方程组[140]

$$
\begin{aligned}
(\ln h_1)_{uv} &= -h_2 + 2h_1 - \frac{1}{h_1 h_2}, \\
(\ln h_2)_{uv} &= -\frac{1}{h_1 h_2} + 2h_2 - h_1,
\end{aligned}
\tag{3.115}
$$

其中取了标准化条件

$$
h_1 h_2 h_3 = 1. \tag{3.116}
$$

进一步, Kac-Moody 代数 $A_2^{(1)}$ 包含扭 Kac-Moody 子代数 $A_2^{(2)}$, 它对应于在 Fordy-Gibbons 方程组 (3.115) 中取 $h_1 = h_2 = h$, 这时, 方程成为 Tzitzeica 方程

$$
(\ln h)_{uv} = h - h^{-2}. \tag{3.117}
$$

一般地, 对于 Killing 和 Cartan 分类下的任一有限维单 Lie 代数[179] 或者任一无限维仿射 Kac-Moody 代数, 都有一个约化的 Toda 格 (3.105). 此结果由 Athorne 给出[19].

3.3.3 二维 Toda 格, 它的线性表示和 Bäcklund 变换

由变换 (3.102), 条件 $b = 0$ 在 Laplace-Darboux 变换 σ_1 下是不变的. 于是我们研究 Laplace-Darboux 变换

$$
\phi_{n+1} = (\partial_v + a_n)\phi_n \equiv \mathcal{L}\phi_n \tag{3.118}
$$

作用在双曲型方程

$$
\phi_{nuv} + a_n \phi_{nu} + c_n \phi_n = 0 \tag{3.119}
$$

上产生的 Toda 格. Laplace-Darboux 关系形为

$$
\phi_{nu} = h_{n-1}\phi_{n-1}, \quad \phi_{nv} = \phi_{n+1} - a_n \phi_n, \tag{3.120}
$$

它相容的充要条件是

$$
a_{nu} = h_n - h_{n-1}, \quad a_n - a_{n-1} = -(\ln h_{n-1})_v, \tag{3.121}
$$

由此即可得出

$$
(\ln h_{n-1})_{uv} = -h_n + 2h_{n-1} - h_{n-2}. \tag{3.122}
$$

从而, 线性方程组 (3.120) 可以看作是 Toda 格 (3.122) 的 Lax 对.

下面考虑如何得到 Toda 格的 Bäcklund 变换. 因为 Toda 格包含了通过重复作用 Laplace-Darboux 变换 $\mathcal{L}$ 到方程

得到的 Laplace-Darboux 不变量 h_n, 所以方程 (3.123) 的任何不变性产生与 Laplace-Darboux 不变量 h'_n 相联系的另一族形为 (3.119) 的双曲型方程. 我们要寻找保持方程 (3.123) 形式不变的变换 $\phi \to \phi'$, 其中

$$\phi' = (\partial_v + A)\phi, \tag{3.124}$$

$A = A(u, v)$ 是待定的函数. 将 (3.124) 式代入带撇的 (3.123) 式, 并利用 (3.123) 式得到

$$\begin{gathered} c' - c + A_u = 0, \\ (A - a)(a' - a) + (A - a)_v = 0, \\ (A_u - c)_v + a'(A_u - c) + c'A - c(A - a) = 0. \end{gathered} \tag{3.125}$$

下面分 $A = a$ 和 $A \neq a$ 来讨论. 如果 $A = a$, 我们就重新得到了 Laplace-Darboux 变换

$$\begin{gathered} \phi' = \mathcal{L}\phi = (\partial_v + a)\phi, \\ a' = a - [\ln(a_u - c)]_v, \quad c' = c - a_u. \end{gathered} \tag{3.126}$$

如果 $A \neq a$, (3.125) 的前两式可以看作为 c' 和 a' 的定义, 剩下的式子等价于守恒律

$$\left(\frac{A_u - c}{A - a} \right)_v = A_u. \tag{3.127}$$

引入势 ψ 使得

$$A = -(\ln \psi)_v, \quad \frac{A_u - c}{A - a} = -(\ln \psi)_u, \tag{3.128}$$

则 ψ 满足线性方程

$$\psi_{uv} + a\psi_u + c\psi = 0. \tag{3.129}$$

于是, 我们得到了 Darboux 型变换

$$\begin{gathered} \phi' = \mathcal{B}\phi = \left(\partial_v - \frac{\psi_v}{\psi} \right) \phi, \\ a' = a - \left[\ln \left(\frac{\psi_v + a\psi}{\psi} \right) \right]_v, \quad c' = c + (\ln \psi)_{uv}, \end{gathered} \tag{3.130}$$

其中 ψ 是方程 (3.123) 的另一个解. 这样, 另一族特征函数的 Laplace-Darboux 变换就可通过

$$\phi'_n = \mathcal{L}^n \mathcal{B} \phi \tag{3.131}$$

生成, 相应的系数是 a'_n, c'_n, 而 Laplace-Darboux 不变量是 h'_n.

Laplace-Darboux 变换 $\mathcal{L}$ 与 Darboux 变换 $\mathcal{B}$ 是可以交换的, 即

$$\mathcal{LB} = \mathcal{BL}, \tag{3.132}$$

从而

$$\phi_n' = \mathcal{B}\phi_n. \tag{3.133}$$

于是, 将 Darboux 变换 $\mathcal{B}$ 作用于 Laplace-Darboux 族 (3.119) 产生一族新的双曲型方程, 它们互相之间也通过 Laplace-Darboux 变换相联系. 借助于 Toda 格的 Lax 对 (3.120), 上述结论可表述为如下的定理.

定理 6 Lax 对 (3.120) 和二维 Toda 格 (3.122) 在

$$\begin{aligned} \phi_n \to \phi_n' &= \phi_{n+1} - \frac{\psi_{n+1}}{\psi_n}\phi_n, \\ a_n \to a_n' &= a_{n+1} - \frac{\psi_{n+2}}{\psi_{n+1}} + \frac{\psi_{n+1}}{\psi_n}, \\ h_n \to h_n' &= \frac{\psi_{n+2}\,\psi_n}{\psi_{n+1}^2} h_n \end{aligned} \tag{3.134}$$

下保持不变, 其中 ψ_n 是方程组 (3.120) 的另一个解.

在周期情形, 可以合理地假设

$$\phi_{n+p} = \lambda\phi_n, \tag{3.135}$$

其中 λ 是任一常数. 这时 Lax 对 (3.120) 形为

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \vdots \\ \phi_p \end{pmatrix}_u &= \begin{pmatrix} 0 & & & \lambda^{-1}h_p \\ h_1 & 0 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & h_{p-1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \vdots \\ \phi_p \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \vdots \\ \phi_p \end{pmatrix}_v &= \begin{pmatrix} -a_1 & 1 & & \\ & -a_2 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ \lambda & & & -a_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \vdots \\ \phi_p \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{3.136}$$

它的相容性条件产生周期 Toda 格 (3.109). 进一步, 当 ψ_n 是方程 (3.136) 带任意参数 μ 的一个解, 即它满足

$$\psi_{n+p} = \mu\psi_n \tag{3.137}$$

时, 由变换 (3.134) 得出

$$\phi_{n+p}' = \lambda\phi_n', \quad h_{n+p}' = h_n', \quad \prod^p h_k' = \prod^p h_k. \tag{3.138}$$

由此, 我们得到结论: Darboux 变换 $\mathcal{B}$ 保持周期性, 并保持任何形为 (3.111) 的标准化不变.

3.3.4 共轭网

如果要求曲面 Σ 上的参数曲线成为共轭曲线网, 则 $f=0$, 从而 Gauss 方程组 $(1.4)_2$ 成为

$$\boldsymbol{r}_{uv}=\Gamma_{12}^{1}\boldsymbol{r}_u+\Gamma_{12}^{2}\boldsymbol{r}_v. \tag{3.139}$$

在 Eisenhart 的书[119] 中给出, 如果 $r_i(u,v)$, $i=1,2,3$ 是方程 (3.93) 当 $c=0$ 时的三个线性无关的实解, 那么

$$\boldsymbol{r}=(r_1(u,v),r_2(u,v),r_3(u,v)) \tag{3.140}$$

决定了曲面 Σ, 而参数曲线形成共轭网. Gauss 方程组 (3.139) 给出

$$a=-\Gamma_{12}^{1},\quad b=-\Gamma_{12}^{2}. \tag{3.141}$$

在射影空间 $\mathbb{P}^3$ 中, 对于形为 (3.93)、(3.94) 的双曲型方程, 都有坐标曲线的共轭网与之相联系[136].

按 Eisenhart 的书[119], 我们使用 Laplace-Darboux 变换的一个不变量. 设 $\Sigma:\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,v)$ 是一个曲面, 参数曲线构成共轭网 $\mathcal{N}$, 那么 $\Sigma_1:\boldsymbol{r}_1=\boldsymbol{r}_1(u,v)$ 与 $\Sigma_{-1}:\boldsymbol{r}_{-1}=\boldsymbol{r}_{-1}(u,v)$ 也以 u,v 为共轭坐标系, 其中位置向量 $\boldsymbol{r}_1$ 和 $\boldsymbol{r}_{-1}$ 由 Laplace-Darboux 变换

$$\boldsymbol{r}_1=\boldsymbol{r}+\frac{1}{a}\boldsymbol{r}_v,\quad \boldsymbol{r}_{-1}=\boldsymbol{r}+\frac{1}{b}\boldsymbol{r}_u \tag{3.142}$$

确定. 这些 Laplace-Darboux 变换可以按

$$\boldsymbol{r}_1=\frac{1}{a}\sigma_1\boldsymbol{r},\quad \boldsymbol{r}_{-1}=\frac{1}{b}\sigma_{-1}\boldsymbol{r} \tag{3.143}$$

进行分解. 为了给出 Laplace-Darboux 变换的几何解释, 我们需要用到

$$\boldsymbol{r}_{1u}=\left[\left(\frac{1}{a}\right)_u-\frac{b}{a}\right]\boldsymbol{r}_v,\quad \boldsymbol{r}_{-1v}=\left[\left(\frac{1}{b}\right)_v-\frac{a}{b}\right]\boldsymbol{r}_u. \tag{3.144}$$

从而, Σ 上的共轭网 $\mathcal{N}$ 中曲线 $u=$ 常数 的切线同 Σ_1 上的共轭网 $\mathcal{N}_1$ 中曲线 $v=$ 常数 相切. 类似地, Σ 上的共轭网 $\mathcal{N}$ 中曲线 $v=$ 常数 的切线同 Σ_1 上的共轭网 $\mathcal{N}_1$ 中曲线 $u=$ 常数 相切. 可以重复运用 Laplace-Darboux 变换 (3.142) 得到一系列曲面, 它们的参数曲线都构成共轭网.

至此, 我们介绍完了 Laplace-Darboux 变换. 进一步, 有矩阵形式的 Laplace-Darboux 变换[207]. 在文献 [337] 中, 它们被用于将一族带参数的新的 Ernst 型方

程约化为广义相对论中标准的 Ernst 方程. 文献 [332] 中讨论了这些矩阵 Laplace-Darboux 变换的几何, 它们同广义 Weingarten 曲面以及 Painlevé 方程的 Bäcklund 变换有关. 对于 Painlevé 方程的局部和整体几何最近有很多研究[41−44,333].

练 习

1. 证明

$$h(g^{-1}\Delta g) = h(\Delta), \quad k(g^{-1}\Delta g) = k(\Delta).$$

2. (a) 验证在由 (3.100) 和 (3.101) 式定义的 Laplace-Darboux 变换 σ_1 和 σ_{-1} 作用下, 成立 $\Delta \to \Delta_1$ 和 $\Delta \to \Delta_{-1}$, 其中 Δ_1 和 Δ_2 由 (3.102) 式给出.

(b) 证明算子 Δ_1 和 Δ_{-1} 的 Laplace-Darboux 不变量由 (3.103) 式给出.

(c) 证明

$$(\Delta_{-1})_1 = k(\Delta) \circ \Delta \circ k(\Delta)^{-1}, \quad (\Delta_1)_{-1} = h(\Delta) \circ \Delta \circ h(\Delta)^{-1}.$$

由此得出 σ_1 和 σ_{-1} 在等价类 $[h, k]$ 构成的集合上互为逆映射.

3. (a) 证明 Laplace-Darboux 变换 $\mathcal{L}$ 的共轭与 Darboux 变换 $\mathcal{B}$ 的作用次序是可以交换的.

(b) 导出 (3.134) 式.

第4章　Hasimoto 曲面与非线性 Schrödinger 方程, 它们的几何及相关的孤立子方程

非线性 Schrödinger (NLS) 方程

$$\boxed{\mathrm{i}q_t + q_{xx} + \nu|q|^2 q = 0} \tag{4.1}$$

出现于许多物理现象中, 它最初可能是由 Kelley[194], Baspalov 和 Talanov[24] 以及 Talanov[360] 在研究非线性介质里光束的自聚焦问题中独立地建立起来的. 但是, 在第 2 章中我们谈到, 如果考虑同曲线的可积运动的联系, Da Rios[97] 早在 1906 年在研究无界液体中孤立涡丝的运动时导出了一个耦合的非线性发展方程, 由此即可得到 NLS 方程.

在光学中导出了 NLS 方程后, 此方程相继在单色波的调制[18, 161, 191, 361] 和等离子体中 Langmuir 波的传播[142, 178, 348] 中被发现. NLS 方程同超导中的 Ginzburg-Landau 方程[99] 有密切联系, 在低温物理中被 Tsuzuki 所研究[368], 它也出现在弱非均匀等离子体中非线性波包传播的研究中[76, 263]. Zakharov[390] 在研究深水引力波时也得到了 NLS 方程, 随后 Hasimoto 和 Ono[163] 以及 Davey[96] 用多尺度方法又得到了此方程, 再后, Yuen 和 Lake[387] 用 Whitham 的平均变分原理得到了此方程. Grimshaw 关于缓变孤立波的工作[154] 表明 NLS 方程起着标准方程的作用. 最近又在毛细管模型中得到了此方程[13].

上面我们强调了 NLS 方程在物理中的重要性. 下面将看到, 它也可以用纯几何方法得到, 而导出的方法与 Hasimoto[162] 关于无粘性流体中涡旋的三维运动的物理过程相关.

与 NLS 方程相关的孤立子曲面称为 Hasimoto 曲面. Hasimoto 曲面适当的运动导出未泵浦 Maxwell-Bloch 方程组, 而它与受激 Raman 散射 (SRS) 以及自感应透明 (SIT) 方程组相关[349, 350]. 1976 年在研究相对论涡旋的动力学时建立的可积 Pohlmeyer-Lund-Regge 方程组也同 SIT 方程组有关[240, 285].

这里, 我们用一条不可伸长曲线的从法向运动以纯几何方法导出 Da Rios 方程以及相关的 NLS 方程. 然后构造 Hasimoto 曲面并得到它主要的几何性质. 接着列出 NLS 方程与其他孤立子系统, 包括 Heisenberg 自旋方程的联系. Marris 和 Passman 于 1969 年研究流体动力学性质的方法[247] 被用来以纯几何方法导出 NLS 方程的自 Bäcklund 变换. 接着导出 NLS 方程的呼吸子解和烟圈解, 用此方法, Rogers

最近发现[300], 由 Gilbarg[151]、Prim[288]、Howard [175]、Wasserman[379] 和 Marris[246] 研究过的一个带标准几何约束的流体动力学方程组包含了 NLS 方程. 文献 [313] 给出了它与一个带几何约束的 NLS 方程的等价性, 在此基础上, Schief[335] 得到了此流体动力学方程组的新的精确解, 此方程组等价于一个磁流体静力学方程组, 其中等压面和等磁面构成超环面, 或更一般的螺旋面.

4.1 从法向运动与非线性 Schrödinger 方程以及 Heisenberg 自旋方程

Hasimoto 在 1972 年的工作中, 研究了不可压缩流体中不可伸长的孤立细涡丝的自感应运动的近似.[1] 如果一个涡丝的位置向量为 $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(s,t)$, 那么曲线的速度满足

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{r}_t = \kappa \boldsymbol{b}. \tag{4.2}$$

于是, 按 2.4 节的记号, $\boldsymbol{r}_t$ 的 $\{\boldsymbol{t}, \boldsymbol{n}, \boldsymbol{b}\}$ 分量为

$$\{\lambda, \mu, \nu\} = \{0, 0, \kappa\}, \tag{4.3}$$

而 (2.84) 式给出

$$\alpha = -\kappa\tau, \tag{4.4}$$

$$\beta = \kappa_s, \tag{4.5}$$

相容性条件 (2.3) 给出

$$\gamma = \frac{\kappa_{ss} - \kappa\tau^2}{\kappa}, \tag{4.6}$$

曲率 κ 和挠率 τ 的时间演化则分别为

$$\kappa_t = -2\kappa_s\tau - \kappa\tau_s, \tag{4.7}$$

$$\tau_t = \left(-\tau^2 + \frac{\kappa_{ss}}{\kappa} + \frac{\kappa^2}{2}\right)_s. \tag{4.8}$$

耦合非线性方程组 (4.7), (4.8) 就是 1906 年在 [97] 中导出的 Da Rios 方程组. 这里 $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ 表示单位向量组 $\{\boldsymbol{t}, \boldsymbol{n}, \boldsymbol{b}\}$ 的时间演化 (2.2) 中的分量, 并与 Serret-Frenet 关系 (2.1) 一致.

现在引入 Hasimoto 变换

$$q = \kappa e^{i\sigma}, \tag{4.9}$$

---

[1] K… 和 T…[193] 对于超纯涡丝理论的几何描述以及与 NLS 方程的联系有一个很清楚的综述.

其中

$$\sigma = \int_{s_0}^{s} \tau(s^*, t)\mathrm{d}s^*, \tag{4.10}$$

那么, 利用 (4.7) 和 (4.8) 式, 我们得到

$$\begin{aligned} q_t &= \left[\kappa_t + \mathrm{i}\kappa\left(-\tau^2 + \frac{\kappa_{ss}}{\kappa} + \frac{\kappa^2}{2} - T(t)\right)\right]e^{\mathrm{i}\sigma}, \\ q|q|^2 &= \kappa^3 e^{\mathrm{i}\sigma}, \\ q_{ss} &= (\kappa_{ss} + 2\mathrm{i}\kappa_s\tau + \mathrm{i}\kappa\tau_s - \kappa\tau^2)e^{\mathrm{i}\sigma}, \end{aligned} \tag{4.11}$$

其中

$$T(t) = \left(-\tau^2 + \frac{\kappa_{ss}}{\kappa} + \frac{\kappa^2}{2}\right)\bigg|_{s_0}. \tag{4.12}$$

由 (4.11) 式得到

$$q_t = \mathrm{i}\left[q_{ss} + \frac{1}{2}q|q|^2 - T(t)q\right]. \tag{4.13}$$

记

$$q^* = q\exp\left(\mathrm{i}\int_0^t T(t^*)\mathrm{d}t^*\right), \tag{4.14}$$

那么就得到 NLS 方程

$$\mathrm{i}q_t^* + q_{ss}^* + \frac{1}{2}|q^*|q^* = 0. \tag{4.15}$$

如果取 $T(t) = 0$, 则在 NLS 方程 (4.15) 中去掉星号后, 有线性表示

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \boldsymbol{t} \\ \boldsymbol{n} \\ \boldsymbol{b} \end{pmatrix}_s &= \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{t} \\ \boldsymbol{n} \\ \boldsymbol{b} \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} \boldsymbol{t} \\ \boldsymbol{n} \\ \boldsymbol{b} \end{pmatrix}_t &= \begin{pmatrix} 0 & -\kappa\tau & \kappa_s \\ \kappa\tau & 0 & \dfrac{\kappa_{ss}}{\kappa} - \tau^2 \\ -\kappa_s & -\dfrac{\kappa_{ss}}{\kappa} + \tau^2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{t} \\ \boldsymbol{n} \\ \boldsymbol{b} \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{4.16}$$

通过从法线运动 (4.2) 扫出的曲面称为 Hasimoto 曲面, 或更普遍地称为 NLS 曲面.

4.1.1 单孤立子 NLS 曲面

这里我们讨论 NLS 方程最初的 Hasimoto 解, 它对应于沿着涡丝以常速度 c 运动的孤立波, 而此涡丝在 $s \to \infty$ 时是平直的, 即

$$\kappa \to 0, \quad (s \to \pm\infty) \tag{4.17}$$

下面来求 $\kappa=\kappa(\xi)$, $\tau=\tau(\xi)$ 时发展方程 (4.7)、(4.8) 的解, 其中 $\xi=s-ct$. 在此假定下,

$$c\kappa'=2\kappa'\tau+\kappa\tau', \tag{4.18}$$

$$-c\tau'=\left[-\tau^2+\frac{\kappa''}{\kappa}+\frac{\kappa^2}{2}\right]'. \tag{4.19}$$

对 (4.18) 式积分, 并利用边界条件 (4.17) 以及假设 τ 在 $s\to\infty$ 时有界, 我们得到

$$(c-2\tau)\kappa^2=0.$$

所以, 除去 $\kappa=0$ 的平凡情形, 有

$$\tau=\frac{c}{2}=\tau_0, \tag{4.20}$$

其中 τ_0 是常数.

于是, 沿着涡丝挠率是常数, 而孤立波沿着涡丝运动的速度是挠率的两倍. 如果 $\kappa''/\kappa>0$, [2] 则 (4.19) 式给出

$$\frac{\kappa''}{\kappa}+\frac{\kappa^2}{2}=\epsilon^2, \tag{4.21}$$

其中 ϵ 是任意常数. 这个非线性常微分方程[3] 加上边界条件 (4.17) 有解

$$\kappa=2\epsilon\,\mathrm{sech}\,(\epsilon\xi). \tag{4.22}$$

所以

$$q=2\epsilon\,\mathrm{sech}\,[\epsilon(s-2\tau_0t)]\exp[\mathrm{i}\tau_0(s-s_0)] \tag{4.23}$$

是方程 (4.13) 在 $T(t)=-\tau_0^2+\epsilon^2$ 时的解. 对应的 NLS 方程 (4.15) 的单孤立子解是

$$q^*=2\epsilon\,\mathrm{sech}\,[\epsilon(s-2\tau_0t)]\exp\mathrm{i}[\tau_0(s-s_0)+(\epsilon^2-\tau_0^2)t]. \tag{4.24}$$

为了构造与 NLS 方程 (4.13) 的单孤立子解 (4.23) 相联系的孤立子曲面, 需要用线性表示 (4.16) 确定它的位置向量, 其中 τ 和 κ 分别由 (4.20) 式和 (4.22) 式给出. 第 6 章中将给出构造位置向量的普遍方法, 这里仅给出与 NLS 方程单孤立子解相联系的孤立子曲面的位置向量

$$\boldsymbol{r}(s,t)=2\begin{pmatrix}\dfrac{s}{2}-\dfrac{\epsilon}{\epsilon^2+\tau_0^2}\tanh(\epsilon\xi)\\ -\dfrac{\epsilon}{\epsilon^2+\tau_0^2}\,\mathrm{sech}\,(\epsilon\xi)\cos[\tau_0s+(\epsilon^2-\tau_0^2)t]\\ -\dfrac{\epsilon}{\epsilon^2+\tau_0^2}\,\mathrm{sech}\,(\epsilon\xi)\sin[\tau_0s+(\epsilon^2-\tau_0^2)t]\end{pmatrix}. \tag{4.25}$$

[2] 后面将看到, 当 NLS 孤立子曲面是双曲的, 即 $\mathcal{K}<0$ 时此条件是满足的.

图 4.1 和图 4.2 显示了与 NLS 方程的静态或运动单孤立子相联系的曲面. 这里有一个标度变换, 以使得解与 Sym[356] 最初给出的 NLS 方程

$$\mathrm{i}\tilde{q}_t + \tilde{q}_{ss} + 2|\tilde{q}|^2\tilde{q} = 0$$

的解相一致.

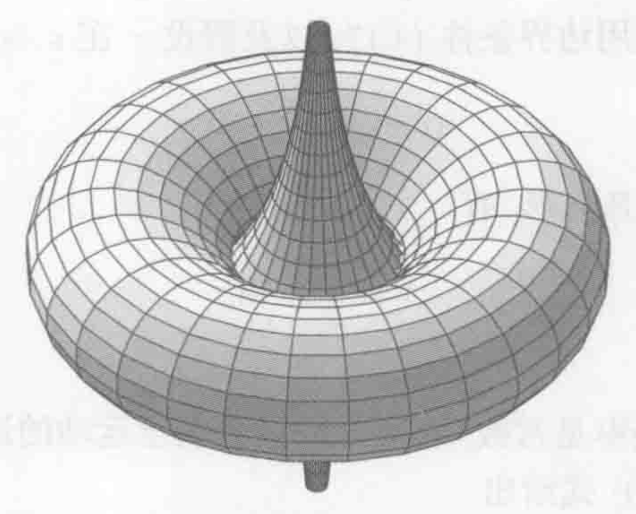


图 4.1 静态单孤立子 NLS 曲面 ($\tau = 0$)

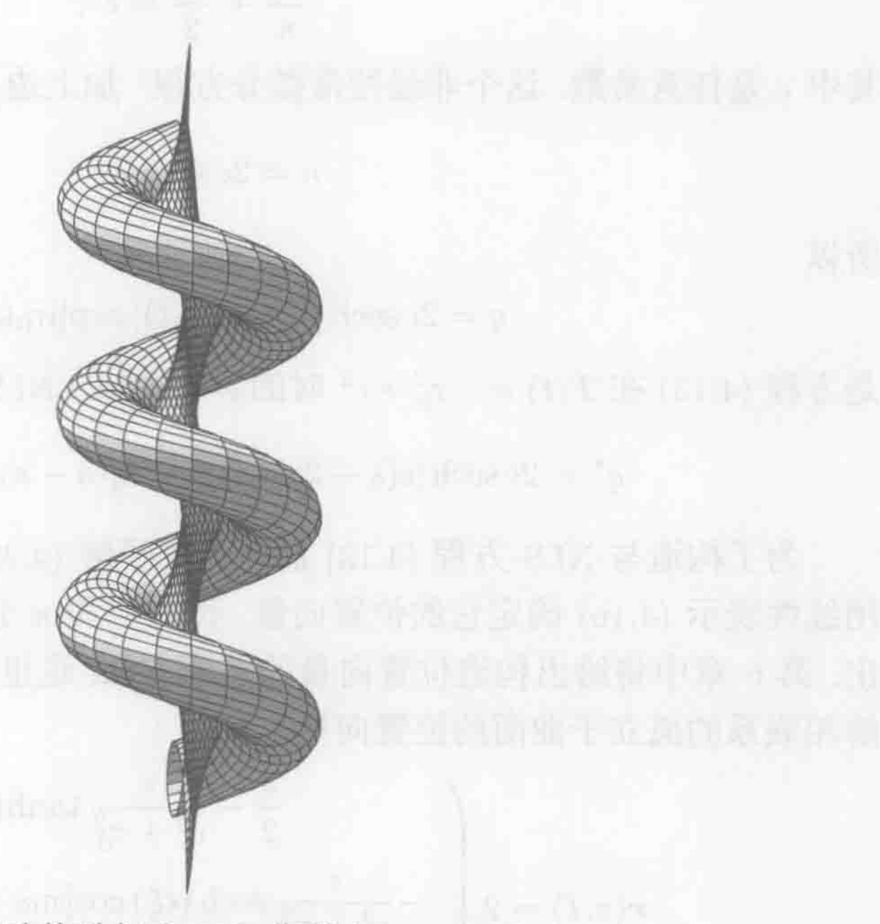


图 4.2 运动单孤立子 NLS 曲面 ($\tau = \tau_0 \neq 0$)

与 NLS 方程关于时间周期的呼吸子型解相联系的曲面在文献 [314] 中用 Bäcklund 变换得到. 图 4.3 中展示了几个 NLS 呼吸子曲面.

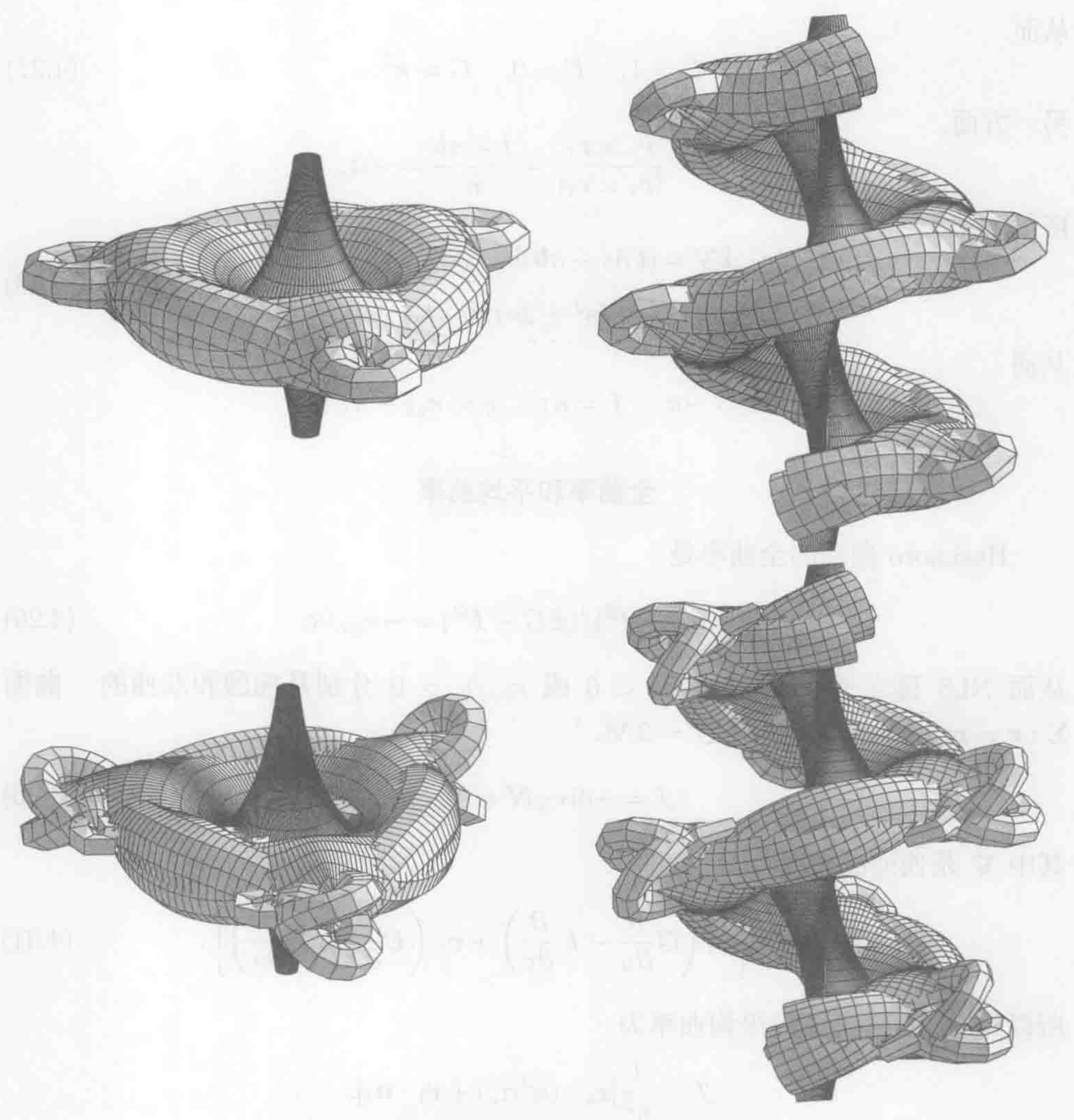


图 4.3 静态和运动的 NLS 呼吸子曲面

4.1.2 几何性质

我们将建立当时间 t 演化时涡丝扫过的 Hasimoto 曲面 $\Sigma : \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(s,t)$ 的一些几何性质, 同时也将讨论 Σ 上坐标曲线 $s =$ 常数 和 $t =$ 常数 的性质.

应用 (4.2) 式, 有

$$\begin{aligned}
\mathrm{I} = \mathrm{d}\boldsymbol{r} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} &= (\boldsymbol{r}_s\,\mathrm{d}s + \boldsymbol{r}_t\,\mathrm{d}t) \cdot (\boldsymbol{r}_s\,\mathrm{d}s + \boldsymbol{r}_t\,\mathrm{d}t) \\
&= (\boldsymbol{t}\,\mathrm{d}s + \kappa \boldsymbol{b}\,\mathrm{d}t) \cdot (\boldsymbol{t}\,\mathrm{d}s + \kappa \boldsymbol{b}\,\mathrm{d}t) \qquad (4.26) \\
&= \mathrm{d}s^2 + \kappa^2\,\mathrm{d}t^2
\end{aligned}$$

从而

$$E = 1, \quad F = 0, \quad G = \kappa^2. \tag{4.27}$$

另一方面,

$$\boldsymbol{N} = \frac{\boldsymbol{r}_s \times \boldsymbol{r}_t}{|\boldsymbol{r}_s \times \boldsymbol{r}_t|} = \frac{\boldsymbol{t} \times \kappa \boldsymbol{b}}{\kappa} = -\boldsymbol{n},$$

所以

$$\begin{aligned} \mathrm{II} = -\mathrm{d}\boldsymbol{r} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{N} &= (\boldsymbol{t}\,\mathrm{d}s + \kappa \boldsymbol{b}\,\mathrm{d}t) \cdot (\boldsymbol{n}_s\,\mathrm{d}s + \boldsymbol{n}_t\,\mathrm{d}t) \\ &= -\kappa\,\mathrm{d}s^2 + 2\kappa\tau\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t + (\kappa_{ss} - \kappa\tau^2)\mathrm{d}t^2, \end{aligned} \tag{4.28}$$

从而

$$e = -\kappa, \quad f = \kappa\tau, \quad g = \kappa_{ss} - \kappa\tau^2.$$

全曲率和平均曲率

Hasimoto 曲面的全曲率是

$$\mathcal{K} = (eg - f^2)/(EG - F^2) = -\kappa_{ss}/\kappa. \tag{4.29}$$

从而 NLS 孤立子曲面按 $\kappa_{ss}/\kappa < 0$ 或 $\kappa_{ss}/\kappa > 0$ 分别是椭圆和双曲的. 曲面 $\Sigma : \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v)$ 的平均曲率 $\mathcal{J} = 2\mathcal{M}$, [4]

$$\mathcal{J} = -\mathrm{div}_\Sigma \boldsymbol{N} = \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{n}, \tag{4.30}$$

其中 $\boldsymbol{\nabla}$ 是曲面的梯度

$$\boldsymbol{\nabla} = \frac{1}{H^2}\left[\boldsymbol{r}_u\left(G\frac{\partial}{\partial u} - F\frac{\partial}{\partial v}\right) + \boldsymbol{r}_v\left(E\frac{\partial}{\partial v} - F\frac{\partial}{\partial u}\right)\right]. \tag{4.31}$$

所以, Hasimoto 曲面的平均曲率为

$$\mathcal{J} = \frac{1}{\kappa^2}[\boldsymbol{r}_s \cdot (\kappa^2 \boldsymbol{n}_s) + \boldsymbol{r}_t \cdot \boldsymbol{n}_t],$$

即

$$\mathcal{J} = \frac{1}{\kappa}\left(\frac{\kappa_{ss}}{\kappa} - \kappa^2 - \tau^2\right). \tag{4.32}$$

测 地 性 质

利用文献 [380], NLS 曲面上的参数曲线 $v =$ 常数 的测地曲率为

$$\kappa_g\big|_{v=\text{常数}} = -\mathrm{div}_\Sigma\left(\frac{\boldsymbol{r}_2}{\sqrt{G}}\right) = -\frac{E_v}{2E\sqrt{G}}, \tag{4.33}$$

[4] 在 Eisenhart 的书[118] 和 Weatherburn 的书[380, 381] 中, 平均曲率取为 $\mathcal{J}$, 而在 Blaschke 的书[39] 中则取为 $\mathcal{M}$.

由 (4.27) 式得

$$\kappa_g\big|_{t=\text{常数}} = -\text{div}_\Sigma \boldsymbol{b} = 0. \tag{4.34}$$

于是, 每一条坐标曲线 $v = t =$ 常数 是 NLS 曲面上的测地线.

参数曲线 $u =$ 常数 的测地曲率是

$$\kappa_g\big|_{u=\text{常数}} = \text{div}_\Sigma\left(\frac{\boldsymbol{r}_1}{\sqrt{E}}\right) = \frac{G_u}{2G\sqrt{E}}, \tag{4.35}$$

从而对 NLS 曲面,

$$\kappa_g\big|_{s=\text{常数}} = \text{div}_\Sigma \boldsymbol{t} = \frac{\kappa_s}{\kappa}. \tag{4.36}$$

平 行 性 质

曲面 Σ 上具有单位切向量 $\boldsymbol{T}$ 的一族曲线称为平行的当且仅当[381]

$$\text{div}_\Sigma \boldsymbol{T} = 0.$$

由 (4.34) 式得到, NLS 曲面的坐标曲线 $u = s =$ 常数 是平行曲线.

4.1.3 Heisenberg 自旋方程

下面建立 NLS 方程与 $1+1$ 维 Landau-Lifschitz 方程

$$\frac{\partial \boldsymbol{S}}{\partial t}(\boldsymbol{r}, t) = \boldsymbol{S} \times \boldsymbol{\nabla}^2 \boldsymbol{S}, \tag{4.37}$$

即 Heisenberg 自旋方程[222, 359]

$$\boxed{\frac{\partial \boldsymbol{S}}{\partial t} = \boldsymbol{S} \times \frac{\partial^2 \boldsymbol{S}}{\partial s^2}} \tag{4.38}$$

之间的联系, 这里自旋向量 $\boldsymbol{S} = (S_1, S_2, S_3)$ 是满足

$$\boldsymbol{S}^2 = 1 \tag{4.39}$$

的单位向量. 如果将自旋向量 $\boldsymbol{S}$ 对应于单位切向量 $\boldsymbol{t}$, 那么运动方程 (4.38) 给出

$$\boldsymbol{t}_t = \boldsymbol{t} \times (\kappa \boldsymbol{n})_s = -\kappa\tau \boldsymbol{n} + \kappa_s \boldsymbol{b}. \tag{4.40}$$

加上 $\boldsymbol{n}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的时间演化可得

$$\boldsymbol{e}_{it} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{e}_i, \tag{4.41}$$

其中 $\boldsymbol{\omega} = \omega_1 \boldsymbol{e}_1 + \omega_2 \boldsymbol{e}_2 + \omega_3 \boldsymbol{e}_3$,

$$\omega_1 = \frac{\kappa_{ss}}{\kappa} - \tau^2, \quad \omega_2 = -\kappa_s, \quad \omega_3 = -\kappa\tau, \tag{4.42}$$

这里我们用了记号

$$e_1 = t, \quad e_2 = n, \quad e_3 = b. \tag{4.43}$$

结合 (4.41) 式和 Serret-Frenet 方程得到[5]

$$e_{is} = D \times e_i, \quad D = \tau e_1 + \kappa e_3, \tag{4.44}$$

它与 NLS 方程的线性表示 (4.16) 相一致.

Heisenberg 自旋方程 (4.38) 具有守恒律

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial t} + \frac{\partial j}{\partial s} = 0, \tag{4.45}$$

其中 $\epsilon(s,t)$ 是能量密度, $j(s,t)$ 是流密度, 它们分别是

$$\epsilon(s,t) = \frac{1}{2}\left|\frac{\partial S}{\partial s}\right|^2, \tag{4.46}$$

$$j(s,t) = S \cdot \left(\frac{\partial S}{\partial s} \times \frac{\partial^2 S}{\partial s^2}\right). \tag{4.47}$$

用曲率 κ 和挠率 τ 来表示时, 物理量 ϵ 和 j 为

$$\epsilon = \frac{1}{2}\kappa^2, \quad j = \kappa^2 \tau. \tag{4.48}$$

练 习

1. 证明与由 (4.25) 确定的位置向量 r 相关的标准正交标架 $\{t, n, b\}$ 满足线性方程组 (4.16).

4.2 Pohlmeyer-Lund-Regge 模型, 同 SIT 方程组和 SRS 方程组的联系, 以及同 NLS 方程的相容性

Lund 和 Regge 于 1976 年在研究相对论涡旋的动力学时导出了一个耦合孤立子系统[240], 它在一个特殊的约化下成为经典的 sine-Gordon 方程. 同年 Pohlmeyer[285] 在研究场论中的非线性 σ 模型时独立地导出了相同的方程组. 这个方程组现在被称为 Pohlmeyer-Lund-Regge 模型. 1967 年, McCall 和 Hahn[255] 从数学上研究了锐线自感应透明 (SIT) 方程组, 随后, Caudrey 等[69, 70] 给出了这个方程组的多孤立子解. Steudel[349] 发现受激 Raman 散射 (SRS) 方程组在忽略了 Raman 层次

---

[5] D 称为 Darboux 向量.

上的粒子数后与锐线 SIT 方程组相联系. 在文献 [350] 中, Steudel 应用 Wahlquist-Estabrook 方法构造了 SIT 方程组的线性表示, 随后, 构造了铯中受激 Raman 散射的孤立子. Kaup[192] 得到了受激 Raman 散射与双光子传输过程中初值问题的解.

这里, 我们将给出 Pohlmeyer-Lund-Regge、SIT 和 SRS 三个方程组的显式联系. 生成 SIT 方程组的未泵浦 Maxwell-Bloch 方程组与 NLS 方程相容, 就如同 sine-Gordon 与 mKdV 方程同伪球曲面适当的运动相容一样. 于是, 未泵浦 Maxwell-Bloch 方程组与 Hasimoto 曲面适当的运动相联系.

4.2.1 Pohlmeyer-Lund-Regge 模型

现在, 我们考虑以 (ξ,η) 为参数的曲面 $\Sigma : \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(\xi,\eta)$, 使得它的第一、第二基本形式分别为

$$\begin{aligned} \mathrm{I} &= \cos^2\theta\,\mathrm{d}\xi^2 + \sin^2\theta\,\mathrm{d}\eta^2, \\ \mathrm{II} &= e\,\mathrm{d}\xi^2 + 2f\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta + g\,\mathrm{d}\eta^2. \end{aligned} \tag{4.49}$$

相应的 Gauss 方程组 (1.4) 为

$$\begin{aligned} \boldsymbol{r}_{\xi\xi} &= -\theta_\xi \tan\theta\, \boldsymbol{r}_\xi + \theta_\eta \cot\theta\, \boldsymbol{r}_\eta + e\boldsymbol{N}, \\ \boldsymbol{r}_{\xi\eta} &= -\theta_\eta \tan\theta\, \boldsymbol{r}_\xi + \theta_\xi \cot\theta\, \boldsymbol{r}_\eta + f\boldsymbol{N}, \\ \boldsymbol{r}_{\eta\eta} &= -\theta_\xi \tan\theta\, \boldsymbol{r}_\xi + \theta_\eta \cot\theta\, \boldsymbol{r}_\eta + g\boldsymbol{N}, \end{aligned} \tag{4.50}$$

而 Weingarten 方程组 (1.5) 为

$$\begin{aligned} \boldsymbol{N}_\xi &= -\frac{e}{\cos^2\theta}\boldsymbol{r}_\xi - \frac{f}{\sin^2\theta}\boldsymbol{r}_\eta, \\ \boldsymbol{N}_\eta &= \frac{f}{\cos^2\theta}\boldsymbol{r}_\xi + \frac{g}{\sin^2\theta}\boldsymbol{r}_\eta. \end{aligned} \tag{4.51}$$

Mainardi-Codazzi 方程组 (1.10) 成为

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial\xi}(f\tan\theta) &= \frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{e+g}{2}\tan\theta\right) + \sin^2\theta\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{e-g}{2\cos\theta\sin\theta}\right), \\ \frac{\partial}{\partial\eta}(f\cot\theta) &= \frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{e+g}{2}\tan\theta\right) - \cos^2\theta\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{e-g}{2\cos\theta\sin\theta}\right), \end{aligned} \tag{4.52}$$

全曲率为

$$\mathcal{K} = \frac{eg-f^2}{\cos^2\theta\sin^2\theta} = \frac{\theta_{\eta\eta}-\theta_{\xi\xi}}{\cos\theta\sin\theta},$$

从而

此外, 成立

$$\begin{aligned} \boldsymbol{r}_{\xi\xi}-\boldsymbol{r}_{\eta\eta}&=(e-g)\boldsymbol{N},\\ \boldsymbol{r}_\xi\times\boldsymbol{r}_\eta&=|\boldsymbol{r}_\xi\times\boldsymbol{r}_\eta|\boldsymbol{N}=\pm\sin\theta\cos\theta\,\boldsymbol{N}. \end{aligned} \tag{4.54}$$

如果加上约束条件

$$e-g=\epsilon\sin 2\theta,\quad \epsilon=常数, \tag{4.55}$$

则 Mainardi-Codazzi 方程组 (4.52) 成为一对守恒律

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial\xi}(f\tan\theta)&=\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{e+g}{2}\tan\theta\right),\\ \frac{\partial}{\partial\eta}(f\cot\theta)&=\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{e+g}{2}\cot\theta\right). \end{aligned} \tag{4.56}$$

由 $(4.56)_1$ 式, 可以引入势函数 $\phi(\xi,\eta)$ 使得

$$\phi_\xi=\frac{e+g}{2}\tan\theta,\quad \phi_\eta=f\tan\theta, \tag{4.57}$$

将其代入 (4.53) 式和 $(4.56)_2$ 式得到

$$\boxed{\begin{aligned} &\theta_{\xi\xi}-\theta_{\eta\eta}-\epsilon^2\cos\theta\sin\theta+\frac{\cos\theta}{\sin^3\theta}(\phi_\xi^2-\phi_\eta^2)=0,\\ &\frac{\partial}{\partial\xi}(\phi_\xi\cot^2\theta)=\frac{\partial}{\partial\eta}(\phi_\eta\cot^2\theta). \end{aligned}} \tag{4.58}$$

这就是建立于 1976 年的*Pohlmeyer-Lund-Regge* 方程组. 事实上, 根据 (4.54) 式, 从曲面 Σ 的位置向量 $\boldsymbol{r}$ 满足的方程

$$\boldsymbol{r}_{\xi\xi}-\boldsymbol{r}_{\eta\eta}=\pm 2\epsilon\boldsymbol{r}_\xi\times\boldsymbol{r}_\eta \tag{4.59}$$

中就可以得到约束 (4.55).

4.2.2 与 SIT 方程组的联系

锐线 SIT 方程组起源于未泵浦 Maxwell-Bloch 方程组[349]

$$\boxed{\begin{aligned} &E_x=P,\\ &P_t=EN,\\ &N_t=-\frac{1}{2}(\bar{E}P+E\bar{P}),\\ &N^2+P\bar{P}=1, \end{aligned}} \tag{4.60}$$

其中 E, P 分别表示电场强度和电极化强度的慢变振幅, N 是原子的翻转率, x, t 是经标度变换后的空间、时间变量, $\bar{E}, \bar{P}$ 分别表示 E 和 P 的复共轭.

由 $(4.60)_4$ 式, 可以设

$$N = \cos\chi, \tag{4.61}$$

$$P = e^{i\nu}\sin\chi, \tag{4.62}$$

从而 (4.60) 式中剩下的方程成为

$$\begin{aligned} \chi_{tx} &= \sin\chi + \nu_t\nu_x\tan\chi, \\ \nu_{tx} &= -\nu_x\chi_t\cot\chi - \nu_t\chi_x(\cos\chi\sin\chi)^{-1}. \end{aligned} \tag{4.63}$$

这是标准的锐线 SIT 方程组.

SIT 方程组 $(4.63)_2$ 具有守恒律形式

$$(\nu_x\cos\chi)_t = (\nu_t/\cos\chi)_x, \tag{4.64}$$

从而可引入势函数 $\mu(x,t)$, 使得

$$\mu_x = \nu_x\cos\chi, \quad \mu_t = \nu_t/\cos\chi. \tag{4.65}$$

利用 χ 和 μ, SIT 方程组 (4.63) 变成

$$\begin{aligned} \chi_{tx} &= \sin\chi + \mu_t\mu_x\tan\chi, \\ \mu_{tx} &= -\mu_t\chi_x\cot\chi - \mu_x\chi_t(\cos\chi\sin\chi)^{-1}. \end{aligned} \tag{4.66}$$

这相当于在 SIT 方程组 (4.63) 中将 ν 换成了 μ, 而 x 和 t 互换了. 于是

$$\begin{aligned} &\tilde{N} = \cos\chi, \quad \tilde{P} = e^{i\mu}\sin\chi, \\ &\tilde{E} = (\cos\chi)^{-1}(e^{i\mu}\sin\chi)_x \end{aligned} \tag{4.67}$$

满足相应的未泵浦 Maxwell-Bloch 方程组

$$\begin{aligned} \tilde{E}_t &= \tilde{P}, \\ \tilde{P}_x &= \tilde{E}\tilde{N}, \\ \tilde{N}_x &= -\frac{1}{2}(\bar{\tilde{E}}\tilde{P} + \tilde{E}\bar{\tilde{P}}), \\ \tilde{N}^2 &+ \tilde{P}\bar{\tilde{P}} = 1. \end{aligned} \tag{4.68}$$

由守恒律 (4.64), 存在势函数 ζ 使得

$$2\zeta_x = \nu_x(\cos\chi + 1), \tag{4.69}$$

而由 (4.65) 式得 $\zeta=(\mu+\nu)/2$. 由 (4.69) 式,

$$\nu_x=\frac{2\zeta_x}{\cos\chi+1},\quad \nu_t=\frac{2\zeta_t\cos\chi}{\cos\chi+1}. \tag{4.70}$$

将它们代入 $(4.63)_1$ 式并利用相容性条件 $\nu_{xt}=\nu_{tx}$ 得到

$$\chi_{tx}=\sin\chi+\frac{4\zeta_x\zeta_t\sin\chi}{(\cos\chi+1)^2},\quad \zeta_{tx}=-\frac{1}{\sin\chi}(\zeta_x\chi_t+\zeta_t\chi_x). \tag{4.71}$$

令 $\Sigma=\chi/2$, 就得到

$$\begin{aligned}\Sigma_{tx}-\zeta_t\zeta_x\frac{\sin\Sigma}{\cos^3\Sigma}&=\sin\Sigma\cos\Sigma,\\ \zeta_{tx}+\frac{\zeta_x\Sigma_t+\zeta_t\Sigma_x}{\sin\Sigma\cos\Sigma}&=0.\end{aligned} \tag{4.72}$$

如果记

$$\Sigma=\theta+\frac{\pi}{2},\quad \zeta=\phi, \tag{4.73}$$

$$x=-\frac{\epsilon^2}{2}(\xi+\eta),\quad t=\frac{1}{2}(\xi-\eta), \tag{4.74}$$

(4.72) 式就是 Pohlmeyer-Lund-Regge 方程组 (4.58). 于是, Pohlmeyer-Lund-Regge 方程组通过变换

$$\begin{aligned}2\mathrm{d}\phi&=\nu_x(\cos\chi+1)\,\mathrm{d}x+\nu_t\left(\frac{1}{\cos\chi}+1\right)\mathrm{d}t,\\ 2\theta&=\chi-\pi\end{aligned} \tag{4.75}$$

和变量代换 (4.74) 与锐线 SIT 方程组 (4.63) 相联系.

4.2.3 与 SRS 方程组的联系

SRS 方程组具有形式[349]

$$\frac{\partial A_1}{\partial X}=-SA_2,\quad \frac{\partial A_2}{\partial X}=\bar{S}A_1,\quad \frac{\partial S}{\partial T}=A_1\bar{A}_2, \tag{4.76}$$

其中 A_1,A_2 分别是泵浦波和 Stocks 波的电场强度, S 是 Raman 振幅. 总的强度

$$I=|A_1|^2+|A_2|^2 \tag{4.77}$$

仅与 T 有关. 记

$$\tilde{E}=2S,\quad \tilde{P}=2\frac{A_1\bar{A}_2}{I},\quad \tilde{N}=\frac{|A_1|^2-|A_2|^2}{I}, \tag{4.78}$$

$$x=X,\quad t=\int_0^T I(T')\mathrm{d}T', \tag{4.79}$$

4.2.4 Maxwell-Bloch 方程组与 NLS 方程的相容性

为了建立未泵浦 Maxwell-Bloch 方程组与 NLS 方程之间的联系, 还是使用 3×3 线性表示 (4.16) 比较方便. (4.16) 式的相容性条件分别给出了 κ 和 τ 的时间演化方程 (4.7) 和 (4.8), 它们在变换

$$\begin{aligned} &\kappa \to \kappa^* = \kappa, \qquad &\tau \to \tau^* = \tau + \lambda, \\ &s \to s^* = s + 2\lambda t, \qquad &t \to t^* = t \end{aligned} \tag{4.80}$$

下不变. 在此变换下, 几何约束 (4.2) 成为

$$\boldsymbol{r}_{t^*} = \kappa^* \boldsymbol{b} - 2\lambda \boldsymbol{t}, \tag{4.81}$$

而引入的参数 λ 产生滑移运动.

在线性层次上, 变换 (4.80) 下的不变性在表示 (4.16) 中加入了谱参数 λ, 从而得到

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \boldsymbol{t} \\ \boldsymbol{n} \\ \boldsymbol{b} \end{pmatrix}_{s^*} &= \begin{pmatrix} 0 & \kappa^* & 0 \\ -\kappa^* & 0 & \tau^* - \lambda \\ 0 & -\tau^* + \lambda & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{t} \\ \boldsymbol{n} \\ \boldsymbol{b} \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} \boldsymbol{t} \\ \boldsymbol{n} \\ \boldsymbol{b} \end{pmatrix}_{t^*} &= \begin{pmatrix} 0 & -\kappa^*(\tau^* + \lambda) & \kappa^*_{s^*} \\ \kappa^*(\tau^* + \lambda) & 0 & \Xi \\ -\kappa^*_{s^*} & -\Xi & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{t} \\ \boldsymbol{n} \\ \boldsymbol{b} \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{4.82}$$

其中

$$\Xi = \frac{\kappa^*_{s^* s^*}}{\kappa^*} - {\tau^*}^2 + \lambda^2. \tag{4.83}$$

在对应 $L_k \leftrightarrow e_k$ 下, 这个 NLS 方程的 3×3 线性表示对应于 2×2 线性表示

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{pmatrix}_{s^*} &= \left[-(\tau^* - \lambda)\frac{\sigma_1}{2\mathrm{i}} - \kappa^* \frac{\sigma_3}{2\mathrm{i}}\right] \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2\mathrm{i}} \begin{pmatrix} -\kappa^* & -(\tau^* - \lambda) \\ -(\tau^* - \lambda) & \kappa^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{pmatrix}_{t^*} &= \left[-\Xi \frac{\sigma_1}{2\mathrm{i}} + \kappa^*_{s^*} \frac{\sigma_2}{2\mathrm{i}} + \kappa^*(\tau^* + \lambda)\frac{\sigma_3}{2\mathrm{i}}\right] \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\ ?} \begin{pmatrix} \kappa^*(\tau^* + \lambda) & -\Xi - \mathrm{i}\kappa^*_{s^*} \\ \cdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \cdots \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{4.84}$$

对 (4.82) 式作用一个旋转 $L_1 \to e_3, L_2 \to e_1, L_3 \to e_2$, 我们得到与 (4.84) 式规范等价的方程组

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \tilde{\Phi}_1 \\ \tilde{\Phi}_2 \end{pmatrix}_{s^*} &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \mathrm{i}(\tau^*-\lambda) & \kappa^* \\ -\kappa^* & -\mathrm{i}(\tau^*-\lambda) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \tilde{\Phi}_1 \\ \tilde{\Phi}_2 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} \tilde{\Phi}_1 \\ \tilde{\Phi}_2 \end{pmatrix}_{t^*} &= \frac{1}{2\mathrm{i}}\begin{pmatrix} -\Xi & \kappa^*_{s^*} - \mathrm{i}\kappa^*(\tau^*+\lambda) \\ \kappa^*_{s^*} + \mathrm{i}\kappa^*(\tau^*+\lambda) & \Xi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \tilde{\Phi}_1 \\ \tilde{\Phi}_2 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{4.85}$$

在 (4.85) 式中令

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}_1 &= v_2 e^{\frac{1}{2}\mathrm{i}\int \tau^* \mathrm{d}s^*}, \\ \tilde{\Phi}_2 &= v_1 e^{-\frac{1}{2}\mathrm{i}\int \tau^* \mathrm{d}s^*}, \end{aligned} \tag{4.86}$$

就得到 NLS 方程的标准 AKNS 线性表示

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}_{s^*} &= \frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix} 0 & -q \\ \bar{q} & 0 \end{pmatrix} + \mathrm{i}\lambda\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}_{t^*} &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} A & B \\ -\bar{B} & -A \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{4.87}$$

其中

$$q = \kappa^* e^{\mathrm{i}\int \tau^* \mathrm{d}s^*}, \tag{4.88}$$

$$A = \frac{1}{2}\mathrm{i}|q|^2 - \mathrm{i}\lambda^2, \quad B = -\mathrm{i}q_{s^*} + q\lambda. \tag{4.89}$$

现在我们在 NLS 方程的 AKNS 表示 (4.87) 上添加一个演化

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}_x = \frac{1}{2\mathrm{i}\lambda}\begin{pmatrix} N & -P \\ -\bar{P} & -N \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}, \tag{4.90}$$

那么 $(4.87)_1$ 式和 (4.90) 式的相容性条件就给出未泵浦 Maxwell-Bloch 方程组

$$\begin{aligned} E_x &= P, \\ P_{s^*} &= EN, \\ N_{s^*} &= -\frac{1}{2}(\bar{E}P + E\bar{P}), \end{aligned} \tag{4.91}$$

其中

$$E = -q = -\kappa^* e^{\mathrm{i}\int \tau^* \mathrm{d}s^*}. \tag{4.92}$$

剩下的关系 (见 (4.60) 式)

由 (4.91) 式经适当的标度变换得到. 于是, 我们得到了如下的重要结果, 即未泵浦 Maxwell-Bloch 方程组可以通过与 NLS 方程相容得到. 与此相对应的, 我们已经知道 mKdV 方程和 Weingarten 方程组早先是通过与经典 sine-Gordon 方程相容得到的.

4.3 NLS 方程的几何与自 Bäcklund 变换

在 4.1 节中, 通过曲线在空间的特殊运动用几何方式导出了非线性 Schrödinger 方程. 这里, 将介绍 Marris 和 Passman[247] 对特殊流体运动的动力学分析中所用的几何方法来导出这一标准方程, 该方法后来被 Rogers 和 Kingston 应用于磁流体力学[305]. 然后在 Hasimoto 曲面这一层面上给出了非线性 Schrödinger 方程的自 Bäcklund 变换, 进而生成了烟圈型解[312].

考虑确定正交标架 $\{\boldsymbol{t},\boldsymbol{n},\boldsymbol{b}\}$ 的线性的 Gauss-Weingarten 方程组[247]

$$
\begin{aligned}
\frac{\delta}{\delta s}\begin{pmatrix}\boldsymbol{t}\\ \boldsymbol{n}\\ \boldsymbol{b}\end{pmatrix}&=\begin{pmatrix}0&\kappa&0\\ -\kappa&0&\tau\\ 0&-\tau&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{t}\\ \boldsymbol{n}\\ \boldsymbol{b}\end{pmatrix},\\
\frac{\delta}{\delta n}\begin{pmatrix}\boldsymbol{t}\\ \boldsymbol{n}\\ \boldsymbol{b}\end{pmatrix}&=\begin{pmatrix}0&\theta_{ns}&(\Omega_b+\tau)\\ -\theta_{ns}&0&-\operatorname{div}\boldsymbol{b}\\ -(\Omega_b+\tau)&\operatorname{div}\boldsymbol{b}&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{t}\\ \boldsymbol{n}\\ \boldsymbol{b}\end{pmatrix},\\
\frac{\delta}{\delta b}\begin{pmatrix}\boldsymbol{t}\\ \boldsymbol{n}\\ \boldsymbol{b}\end{pmatrix}&=\begin{pmatrix}0&-(\Omega_n+\tau)&\theta_{bs}\\ \Omega_n+\tau&0&\kappa+\operatorname{div}\boldsymbol{n}\\ -\theta_{bs}&-(\kappa+\operatorname{div}\boldsymbol{n})&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{t}\\ \boldsymbol{n}\\ \boldsymbol{b}\end{pmatrix}.
\end{aligned}
\tag{4.93}
$$

这里采用了文献 [312] 中的记号, 即 $\delta/\delta s$, $\delta/\delta n$ 和 $\delta/\delta b$ 分别表示沿切向、主法向和从法向的方向导数. 于是, $(4.93)_1$ 式表示通常的 Serret-Frenet 关系, 而 $(4.93)_2$ 式与 $(4.93)_3$ 式分别给出了正交标架 $\{\boldsymbol{t},\boldsymbol{n},\boldsymbol{b}\}$ 沿 $\boldsymbol{n}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 方向的方向导数. 因此,

$$
\operatorname{grad}=\boldsymbol{t}\frac{\delta}{\delta s}+\boldsymbol{n}\frac{\delta}{\delta n}+\boldsymbol{b}\frac{\delta}{\delta b}. \tag{4.94}
$$

θ_{bs} 和 θ_{ns} 最初由 Bjørgum 引入[38], 它们是

$$
\theta_{ns}=\boldsymbol{n}\cdot\frac{\delta\boldsymbol{t}}{\delta n},\quad \theta_{bs}=\boldsymbol{b}\cdot\frac{\delta\boldsymbol{t}}{\delta b}, \tag{4.95}
$$

$$
\begin{aligned}
\operatorname{div}\boldsymbol{t} &= \left(\boldsymbol{t}\frac{\delta}{\delta s}+\boldsymbol{n}\frac{\delta}{\delta n}+\boldsymbol{b}\frac{\delta}{\delta b}\right)\cdot\boldsymbol{t} \\
&= \boldsymbol{t}\cdot(\kappa\boldsymbol{n})+\boldsymbol{n}\cdot\frac{\delta\boldsymbol{t}}{\delta n}+\boldsymbol{b}\cdot\frac{\delta\boldsymbol{t}}{\delta b}=\theta_{ns}+\theta_{bs},
\end{aligned} \tag{4.96}
$$

$$
\begin{aligned}
\operatorname{div}\boldsymbol{n} &= \left(\boldsymbol{t}\frac{\delta}{\delta s}+\boldsymbol{n}\frac{\delta}{\delta n}+\boldsymbol{b}\frac{\delta}{\delta b}\right)\cdot\boldsymbol{n} \\
&= \boldsymbol{t}\cdot(-\kappa\boldsymbol{t}+\tau\boldsymbol{b})+\boldsymbol{n}\cdot\frac{\delta\boldsymbol{n}}{\delta n}+\boldsymbol{b}\cdot\frac{\delta\boldsymbol{n}}{\delta b}=-\kappa+\boldsymbol{b}\cdot\frac{\delta\boldsymbol{n}}{\delta b},
\end{aligned} \tag{4.97}
$$

$$
\begin{aligned}
\operatorname{div}\boldsymbol{b} &= \left(\boldsymbol{t}\frac{\delta}{\delta s}+\boldsymbol{n}\frac{\delta}{\delta n}+\boldsymbol{b}\frac{\delta}{\delta b}\right)\cdot\boldsymbol{b} \\
&= \boldsymbol{t}\cdot(-\tau\boldsymbol{n})+\boldsymbol{n}\cdot\frac{\delta\boldsymbol{b}}{\delta n}=-\boldsymbol{b}\cdot\frac{\delta\boldsymbol{n}}{\delta n}.
\end{aligned} \tag{4.98}
$$

此外,

$$
\begin{aligned}
\operatorname{curl}\boldsymbol{t} &= \left(\boldsymbol{t}\times\frac{\delta}{\delta s}+\boldsymbol{n}\times\frac{\delta}{\delta n}+\boldsymbol{b}\times\frac{\delta}{\delta b}\right)\boldsymbol{t} \\
&= \boldsymbol{t}\times\frac{\delta\boldsymbol{t}}{\delta s}+\boldsymbol{n}\times\frac{\delta\boldsymbol{t}}{\delta n}+\boldsymbol{b}\times\frac{\delta\boldsymbol{t}}{\delta b} \\
&= \boldsymbol{t}\times(\kappa\boldsymbol{n})+\boldsymbol{n}\times\left[\theta_{ns}\boldsymbol{n}+\left(\boldsymbol{b}\cdot\frac{\delta\boldsymbol{t}}{\delta n}\right)\boldsymbol{b}\right] \\
&\quad +\boldsymbol{b}\times\left[\left(\boldsymbol{n}\cdot\frac{\delta\boldsymbol{t}}{\delta b}\right)\boldsymbol{n}+\left(\boldsymbol{b}\cdot\frac{\delta\boldsymbol{t}}{\delta b}\right)\boldsymbol{b}\right] \\
&= \Omega_s\boldsymbol{t}+\kappa\boldsymbol{b},
\end{aligned} \tag{4.99}
$$

其中

$$
\Omega_s=\boldsymbol{t}\cdot\operatorname{curl}\boldsymbol{t}=\boldsymbol{b}\cdot\frac{\delta\boldsymbol{t}}{\delta n}-\boldsymbol{n}\cdot\frac{\delta\boldsymbol{t}}{\delta b} \tag{4.100}
$$

称为 $\boldsymbol{t}$ 场的反常. (4.99) 式在后面是非常重要的, 它最早在 1927 年由 Masotti[249] 得到, 后来又分别由 Emde[120] 和 Bjorgum[38] 独立得到.

类似地,

$$
\begin{aligned}
\operatorname{curl}\boldsymbol{n} &= \left(\boldsymbol{t}\times\frac{\delta}{\delta s}+\boldsymbol{n}\times\frac{\delta}{\delta n}+\boldsymbol{b}\times\frac{\delta}{\delta b}\right)\boldsymbol{n} \\
&= \boldsymbol{t}\times(-\kappa\boldsymbol{t}+\tau\boldsymbol{b})+\boldsymbol{n}\times\left[\left(\boldsymbol{t}\cdot\frac{\delta\boldsymbol{n}}{\delta n}\right)\boldsymbol{t}+\left(\boldsymbol{b}\cdot\frac{\delta\boldsymbol{n}}{\delta n}\right)\boldsymbol{b}\right]
\end{aligned}
$$

$$=-(\operatorname{div}\boldsymbol{b})\boldsymbol{t}+\Omega_n\boldsymbol{n}+\theta_{ns}\boldsymbol{b}, \tag{4.101}$$

其中

$$\Omega_n=\boldsymbol{n}\cdot\operatorname{curl}\boldsymbol{n}=\boldsymbol{t}\cdot\frac{\delta\boldsymbol{n}}{\delta b}-\tau \tag{4.102}$$

称为 $\boldsymbol{n}$ 场的反常. 最后,

$$\begin{aligned}\operatorname{curl}\boldsymbol{b}&=\left(\boldsymbol{t}\times\frac{\delta}{\delta s}+\boldsymbol{n}\times\frac{\delta}{\delta n}+\boldsymbol{b}\times\frac{\delta}{\delta b}\right)\boldsymbol{b}\\&=\boldsymbol{t}\times(-\tau\boldsymbol{n})+\boldsymbol{n}\times\left(\boldsymbol{t}\cdot\frac{\delta\boldsymbol{b}}{\delta n}\right)\boldsymbol{t}\\&\quad+\boldsymbol{b}\times\left[\left(\boldsymbol{t}\cdot\frac{\delta\boldsymbol{b}}{\delta b}\right)\boldsymbol{t}+\left(\boldsymbol{n}\cdot\frac{\delta\boldsymbol{b}}{\delta b}\right)\boldsymbol{n}\right]\end{aligned} \tag{4.103}$$

$$=(\kappa+\operatorname{div}\boldsymbol{n})\boldsymbol{t}-\theta_{bs}\boldsymbol{n}+\Omega_b\boldsymbol{b}, \tag{4.104}$$

其中

$$\Omega_b=-\tau-\boldsymbol{t}\cdot\frac{\delta\boldsymbol{b}}{\delta n} \tag{4.105}$$

称为 $\boldsymbol{b}$ 场的反常.

现在, 用 $\operatorname{curl}\operatorname{grad}\phi=\boldsymbol{0}$ 得到

$$\begin{aligned}&\frac{\delta\phi}{\delta s}\operatorname{curl}\boldsymbol{t}+\operatorname{grad}\left(\frac{\delta\phi}{\delta s}\right)\times\boldsymbol{t}+\frac{\delta\phi}{\delta n}\operatorname{curl}\boldsymbol{n}+\operatorname{grad}\left(\frac{\delta\phi}{\delta n}\right)\times\boldsymbol{n}\\&+\frac{\delta\phi}{\delta b}\operatorname{curl}\boldsymbol{t}+\operatorname{grad}\left(\frac{\delta\phi}{\delta b}\right)\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0},\end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned}&\left(\frac{\delta^2\phi}{\delta n\delta b}-\frac{\delta^2\phi}{\delta b\delta n}\right)\boldsymbol{t}+\left(\frac{\delta^2\phi}{\delta b\delta s}-\frac{\delta^2\phi}{\delta s\delta b}\right)\boldsymbol{n}+\left(\frac{\delta^2\phi}{\delta s\delta n}-\frac{\delta^2\phi}{\delta n\delta s}\right)\boldsymbol{b}\\&+\frac{\delta\phi}{\delta s}\operatorname{curl}\boldsymbol{t}+\frac{\delta\phi}{\delta n}\operatorname{curl}\boldsymbol{n}+\frac{\delta\phi}{\delta b}\operatorname{curl}\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}.\end{aligned} \tag{4.106}$$

这里, 我们用了习惯记号 $\dfrac{\delta^2\phi}{\delta n\delta b}=\dfrac{\delta}{\delta n}\left(\dfrac{\delta\phi}{\delta b}\right)$. 利用 (4.99) 式, (4.101) 式以及 (4.103) 式, (4.106) 式成为

$$\frac{\delta^2\phi}{\delta n\delta b}-\frac{\delta^2\phi}{\delta b\delta n}=-\frac{\delta\phi}{\delta s}\Omega_s+\frac{\delta\phi}{\delta n}\operatorname{div}\boldsymbol{b}-\frac{\delta\phi}{\delta b}(\kappa+\operatorname{div}\boldsymbol{n}),$$

$$\frac{\delta^2\phi}{\delta b\delta s}-\frac{\delta^2\phi}{\delta s\delta b}=-\frac{\delta\phi}{\delta n}\Omega_n+\frac{\delta\phi}{\delta b}\theta_{bs}, \tag{4.107}$$

这样, 二阶混合内禀导数一般不可交换, 因此 s, n, b 表示非完整坐标[373]. 利用 (4.107) 式, 线性方程组 (4.93) 的相容性条件给出 8 个几何量 κ, τ, Ω_s, Ω_n, $\operatorname{div}\boldsymbol{n}$, $\operatorname{div}\boldsymbol{b}$, θ_{ns}, θ_{bs} 之间的 9 个条件[248]:

$$\begin{aligned}\frac{\delta}{\delta b}\theta_{ns} + \frac{\delta}{\delta n}(\tau + \Omega_n) = &(\kappa + \operatorname{div}\boldsymbol{n})(\Omega_s - 2\Omega_n - 2\tau)\\ &+(\theta_{bs} - \theta_{ns})\operatorname{div}\boldsymbol{b} + \Omega_s\kappa,\end{aligned} \tag{4.108}$$

$$\begin{aligned}\frac{\delta}{\delta b}(\tau + \Omega_n - \Omega_s) + \frac{\delta}{\delta n}\theta_{bs} = &(\kappa + \operatorname{div}\boldsymbol{n})(\theta_{ns} - \theta_{bs})\\ &+(\Omega_s - 2\Omega_n - 2\tau)\operatorname{div}\boldsymbol{b},\end{aligned} \tag{4.109}$$

$$\begin{aligned}\frac{\delta}{\delta b}(\operatorname{div}\boldsymbol{b}) + \frac{\delta}{\delta n}(\kappa + \operatorname{div}\boldsymbol{n}) = &(\tau + \Omega_n)(\tau + \Omega_n - \Omega_s) - \theta_{ns}\theta_{bs}\\ &-\tau\Omega_s - (\operatorname{div}\boldsymbol{b})^2 - (\kappa + \operatorname{div}\boldsymbol{n})^2,\end{aligned} \tag{4.110}$$

$$\frac{\delta}{\delta s}(\tau + \Omega_n) + \frac{\delta\kappa}{\delta b} = -\Omega_n\theta_{ns} - (2\tau + \Omega_n)\theta_{bs}, \tag{4.111}$$

$$\begin{aligned}\frac{\delta}{\delta s}\theta_{bs} = &-\theta_{bs}^2 + \kappa(\kappa + \operatorname{div}\boldsymbol{n})\\ &-\Omega_n(\tau + \Omega_n - \Omega_s) + \tau(\tau + \Omega_n),\end{aligned} \tag{4.112}$$

$$\frac{\delta}{\delta s}(\kappa + \operatorname{div}\boldsymbol{n}) - \frac{\delta\tau}{\delta b} = -\Omega_n\operatorname{div}\boldsymbol{b} - \theta_{bs}(2\kappa + \operatorname{div}\boldsymbol{n}), \tag{4.113}$$

$$\begin{aligned}\frac{\delta\kappa}{\delta n} - \frac{\delta}{\delta s}\theta_{ns} = &\kappa^2 + \theta_{ns}^2 + (\tau + \Omega_n)(3\tau + \Omega_n)\\ &-\Omega_s(2\tau + \Omega_n),\end{aligned} \tag{4.114}$$

$$\begin{aligned}\frac{\delta}{\delta s}(\tau + \Omega_n - \Omega_s) = &-\theta_{ns}(\Omega_n - \Omega_s)\\ &+\kappa\operatorname{div}\boldsymbol{b} + \theta_{bs}(-2\tau - \Omega_n + \Omega_s),\end{aligned} \tag{4.115}$$

$$\begin{aligned}\frac{\delta\tau}{\delta n} + \frac{\delta}{\delta s}(\operatorname{div}\boldsymbol{b}) = &-\kappa(\Omega_n - \Omega_s) - \theta_{ns}\operatorname{div}\boldsymbol{b}\\ &+(\kappa + \operatorname{div}\boldsymbol{n})(-2\tau - \Omega_n + \Omega_s).\end{aligned} \tag{4.116}$$

Yin 和 Pipkin 在研究粘度测量时独立地得到了一个等价的方程组[386].

综上所述, 结合 (4.100), (4.102) 和 (4.105) 式可以得到重要的关系式

$$\Omega_s - \tau = \frac{1}{2}(\Omega_s + \Omega_n + \Omega_b). \tag{4.117}$$

这个结果出现在 Weatherburn 于 1930 年出版的书中[381]. 在此书中, Ω_s, Ω_n 和 Ω_b 分别被称为 $\boldsymbol{t}, \boldsymbol{n}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 线汇的全动量. 需要注意的是, (4.117) 式可导出多个重要的定理, 包括 Dupin 定理, 该定理说一个三元正交系统中曲面相交所得的曲线是这些

4.3.1 非线性 Schrödinger 方程

下面首先加上无反常条件

$$\Omega_n = 0. \tag{4.118}$$

Marris 和 Passman[247] 以及 Rogers 和 Kingston[305] 分别研究了在此几何条件下的流体和磁流体的运动. 但是, 我们在这里要按 [312] 在此约束下得到著名的 NLS 方程.

条件 (4.118) 是存在包含 s 曲线和 b 曲线的单参数曲面族的充要条件, 它等价于

$$\boldsymbol{n} = \psi \operatorname{grad} U, \tag{4.119}$$

这里 "叶状结构" 的成员为 $U(\boldsymbol{r}) =$ 常数, 而 ψ 是距离函数.

对于曲面 Σ 上的一族曲线, 如果它们的切向量为 $\boldsymbol{T}$, 则它们的测地曲率为[380]

$$\kappa_g = \boldsymbol{N} \cdot \operatorname{curl}_\Sigma \boldsymbol{T}. \tag{4.120}$$

在上面的叶状结构中, 因为 s 曲线和 b 曲线都在曲面 Σ 上, 所以 $\boldsymbol{n}$ 与 Σ 正交. 从而 $\boldsymbol{n}$ 与 $\boldsymbol{N}$ 平行, 而 Masotti 关系 (4.99) 给出

$$\boldsymbol{N} \cdot \operatorname{curl}_\Sigma \boldsymbol{t} = \boldsymbol{N} \cdot \operatorname{curl} \boldsymbol{t} = 0, \tag{4.121}$$

由此得到 s 曲线的测地曲率为零. 这样, s 曲线在叶状结构的每个成员上是测地线. 进一步, 一族测地线的正交曲线形成一族平行曲线[381]. 于是, b 曲线在叶状结构的成员上是平行曲线.

b 曲线的测地曲率是

$$\kappa_{bg} = \boldsymbol{N} \cdot \operatorname{curl} \boldsymbol{b} = -\boldsymbol{n} \cdot \operatorname{curl} \boldsymbol{b} = \theta_{bs}. \tag{4.122}$$

所以 b 曲线是测地线当且仅当 $\theta_{bs} = 0$. 当 $\theta_{bs} = 0$ 时, 叶状结构中的成员 Σ 上的测地线, 即 s 曲线和 b 曲线, 保持正交, 并且下面将看到 Σ 是可展曲面.

包含 s 曲线和 b 曲线的曲面 Σ 的全曲率 $\mathcal{K}$ 由文献 [380] 给出:

$$\mathcal{K} = |\boldsymbol{N}, \operatorname{curl}_\Sigma \boldsymbol{t}, \operatorname{curl}_\Sigma \boldsymbol{b}|, \tag{4.123}$$

其中

$$\operatorname{curl}_\Sigma \boldsymbol{t} = \left(\boldsymbol{t} \frac{\delta}{\delta s} + \boldsymbol{b} \frac{\delta}{\delta b} \right) \times \boldsymbol{t} = (\Omega_n + \tau) \boldsymbol{t} + \kappa \boldsymbol{b}, \tag{4.124}$$

$$\operatorname{curl}_\Sigma \boldsymbol{b} = \left(\boldsymbol{t} \frac{\delta}{\delta s} + \boldsymbol{b} \frac{\delta}{\delta b} \right) \times \boldsymbol{b} = (\kappa + \operatorname{div} \boldsymbol{n}) \boldsymbol{t} - \theta_{bs} \boldsymbol{n} - \tau \boldsymbol{b}, \tag{4.125}$$

从而

叶状结构中的曲面 Σ 的平均曲率 $\mathcal{J} = 2\mathcal{M}$ 为[380]

$$\mathcal{J} = -\mathrm{div}_\Sigma \boldsymbol{N} = -\mathrm{div}\,\boldsymbol{N} = \mathrm{div}\,\boldsymbol{n}. \tag{4.127}$$

现在我们考虑线性方程组 $(4.93)_1$ 和 $(4.93)_3$ 的相容性条件 (4.111)–(4.113). 由 $\Omega_n = 0$, 相容性条件为

$$\frac{\delta \tau}{\delta s} + \frac{\delta \kappa}{\delta b} = -2\tau\theta_{bs}, \tag{4.128}$$

$$\frac{\delta}{\delta s}(\kappa + \mathrm{div}\,\boldsymbol{n}) - \frac{\delta \tau}{\delta b} = -\theta_{bs}(2\kappa + \mathrm{div}\,\boldsymbol{n}), \tag{4.129}$$

$$\frac{\delta}{\delta s}\theta_{bs} = -\theta_{bs}^2 + \kappa(\kappa + \mathrm{div}\,\boldsymbol{n}) + \tau^2. \tag{4.130}$$

这些与叶状结构的成员 Σ 的 Gauss-Mainardi-Codazzi 方程相一致. 特别地, (4.130) 式包含了绝妙定理, 并且在这里用 b 曲线的测地曲率 θ_{bs} 给出了 Gauss 曲率的表达式

$$\mathcal{K} = -\frac{\delta \theta_{bs}}{\delta s} - \theta_{bs}^2. \tag{4.131}$$

如果 $\theta_{bs} = 0$, 则 $\mathcal{K} = 0$, 从而如前面所述, 叶状结构中的曲面 Σ 是可展曲面. 由 (4.127) 式和 (4.130) 式, 叶状结构的成员的平均曲率是

$$\mathcal{J} = \left[\frac{\delta}{\delta s}\theta_{bs} + \theta_{bs}^2 - \tau^2 - \kappa^2\right] \Big/ \kappa. \tag{4.132}$$

如果取 s 曲线和 b 曲线为叶状结构的成员曲面 Σ 的参数曲线, 那么曲面的度量为[247]

$$\mathrm{I}_\Sigma = \mathrm{d}s^2 + g(s, b)\,\mathrm{d}b^2, \tag{4.133}$$

而 Σ 的双参数曲面梯度为

$$\mathrm{grad}_\Sigma = \boldsymbol{t}\frac{\delta}{\delta s} + \boldsymbol{b}\frac{\delta}{\delta b} = \boldsymbol{t}\frac{\partial}{\partial s} + \frac{\boldsymbol{b}}{g^{1/2}}\frac{\partial}{\partial b}. \tag{4.134}$$

Gauss 方程组 $(4.93)_{1,3}$ 给出

$$\frac{\partial}{\partial s}\begin{pmatrix} \boldsymbol{t} \\ \boldsymbol{n} \\ \boldsymbol{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{t} \\ \boldsymbol{n} \\ \boldsymbol{b} \end{pmatrix}, \tag{4.135}$$

$$g^{-1/2}\frac{\partial}{\partial b}\begin{pmatrix} \boldsymbol{t} \\ \boldsymbol{n} \\ \boldsymbol{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\tau & \theta_{bs} \\ \tau & 0 & \kappa + \mathrm{div}\,\boldsymbol{n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{t} \\ \boldsymbol{n} \\ \cdots \end{pmatrix}, \tag{4.136}$$

而 (4.134) 式包含了

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial s} = \boldsymbol{t}, \quad \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial b} = g^{1/2}\boldsymbol{b}, \tag{4.137}$$

其中 $\boldsymbol{r}$ 为曲面 Σ 的位置向量. 因此, 线性方程组 (4.135), (4.136) 导出

$$\frac{1}{g^{1/2}}\frac{\partial^2 \boldsymbol{r}}{\partial b \partial s} = -\tau \boldsymbol{n} + \theta_{bs}\boldsymbol{b}, \tag{4.138}$$

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{r}}{\partial s \partial b} = -g^{1/2}\tau \boldsymbol{n} + \frac{\partial g^{1/2}}{\partial s}\boldsymbol{b}, \tag{4.139}$$

这样我们重新得到了重要的关系式

$$\theta_{bs} = \frac{\partial}{\partial s}(\ln g^{1/2}). \tag{4.140}$$

Gauss-Mainardi-Codazzi 方程组 (4.128)–(4.130) 现在成为

$$\frac{\partial}{\partial s}(g\tau) + g^{1/2}\frac{\partial \kappa}{\partial b} = 0, \tag{4.141}$$

$$\frac{\partial \tau}{\partial b} = \frac{\partial}{\partial s}[g^{1/2}(\kappa + \operatorname{div} n)] + \kappa \frac{\partial g^{1/2}}{\partial s}, \tag{4.142}$$

$$[\kappa(\kappa + \operatorname{div} \boldsymbol{n}) + \tau^2]g^{1/2} = \frac{\partial^2 g^{1/2}}{\partial s^2}. \tag{4.143}$$

在 (4.142) 式和 (4.143) 式中消去 $\kappa + \operatorname{div} \boldsymbol{n}$, 得到

$$\frac{\partial \tau}{\partial b} = \frac{\partial}{\partial s}\left[\frac{1}{\kappa}\left(\frac{\partial^2 g^{1/2}}{\partial s^2} - \tau^2 g^{1/2}\right)\right] + \kappa \frac{\partial g^{1/2}}{\partial s}. \tag{4.144}$$

如果令

$$g^{1/2} = \lambda \kappa, \tag{4.145}$$

其中 λ 仅在叶状结构的成员曲面的法方向上变化, 那么在作了标度变换 $\lambda b \to b$ 后, 方程组 (4.141) 和 (4.144) 给出了经典的 Da Rios 方程组

$$\boxed{\begin{aligned} &\frac{\partial \kappa}{\partial b} = -2\frac{\partial \kappa}{\partial s}\tau - \kappa \frac{\partial \tau}{\partial s}, \\ &\frac{\partial \tau}{\partial b} = \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{1}{\kappa}\frac{\partial^2 \kappa}{\partial s^2} + \frac{\kappa^2}{2} - \tau^2\right). \end{aligned}} \tag{4.146}$$

引入 Hasimoto 变换 (见 (4.9) 式)

$$q = \kappa e^{i\sigma}, \quad \sigma = \int \tau \, ds \tag{4.147}$$

方程组 (4.146) 给出标准的 NLS 方程

$$\mathrm{i}\frac{\partial q}{\partial b}+\frac{\partial^2 q}{\partial s^2}+\frac{1}{2}|q|^2 q=0, \tag{4.148}$$

其中形如 (4.12) 式的边界流项已吸收到 q 中.

4.3.2 自 Bäcklund 变换

在现在的框架下, 一个曲面 $\Sigma:\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s,b)$ 与 NLS 方程相联系当且仅当

$$\boldsymbol{r}_s^2=1,\quad \boldsymbol{r}_s\cdot\boldsymbol{r}_b=0,\quad \boldsymbol{r}_{ss}^2=\boldsymbol{r}_b^2 \tag{4.149}$$

成立. 下面来推导此结果. 如果 $\{\boldsymbol{t},\boldsymbol{n},\boldsymbol{b}\}$ 是对应于 s 参数曲线的标准正交标架, 那么 Serret-Frenet 方程

$$\boldsymbol{r}_{ss}=\boldsymbol{t}_s=\kappa\boldsymbol{n} \tag{4.150}$$

和 $(4.149)_3$ 式导出

$$\boldsymbol{r}_b^2=\kappa^2. \tag{4.151}$$

于是, Σ 的第一基本形式为

$$\mathrm{I}=\mathrm{d}s^2+\kappa^2\mathrm{d}b^2. \tag{4.152}$$

另一方面, 条件 $(4.149)_2$ 及其微分

$$\boldsymbol{r}_{ss}\cdot\boldsymbol{r}_b=0 \tag{4.153}$$

给出 $\boldsymbol{r}_b\cdot\boldsymbol{t}=\boldsymbol{r}_b\cdot\boldsymbol{n}=0$. 不失一般性, 由此得

$$\boldsymbol{r}_b=\kappa\boldsymbol{b}. \tag{4.154}$$

度量 (4.152) 和 "速度" 条件 (4.154) 定义了一类 Hasimoto 曲面. 于是约束 (4.149) 的任一不变量导致了 NLS 方程的不变量.

这里, 设曲面 Σ 的自 Bäcklund 变换具有形式[312]

$$\boldsymbol{r}'=\boldsymbol{r}+\alpha\boldsymbol{t}+\beta\boldsymbol{n}+\gamma\boldsymbol{b},\quad |\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}|=\text{常数}. \tag{4.155}$$

利用参数化

$$\boldsymbol{r}'=\boldsymbol{r}+L(\cos\theta\,\boldsymbol{t}+\sin\theta\cos\varphi\,\boldsymbol{n}+\sin\theta\sin\varphi\,\boldsymbol{b}), \tag{4.156}$$

关系 (4.149) 的不变性导致方程组

$$\theta_s=-\kappa\cos\varphi+\frac{1+\cos\chi}{L}\sin\theta,$$

$$
\begin{aligned}
\theta_b =& -\kappa_s \sin\varphi + \kappa\tau\cos\varphi - 2\frac{(1+\cos\chi)\sin\chi}{L^2}\sin\theta \\
& + \kappa\frac{\cos\varphi\sin\chi - (1+\cos\chi)\sin\varphi\cos\theta}{L}, \\
\varphi_b =& -\frac{\kappa_{ss}}{\kappa} + \tau^2 - (\kappa_s\cos\varphi + \kappa\tau\sin\varphi)\cot\theta + 2\frac{(1+\cos\chi)\cos\chi}{L^2} \\
& - \kappa\frac{\cos\theta\sin\varphi\sin\chi + (1+\cos\chi)\cos\varphi}{L\sin\theta}
\end{aligned}
\tag{4.157}
$$

的相容性, 其中 χ 是任意常数. 这里利用了多余的条件 (4.153) 的不变性, 推导 (4.157) 式的计算可以简化很多.

(4.157) 式可以利用分解

$$
\xi = \frac{\phi^1}{\phi^2} = \cot\frac{\theta}{2}\,e^{\mathrm{i}\varphi} \tag{4.158}
$$

来线性化, 其中 $\Phi = (\phi^1\ \ \phi^2)^{\mathrm{T}}$ 是

$$
\begin{aligned}
\Phi_s &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -\mathrm{i}(\tau-\lambda) & \kappa \\ -\kappa & \mathrm{i}(\tau-\lambda) \end{pmatrix}\Phi, \\
\Phi_b &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -\mathrm{i}(\kappa_{ss}/\kappa - \tau^2 + \lambda^2) & \mathrm{i}\kappa_s - (\kappa\tau + \kappa\lambda) \\ \mathrm{i}\kappa_s + (\kappa\tau + \kappa\lambda) & \mathrm{i}(\kappa_{ss}/\kappa - \tau^2 + \lambda^2) \end{pmatrix}\Phi
\end{aligned}
\tag{4.159}
$$

的解,

$$
\lambda = \frac{\sin\chi + \mathrm{i}(1+\cos\chi)}{L}. \tag{4.160}
$$

如果用 Φ 来表示, Bäcklund 变换 (4.156) 成为

$$
\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{r} + 2\frac{\Im(\lambda)}{|\lambda|^2}(n_1\boldsymbol{t} + n_2\boldsymbol{n} + n_3\boldsymbol{b}), \tag{4.161}
$$

其中

$$
n_1 = \frac{|\xi|^2 - 1}{|\xi|^2 + 1}, \quad n_2 = \frac{2\Re(\xi)}{|\xi|^2+1}, \quad n_3 = \frac{2\Im(\xi)}{|\xi|^2+1}. \tag{4.162}
$$

此外, 由

$$
\kappa'^2 = \boldsymbol{r}_b'^2, \quad \tau' = -\frac{\boldsymbol{r}'_{ss}\cdot\boldsymbol{r}'_{sb}}{\boldsymbol{r}'^2_{ss}} \tag{4.163}
$$

给出新解 $\{\kappa', \tau'\}$, 满足

$$\tau' = \tau + \frac{\mathrm{i}}{2}\left[\ln\left(\frac{\kappa - 4\Im(\lambda)\dfrac{\bar{\xi}}{|\xi|^2+1}}{\kappa - 4\Im(\lambda)\dfrac{\xi}{|\xi|^2+1}}\right)\right]_s, \tag{4.164}$$

从而

$$q' = \kappa' e^{\mathrm{i}\int \tau' \mathrm{d}s} = q - 4\Im(\lambda)\frac{\tilde{\xi}}{|\tilde{\xi}|^2+1}, \qquad \tilde{\xi} = \xi e^{\mathrm{i}\int \tau \mathrm{d}s}. \tag{4.165}$$

后一关系提示我们引入规范变换

$$\Psi = \begin{pmatrix} e^{\frac{1}{2}\mathrm{i}\int \tau\,\mathrm{d}s} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{1}{2}\mathrm{i}\int \tau\,\mathrm{d}s} \end{pmatrix}\Phi, \quad \tilde{\xi} = \frac{\psi^1}{\psi^2}, \tag{4.166}$$

而表示 (4.159) 给出 NLS 方程的标准 Lax 对

$$\begin{aligned} \Psi_s &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \mathrm{i}\lambda & q \\ -\bar{q} & -\mathrm{i}\lambda \end{pmatrix}\Psi, \\ \Psi_b &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \mathrm{i}\left[\dfrac{1}{2}|q|^2 - \lambda^2\right] & \mathrm{i}q_s - \lambda q \\ \mathrm{i}\bar{q}_s + \lambda\bar{q} & -\mathrm{i}\left[\dfrac{1}{2}|q|^2 - \lambda^2\right] \end{pmatrix}\Psi. \end{aligned} \tag{4.167}$$

(4.165) 式成为文献 [225] 所给出的 Bäcklund (Darboux) 变换.

Darboux 变换具有引人注目的性质, 它可以用纯代数的方法递推计算. 如果将 Hasimoto 曲面的 Bäcklund 变换重新解释为作用在 $\{\boldsymbol{t}, \boldsymbol{n}, \boldsymbol{b}\}$ 上的 Darboux 变换, 那么只要知道一个种子曲面, 就可以构造出无限多个曲面. 例如, 对应于解 $\kappa = \tau = 0$ 的直线可以看作为最简单的退化 Hasimoto 曲面. 反复作用 Bäcklund 变换就产生多参数的 Hasimoto 曲面, 它们联系于 NLS 方程的多孤立子解[48].

这里集中考虑

$$\kappa = 常数, \quad \tau = 0, \quad q = \kappa e^{\frac{1}{2}\mathrm{i}\kappa^2 t} \tag{4.168}$$

的情形, 相当于将圆柱面作为种子曲面. Serret-Frenet 方程 (4.135), (4.136) 的解是

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{t} \\ \boldsymbol{n} \\ \boldsymbol{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{t}_0 \cos(\kappa s) + \boldsymbol{n}_0 \sin(\kappa s) \\ \boldsymbol{n}_0 \cos(\kappa s) - \boldsymbol{t}_0 \sin(\kappa s) \\ \boldsymbol{b}_0 \end{pmatrix}, \tag{4.169}$$

而由

$$\boldsymbol{r}_s = \boldsymbol{t}, \quad \boldsymbol{r}_b = \kappa \boldsymbol{b} \tag{4.170}$$

得到

其中 $\boldsymbol{t}_0, \boldsymbol{n}_0, \boldsymbol{b}_0$ 是向量值的积分常数.

相应于种子解 (4.168) 的 Lax 对 (4.159) 的通解为

$$\Phi = \Phi(z), \quad z = s - \lambda b. \tag{4.172}$$

于是, ξ 满足 Riccati 方程

$$\dot{\xi} = \mathrm{i}\lambda\xi + \frac{1}{2}\kappa(1+\xi^2), \tag{4.173}$$

它的解为

$$\xi = -\mathrm{i}\frac{\lambda}{\kappa} + \beta\tan(\mu z + z_0), \tag{4.174}$$

其中

$$\beta = \sqrt{1+\frac{\lambda^2}{\kappa^2}}, \quad \mu = \frac{1}{2}\kappa\beta, \tag{4.175}$$

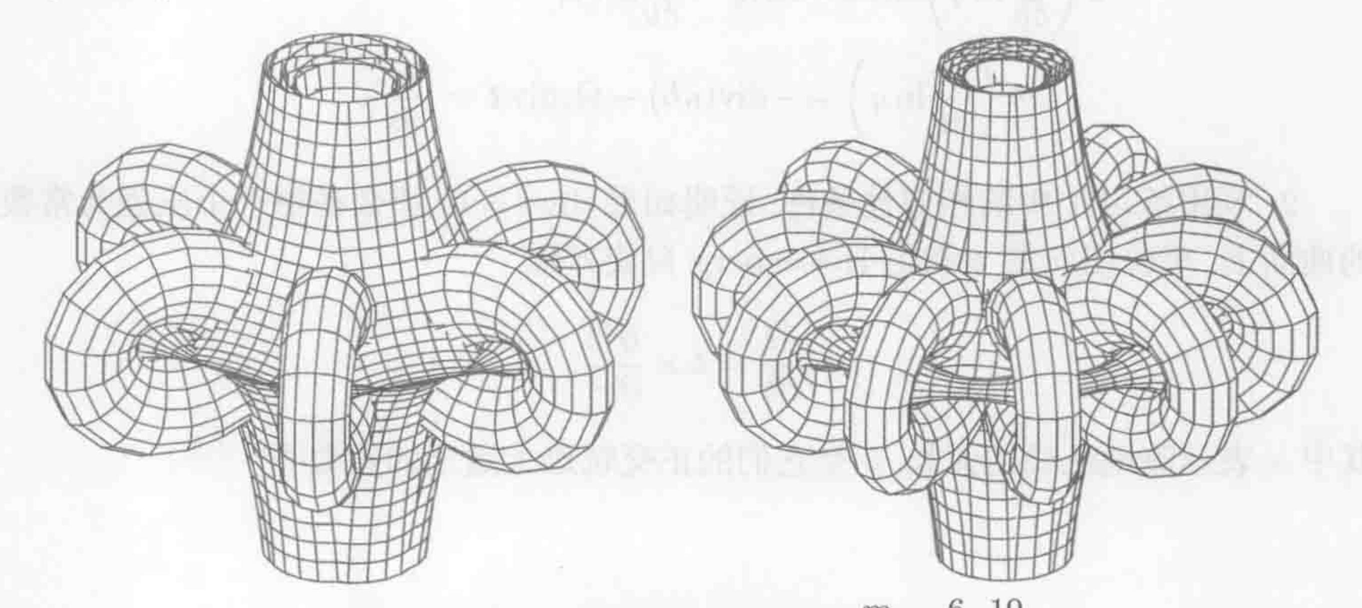
z_0 是任意常数. 新曲面 Σ' 的位置向量为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{r} + L\{&[n_1\cos(\kappa s) - n_2\sin(\kappa s)]\boldsymbol{t}_0 \\ &+[n_1\sin(\kappa s) + n_2\cos(\kappa s)]\boldsymbol{n}_0 + n_3\boldsymbol{b}_0]\}.\end{aligned} \tag{4.176}$$

Cieśliński 等研究了上述 Hasimoto 曲面[85], 并将其与局部归纳近似下涡丝的运动相联系, 其中有一类是特别感兴趣的, 它满足

$$\lambda = \mathrm{i}\kappa\sqrt{1-\frac{m^2}{n^2}}, \qquad 0 < m < n, \quad m, n \in \mathbb{N}, \tag{4.177}$$

这时位置向量 $\boldsymbol{r}'$ 关于空间变量 s 是周期的, 从而曲面具有离散旋转对称性. 图 4.4 显示了 $\kappa = 2$ 时两个这样的曲面. 当 $\kappa'^2 = |q'|^2$ 时, 解不但关于 s 是周期的, 而且当 $b \to \pm\infty$ 时解指数趋于 κ^2. 这类解 (4.177) 对应于 NLS 方程的 "空间" 呼吸子解 (图 4.5).



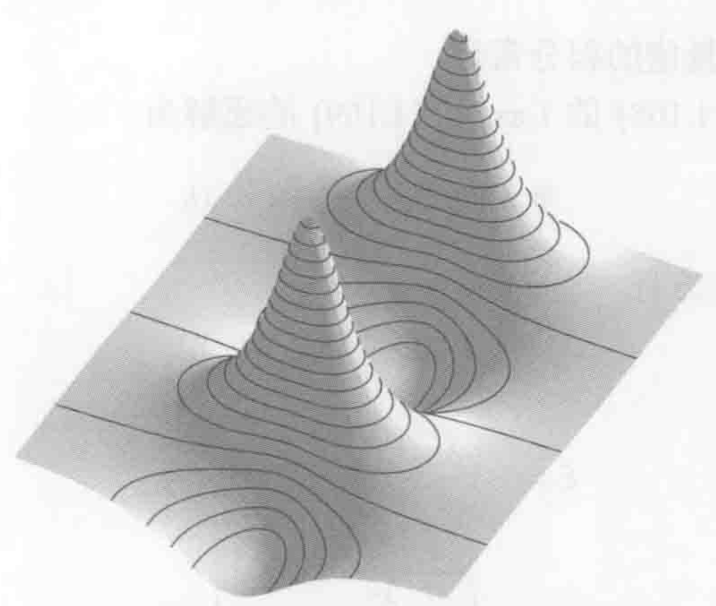


图 4.5 NLS 方程的空间呼吸子解, $\dfrac{m}{n}=\dfrac{6}{7}$

练 习

1. 考虑流体动力学方程组

$$\operatorname{div}\boldsymbol{q}=0,$$
$$\rho(\boldsymbol{q}\cdot\nabla)\boldsymbol{q}+\nabla p=\boldsymbol{0},$$

其中 $\boldsymbol{q}$ 是定常流动速度, p 和 ρ 分别表示压强和常值的密度. 如果 $\boldsymbol{q}=q\boldsymbol{t}$, 其中 $\boldsymbol{t}$ 是流线的单位切向量, 导出下列关于压强分布的内蕴相容性条件

$$\begin{aligned}
2\left(\frac{\delta}{\delta n}\ln q\right)\operatorname{div}\boldsymbol{t}&=-\frac{\delta\kappa}{\delta s}+\kappa\theta_{bs}-\frac{\delta}{\delta n}\operatorname{div}\boldsymbol{t}+2\kappa\operatorname{div}\boldsymbol{t},\\
2\left(\frac{\delta}{\delta b}\ln q\right)\operatorname{div}\boldsymbol{t}&=\kappa\Omega_n-\frac{\delta}{\delta b}\operatorname{div}\boldsymbol{t},\\
2\kappa\left(\frac{\delta}{\delta b}\ln q\right)&=-\operatorname{div}(\kappa\boldsymbol{b})-\Omega_s\operatorname{div}\boldsymbol{t}=\frac{\delta\Omega_s}{\delta s}.
\end{aligned}$$

2. 利用练习 1 中的相容性条件, 证明如果 $\operatorname{div}\boldsymbol{t}=0$, 那么在每一个压强为常数的曲面上, 单位切向量 $\boldsymbol{t}$ 满足 Heisenberg 自旋方程

$$\frac{\partial\boldsymbol{t}}{\partial b}=\boldsymbol{t}\times\frac{\partial^2\boldsymbol{t}}{\partial s^2},$$

其中 s 表示测地流线的弧长, b 是它们的正交轨迹上适当的参数[300, 313].

第 5 章　等温曲面, Calapso 方程和 Zoomeron 方程

本章讨论另一类与孤立子有关的曲面 —— 等温曲面. Lamé 最早在 1837–1852 年对此作了研究, 然后 Bour 在 1862 年[54]、Darboux 在 1899 年[95]、Calapso 在 1903 年[62]、Bianchi 在 1905 年[36] 分别作出了重要的结果. Voss 在百科全书[372] 中对等温曲面的经典理论有一个介绍, 然后 Darboux 在《曲面的一般理论教程》(*Leçons sur la théorie générale des surfaces*)[93]、Bianchi 在《微分几何教程》(*Lezioni di geometria differenziale*)[37] 分别对此作了详细的讨论. Klimczewski 等给出了相关的历史资料[200].

这里我们将讨论经典等温曲面的这些性质以及基于现代孤立子理论的推广.

5.1　等温曲面的 Gauss-Mainardi-Codazzi 方程组, Calapso 方程以及对偶等温曲面

在曲面 $\Sigma: \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(x, y)$ 上取共形参数, 则第一基本形式为

$$\mathrm{I} = E(\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2). \tag{5.1}$$

如果进一步假设第二基本形式是对角的, 即

$$\mathrm{II} = e\,\mathrm{d}x^2 + g\,\mathrm{d}y^2, \tag{5.2}$$

那么就称这组坐标为 Σ 上的等温坐标. 如果曲面上存在等温坐标, 就称此曲面为等温曲面, 这时 x, y 是曲率线坐标, 主曲率为

$$\kappa_1 = \frac{e}{E}, \quad \kappa_2 = \frac{g}{E}. \tag{5.3}$$

等价地, 等温曲面也可定义为曲率线为共形的曲面.

常平均曲率曲面 (CMC) 或更一般的 Bonnet 曲面是等温的, 二次曲面和旋转曲面也是. 在旋转曲面上取曲率线参数 $r =$ 常数 (纬线) 和 $\eta =$ 常数 (经线), 则

$$\boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} r\cos\eta \\ r\sin\eta \\ \end{pmatrix}. \tag{5.4}$$

它是等温的, 因为度量

$$\mathrm{I} = [1 + \phi'(r)^2]\mathrm{d}r^2 + r^2\mathrm{d}\eta^2 \tag{5.5}$$

可以通过变换

$$\mathrm{d}x = \frac{1}{r}\sqrt{1 + \phi'(r)^2}\,\mathrm{d}r^2, \quad \mathrm{d}y = \mathrm{d}\eta \tag{5.6}$$

写为共形平坦形式

$$\mathrm{I} = r^2(\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2). \tag{5.7}$$

在这个变换中, 只是经线重新参数化了.

一般地, 记 $E = G = e^{2\theta}$, 则等温曲面的基本形式为

$$\mathrm{I} = e^{2\theta}(\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2), \quad \mathrm{II} = e^{2\theta}(\kappa_1\mathrm{d}x^2 + \kappa_2\mathrm{d}y^2), \tag{5.8}$$

相应的 Gauss-Weingarten 方程组为

$$\begin{gathered}
\begin{pmatrix} \boldsymbol{r}_x \\ \boldsymbol{r}_y \\ \boldsymbol{N} \end{pmatrix}_x = \begin{pmatrix} \theta_x & -\theta_y & \kappa_1 e^{2\theta} \\ \theta_y & \theta_x & 0 \\ -\kappa_1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{r}_x \\ \boldsymbol{r}_y \\ \boldsymbol{N} \end{pmatrix}, \\
\begin{pmatrix} \boldsymbol{r}_x \\ \boldsymbol{r}_y \\ \boldsymbol{N} \end{pmatrix}_y = \begin{pmatrix} \theta_y & \theta_x & 0 \\ -\theta_x & \theta_y & \kappa_2 e^{2\theta} \\ 0 & -\kappa_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{r}_x \\ \boldsymbol{r}_y \\ \boldsymbol{N} \end{pmatrix}.
\end{gathered} \tag{5.9}$$

由 Gauss-Weingarten 方程组的相容性条件得到等温曲面的 Gauss-Mainardi-Codazzi 方程组

$$\boxed{\begin{aligned} \theta_{xx} + \theta_{yy} + \kappa_1\kappa_2 e^{2\theta} &= 0, \\ \kappa_{1y} + (\kappa_1 - \kappa_2)\theta_y &= 0, \\ \kappa_{2x} + (\kappa_2 - \kappa_1)\theta_x &= 0. \end{aligned}} \tag{5.10}$$

对方程组 (5.10) 已有了深入研究[37, 95], 这是一个孤立子系统, 具有 Bäcklund 变换、可换性定理以及带谱参数的线性系统. 它的可积性由 Cieśliński 等在 1995 年给出[86].

1903 年, Calapso 发现等温方程组 (5.10) 可以约化为一个单一的四阶非线性方程[62]. 如果记

$$h_1 = -\kappa_1 e^{\theta}, \quad h_2 = -\kappa_2 e^{\theta}, \tag{5.11}$$

那么等温方程组 (5.10) 成为

$$\theta_{xx} + \theta_{yy} + h_1 h_2 = 0, \tag{5.12}$$

从而

$$h_{1xy} = \theta_x \theta_y h_1 + \theta_{xy} h_2, \quad h_{2xy} = \theta_x \theta_y h_2 + \theta_{xy} h_1. \tag{5.13}$$

如果记

$$z = \frac{1}{\sqrt{2}}(h_1 + h_2), \tag{5.14}$$

则

$$\frac{z_{xy}}{z} = \frac{(e^\theta)_{xy}}{e^\theta} = \theta_{xy} + \theta_x \theta_y. \tag{5.15}$$

所以, 利用 Gauss 方程组 $(5.10)_1$,

$$\begin{aligned} \Delta\left(\frac{z_{xy}}{z}\right) &= (\Delta\theta)_{xy} + \theta_x(\Delta\theta)_y + \theta_y(\Delta\theta)_x + 2\theta_{xy}\Delta\theta \\ &= -(h_1h_2)_{xy} - \theta_x(h_1h_2)_y - \theta_y(h_1h_2)_x - 2\theta_{xy}(h_1h_2), \end{aligned} \tag{5.16}$$

而

$$(z^2)_{xy} = (h_1h_2)_{xy} + \theta_x(h_1h_2)_y + \theta_y(h_1h_2)_x + 2\theta_{xy}(h_1h_2), \tag{5.17}$$

其中 $\Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2$. 由此可得 *Calapso* 方程

$$\boxed{\Delta\left(\frac{z_{xy}}{z}\right) + (z^2)_{xy} = 0.} \tag{5.18}$$

值得注意的是, 变换 $y \to \mathrm{i}y$ 产生了 *zoomeron* 方程

$$\Box\left(\frac{z_{xy}}{z}\right) + (z^2)_{xy} = 0, \quad \Box = \partial_x^2 - \partial_y^2. \tag{5.19}$$

1976 年 Calogero 和 Degasperis[63, 64] 发现它是孤立子理论中矩阵 boomeron 方程的特殊形式.

作为本节的结束, 我们考虑方程组 (5.12) 在

$$(\theta, h_1, h_2) \to (-\theta, -h_1, h_2) \tag{5.20}$$

下的不变性, 它给出了等温方程组 (5.10) 在

$$\theta^* = -\theta, \quad \kappa_1^* = -e^{2\theta}\kappa_1, \quad \kappa_2^* = e^{2\theta}\kappa_2 \tag{5.21}$$

下的不变性[119]. 于是, 存在与等温曲面 $\Sigma : \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(x, y)$ 相联系的对偶等温曲面 $\Sigma^* : \boldsymbol{r}^* = \boldsymbol{r}^*(x, y)$, 满足

$$\boldsymbol{r}_x^* = e^{-2\theta}\boldsymbol{r}_x, \quad \boldsymbol{r}_y^* = -e^{-2\theta}\boldsymbol{r}_y, \quad \boldsymbol{N}^* = -\boldsymbol{N}, \tag{5.22}$$

它相应的基本形式是

$$\begin{aligned} \mathrm{I}^* &= e^{-2\theta}(\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2), \\ \mathrm{II}^* &= -\kappa_1 \mathrm{d}x^2 + \kappa_2 \mathrm{d}y^2. \end{aligned} \tag{5.23}$$

$(5.22)_{1,2}$ 式的相容性条件 $\boldsymbol{r}^*_{xy} = \boldsymbol{r}^*_{yx}$ 可由 Gauss-Weingarten 方程组 (5.9) 得到. 对偶曲面 Σ^* 有时也称为曲面 Σ 的 Christoffel 变换. 对合 (5.20) 给出 Σ^* 相应的 Calapso 方程的解

$$z^* = \frac{1}{\sqrt{2}}(h_2 - h_1), \tag{5.24}$$

它可以看作是 z 的对偶.

练 习

1. *Enneper* **极小曲面** (1864). 证明 Enneper 曲面

$$\boldsymbol{r} = (3x + 3xy^2 - x^3, 3y + 3x^2y - y^3, 3x^2 - 3y^2)$$

是等温的, 并且曲率线 $x =$ 常数 和 $y =$ 常数 是平面曲线.

2. 证明具有常平均曲率[1] $\pm 1/a$ 的曲面上的曲率线形成一个等温坐标系, 并可选取参数 x, y 使得它的度量为

$$\mathrm{I} = a^2 e^{\pm\omega}(\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2),$$

其中 ω 是 sinh-Gordon 方程

$$\omega_{xx} + \omega_{yy} + \sinh\omega = 0$$

的解.

3. 证明等温曲面在反演

$$\boldsymbol{r} \to \frac{\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|^2}$$

下变为一个等温曲面.

5.2 $\mathbb{R}^{n+2}$ 中等温曲面的几何

等温曲面的概念很容易推广到高维. 事实上, 任意维欧氏空间中的等温曲面在形式上可以和经典的等温曲面一样来分析. 这里我们将考虑嵌入到 $\mathbb{R}^{n+2}$ 中的曲面 $\Sigma : \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(x, y)$, 即映射

$$\boldsymbol{r} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^{n+2}. \tag{5.25}$$

取标架 $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}, \underline{\boldsymbol{N}})$, 其中

[1]这里的平均曲率定义为 $\kappa_1 + \kappa_2$, 而不是 $(\kappa_1 + \kappa_2)/2$. ——译者.

$$\boldsymbol{X}=\frac{\boldsymbol{r}_x}{|\boldsymbol{r}_x|},\quad \boldsymbol{Y}=\frac{\boldsymbol{r}_y}{|\boldsymbol{r}_y|} \tag{5.26}$$

是单位化切向量, 而

$$\underline{\boldsymbol{N}}=(\boldsymbol{N}^1,\cdots,\boldsymbol{N}^n) \tag{5.27}$$

是 n 个线性无关的单位法向量, 即满足 $\boldsymbol{N}^i\cdot\boldsymbol{X}=\boldsymbol{N}^i\cdot\boldsymbol{Y}=0$, 或等价地,

$$\underline{\boldsymbol{N}}\cdot\boldsymbol{X}=\underline{\boldsymbol{N}}\cdot\boldsymbol{Y}=0. \tag{5.28}$$

对于曲面 $\Sigma\subset\mathbb{R}^{n+2}$, 有第一基本形式 I 和第二基本形式 $\underline{\mathrm{II}}=(\mathrm{II}^1,\cdots,\mathrm{II}^n)$, 它们是

$$\mathrm{I}=\mathrm{d}\boldsymbol{r}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r},\quad \underline{\mathrm{II}}=-\mathrm{d}\underline{\boldsymbol{N}}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}. \tag{5.29}$$

一个曲面 $\Sigma\subset\mathbb{R}^{n+2}$ 由它的基本形式 I 和 $\underline{\mathrm{II}}$ 完全确定[116].

5.2.1 共轭坐标和正交坐标

这里假设曲面 Σ 上可以取共轭坐标[119]. 对于 $\mathbb{R}^3$ 或 $\mathbb{R}^4$ 中的曲面, 这总是可以做到的, 并且在 $\mathbb{R}^4$ 中共轭坐标系是唯一确定的. 但对于 $\mathbb{R}^{n+2}, n>2$ 时, 存在共轭坐标系是需要附加条件的.

共轭坐标系定义为使得第二基本形式 $\underline{\mathrm{II}}$ 是对角的, 即

$$\underline{\boldsymbol{N}}_x\cdot\boldsymbol{r}_y=\underline{\boldsymbol{N}}_y\cdot\boldsymbol{r}_x=0. \tag{5.30}$$

从而

$$\underline{\boldsymbol{N}}\cdot\boldsymbol{r}_{xy}=0, \tag{5.31}$$

于是位置向量 $\boldsymbol{r}$ 满足共轭坐标为参数时曲面所满足的方程 (参见 3.3 节)

$$\boldsymbol{r}_{xy}=A\boldsymbol{r}_x+B\boldsymbol{r}_y. \tag{5.32}$$

反之, 如果存在函数 A 和 B 使得曲面 Σ 的位置向量 $\boldsymbol{r}$ 满足方程 (5.32), 那么 Σ 上的坐标是共轭坐标.

如果还要求 Σ 上的坐标曲线是正交的, 即

$$\boldsymbol{r}_x\cdot\boldsymbol{r}_y=0, \tag{5.33}$$

那么两个基本形式 I, $\underline{\mathrm{II}}$ 都是对角的, 可写成

$$\begin{aligned}\mathrm{I}&=H_1^2\mathrm{d}x^2+H_2^2\mathrm{d}y^2,\\ \underline{\mathrm{II}}&=H_1^2\underline{\kappa}_1\mathrm{d}x^2+H_2^2\underline{\kappa}_2\mathrm{d}y^2.\end{aligned} \tag{5.34}$$

这里, 向量 $\underline{\kappa}_1$ 和 $\underline{\kappa}_2$ 与 $\mathbb{R}^3$ 中主曲率相对应. 易证[116], 可以选取标准正交标架 $(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y},\underline{\boldsymbol{N}})$ 使得位置向量满足 Gauss-Weingarten 方程组

$$
\begin{pmatrix} \boldsymbol{X} \\ \boldsymbol{Y} \\ \underline{\boldsymbol{N}} \end{pmatrix}_x = \begin{pmatrix} 0 & -p & -\underline{h}_1^{\mathrm{T}} \\ p & 0 & 0 \\ \underline{h}_1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{X} \\ \boldsymbol{Y} \\ \underline{\boldsymbol{N}} \end{pmatrix},
$$
$$
\begin{pmatrix} \boldsymbol{X} \\ \boldsymbol{Y} \\ \underline{\boldsymbol{N}} \end{pmatrix}_y = \begin{pmatrix} 0 & q & 0 \\ -q & 0 & -\underline{h}_2^{\mathrm{T}} \\ 0 & \underline{h}_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{X} \\ \boldsymbol{Y} \\ \underline{\boldsymbol{N}} \end{pmatrix}. \tag{5.35}
$$

这里, p, q 和 $\underline{h}_1, \underline{h}_2$ 满足

$$
H_{1y} = pH_2, \quad H_{2x} = qH_1, \tag{5.36}
$$

$$
\underline{h}_1 = -H_1\underline{\kappa}_1, \quad \underline{h}_2 = -H_2\underline{\kappa}_2, \tag{5.37}
$$

而对于任何两个向量, $\underline{f} = (f^1, \cdots, f^n)$, $\underline{g} = (g^1, \cdots, g^n)$,

$$
\underline{f}^{\mathrm{T}}\underline{g} = \sum_{i=1}^{n} f^i g^i. \tag{5.38}
$$

由方程组 (5.35) 的相容性条件得到 Gauss-Mainardi-Codazzi 方程组

$$
p_y + q_x + \underline{h}_1^{\mathrm{T}}\underline{h}_2 = 0, \quad \underline{h}_{1y} = p\underline{h}_2, \quad \underline{h}_{2x} = q\underline{h}_1. \tag{5.39}
$$

注意到 $\underline{h}_1, \underline{h}_2$ 和 H_1, H_2 满足相同的线性方程组. 反之, 方程组 (5.36) 和 (5.39) 的解通过 Gauss-Weingarten 方程组 (5.35) 在允许差一个旋转外唯一地决定了一个标准正交标架 $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}, \underline{\boldsymbol{N}})$. 于是, 对应的曲面在允许相差一个运动外由 (5.26) 式, 即

$$
\boldsymbol{r}_x = H_1\boldsymbol{X}, \quad \boldsymbol{r}_y = H_2\boldsymbol{Y} \tag{5.40}
$$

所确定.

5.2.2　等温曲面

同经典情形类似, 一个曲面 $\Sigma \subset \mathbb{R}^{n+2}$ 称为等温的, 如果它具有一个既是共轭的又是共形的坐标系. 这时, 第一基本形式与平坦度量成正比:

$$
\mathrm{I} = e^{2\theta}(\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2), \quad H_1 = H_2 = e^{\theta}. \tag{5.41}
$$

于是

$$
p = \theta_y, \quad q = \theta_x, \tag{5.42}
$$

Gauss-Mainardi-Codazzi 方程组成为

$$
\Delta\theta + \underline{h}_1^{\mathrm{T}}\underline{h}_2 = 0, \quad \underline{h}_{1y} = \theta_y\underline{h}_2, \quad \underline{h}_{2x} = \theta_x\underline{h}_1, \tag{5.43}
$$

其中 Laplace 算子 $\Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2$. 方程组 (5.43) 称为**向量等温方程组**, 它是经典等温方程组 (5.12) 在 $\mathbb{R}^{n+2}$ 中的推广.

像经典情形一样, 任何一个等温曲面 Σ 有一个对偶等温曲面. 考虑一族曲面 Σ^*, 上面存在共轭曲线 “平行于” 等温曲面 Σ 上的相应曲线. 根据定义 (参见 5.4.1 小节), 对这样的 Σ^*, 存在函数 π_1 和 π_2, 使得对应的位置向量 $\boldsymbol{r}^*$ 满足

$$\boldsymbol{r}_x^* = \pi_1 \boldsymbol{X}, \quad \boldsymbol{r}_y^* = \pi_2 \boldsymbol{Y}. \tag{5.44}$$

交叉求导并利用 Gauss-Weingarten 方程组 (5.35) 得到

$$\pi_{1y} = \theta_y \pi_2, \quad \pi_{2x} = \theta_x \pi_1, \tag{5.45}$$

由此重新得到 (5.36) 式的形式. 如果我们要求 Σ^* 是等温的, 那么 $\boldsymbol{r}_x^* \cdot \boldsymbol{r}_x^* = \boldsymbol{r}_y^* \cdot \boldsymbol{r}_y^*$, 从而

$$\pi_1 = \pm \pi_2. \tag{5.46}$$

不失一般性, 在上面取正号时可设 $\pi_1 = \pi_2 = e^\theta$, 此时重新得到了原始曲面 Σ, 因为

$$\boldsymbol{r}_x = e^\theta \boldsymbol{X}, \quad \boldsymbol{r}_y = e^\theta \boldsymbol{Y}. \tag{5.47}$$

但是, 取负号时, 有

$$\pi_1 = -\pi_2 = e^{-\theta}, \tag{5.48}$$

$$\boldsymbol{r}_x^* = e^{-2\theta} \boldsymbol{r}_x, \quad \boldsymbol{r}_y^* = -e^{-2\theta} \boldsymbol{r}_y. \tag{5.49}$$

按照 $\mathbb{R}^3$ 中的说法, 等温曲面 Σ^* 称为 Σ 的 Christoffel 变换, 对应的基本形式为

$$\begin{aligned} \mathrm{I}^* &= e^{-2\theta}(\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2), \\ \underline{\mathrm{II}}^* &= -\underline{\kappa}_1 \mathrm{d}x^2 + \underline{\kappa}_2 \mathrm{d}y^2. \end{aligned} \tag{5.50}$$

与基本形式 (5.34) 和 (5.41) 比较得

$$\theta^* = -\theta, \quad \underline{h}_1^* = -\underline{h}_1, \quad \underline{h}_2^* = \underline{h}_2, \tag{5.51}$$

这是 (5.20) 式的向量类比.

5.2.3 特殊情形以及推广

上面对于等温曲面的 Christoffel 变换的讨论得出了典型的向量等温方程组. 我们现在讨论经典的 $n = 1$ 情形. 由于 π_i 和 h_i 满足相同的线性方程, 方程组 (5.45) 的任何两个解的线性组合

$$h_1 = c_1 e^\theta + c_2 e^{-\theta}, \quad h_2 = c_1 e^\theta - c_2 e^{-\theta} \tag{5.52}$$

满足等温方程组 (5.43) 的后两个方程, 剩下的方程是椭圆 sinh-Gordon 方程

$$\Delta\theta + c_1^2 e^{2\theta} - c_2^2 e^{-2\theta} = 0 \tag{5.53}$$

而曲面的平均曲率为

$$\mathcal{H} = \kappa_1 + \kappa_2 = -e^{-\theta}(h_1 + h_2) = -2c_1. \tag{5.54}$$

于是, 特殊取法 (5.52) 给出了一个常平均曲率曲面 (参见 1.5 节). 进一步, 如果 $c_1 = 0$, 那么平均曲率为零, 曲面 Σ 是极小曲面, 而同极小曲面对偶的曲面是球面. 反之, 如果 $c_2 = 0$, 则 Σ 是一个球面, 而 Σ^* 是极小的. 在上面两个情形, (5.53) 式给出了椭圆 Liouville 方程.

在向量情形, 可以假设 (5.52) 式对 $\underline{h}_1$ 和 $\underline{h}_2$ 的一个分量成立, 在最简单的情形, 取

$$\underline{h}_i = (h_i^1, \cdots, h_i^{n-1}, e^{\theta}) = (\hat{\underline{h}}_i, e^{\theta}), \tag{5.55}$$

则

$$\Delta\theta + \hat{\underline{h}}_1^{\mathrm{T}} \hat{\underline{h}}_2 + e^{2\theta} = 0, \quad \hat{\underline{h}}_{1y} = \theta_y \hat{\underline{h}}_2, \quad \hat{\underline{h}}_{2x} = \theta_x \hat{\underline{h}}_1. \tag{5.56}$$

Gauss-Weingarten 方程组 (5.35) 成为

$$\boldsymbol{N}_x^n = e^{\theta}\boldsymbol{X}, \quad \boldsymbol{N}_y^n = e^{\theta}\boldsymbol{Y}. \tag{5.57}$$

同 (5.47) 式相比较, 可不失一般性得到

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{N}^n. \tag{5.58}$$

所以, 等温曲面 Σ 嵌入在 $n+1$ 维球中, 即

$$\boldsymbol{r} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{S}^{n+1} \subset \mathbb{R}^{n+2}. \tag{5.59}$$

换句话说, 向量等温方程组与常正曲率 Riemann 空间中的等温曲面相容[116].

此外, 变换 $y \to \mathrm{i}y$ 将向量等温方程组 (5.43) 变为

$$\Box\theta + \underline{h}_1^{\mathrm{T}} \underline{h}_2 = 0, \quad \underline{h}_{1y} = \theta_y \underline{h}_2, \quad \underline{h}_{2x} = \theta_x \underline{h}_1, \tag{5.60}$$

这里 $\Box = \partial_x^2 - \partial_y^2$ 是 d'Alembert 算子. 用几何语言来说, 这个方程组描述了 Minkowski 空间 $\mathbb{M}^{n+2}$ 中一个具有类空法丛的等温曲面. Calogero 和 Degasperis[63, 64] 建立了 $\mathbb{M}^3$ 和 $\mathbb{M}^4$ 中等温方程组与孤立子理论中 zoomeron 方程和 boomeron 方程的联系.

练　习

1. 记 $\underline{\boldsymbol{N}}$ 为法丛的正交标架, 且曲面具有共轭正交坐标, 则 Gauss-Weingarten 方程为

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{X} \\ \boldsymbol{Y} \\ \underline{\boldsymbol{N}} \end{pmatrix}_x = \begin{pmatrix} 0 & -p & -\underline{h}_1^{\mathrm{T}} \\ p & 0 & 0 \\ \underline{h}_1 & 0 & D_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{X} \\ \boldsymbol{Y} \\ \underline{\boldsymbol{N}} \end{pmatrix}, \quad D_1^{\mathrm{T}} = -D_1,$$

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{X} \\ \boldsymbol{Y} \\ \underline{\boldsymbol{N}} \end{pmatrix}_y = \begin{pmatrix} 0 & q & 0 \\ -q & 0 & -\underline{h}_2^{\mathrm{T}} \\ 0 & \underline{h}_2 & D_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{X} \\ \boldsymbol{Y} \\ \underline{\boldsymbol{N}} \end{pmatrix}, \quad D_2^{\mathrm{T}} = -D_2.$$

导出相应的 Gauss-Mainardi-Codazzi 方程组, 并证明存在正交矩阵 $O = (O_j^i)$, 使得在变换

$$\boldsymbol{N}^i \to O_j^i \boldsymbol{N}^j$$

下,

$$D_1 \to 0, \quad D_2 \to 0.$$

5.3 向量 Calapso 方程组及其标量 Lax 对

5.1 节中得出了同 $\mathbb{R}^3$ 中等温曲面相联系的 Calapso 四阶方程. 这里, 我们将给出 Calapso 方程的向量推广以及相应的 (非局域) 标量 Lax 对.

5.3.1 向量 Calapso 方程组

为了得到与 Calapso 方程相类似的描述 $\mathbb{R}^{n+2}$ 中等温曲面的方程, 我们引入向量值函数

$$\underline{z} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\underline{h}_1 + \underline{h}_2). \tag{5.61}$$

下面应用前面导出经典 Calapso 方程的方法. 将 $(5.43)_2$ 式和 $(5.43)_3$ 式分别对 x 和 y 求导得到

$$\underline{z}_{xy} = \rho \underline{z}, \quad \rho = e^{-\theta}(e^{\theta})_{xy}, \tag{5.62}$$

然后将 $(5.43)_1$ 式代入得到

$$\Delta\rho + (\underline{z}^2)_{xy} = 0, \tag{5.63}$$

这里用了常用的简化记号 $\underline{z}^2 = \underline{z}^{\mathrm{T}}\underline{z}$. 我们将线性方程组

$$\boxed{\underline{z}_{xy} = \rho \underline{z}, \quad \Delta\rho + (\underline{z}^2)_{xy} = 0} \tag{5.64}$$

称为**向量 *Calapso* 方程组**[59, 60, 331], 因为在 $n = 1$ 的经典情形, 可以通过消去函数 ρ 得到 Calapso 方程 (5.18). 注意到[2]向量等温方程组在变换 (5.51) 下的不变性以

及方程组 (5.64) 在 $\underline{z} \to -\underline{z}$ 下的不变性,

$$\underline{z}^* = \frac{1}{\sqrt{2}}(\underline{h}_1 - \underline{h}_2), \quad \rho^* = e^{\theta}(e^{-\theta})_{xy} \tag{5.65}$$

是向量 Calapso 方程组的另一个解.

从孤立子理论的观点来看, $\mathbb{R}^4$ 中的等温曲面是特别感兴趣的. 引入复值函数 u, 使得

$$\underline{z} = (\Re(u), \Im(u)), \tag{5.66}$$

那么向量 Calapso 方程组可以看作为可积 (Benney-Roskes-)Davey-Stewartson II 方程[29, 98]

$$\mathrm{i}u_t = u_{xy} - \rho u, \quad \Delta\rho + (|u|^2)_{xy} = 0 \tag{5.67}$$

的静态约化 ($u_t = 0$). 于是, 静态 Davey-Stewartson II 方程描述了 $\mathbb{R}^4$ 中的等温曲面. Ferapontov[128] 在研究经典 Calapso 方程时得到了这个有趣的关系, 而 Calapso 方程对应于 Davey-Stewartson II 方程的实约化. Minkowski 空间 $\mathbb{M}^4$ 中等温曲面上的变换 $(y, \rho) \to \mathrm{i}(y, -\rho)$ 给出

$$\underline{u}_{xy} = \rho\underline{u}, \quad \Box\rho + (|u|^2)_{xy} = 0, \tag{5.68}$$

这给出了可积 Davey-Stewartson III 方程[50, 320, 342]

$$\mathrm{i}u_t = u_{xy} - \rho u, \quad \Box\rho + (|u|^2)_{xy} = 0 \tag{5.69}$$

的静态约化. 值得注意的是, [100] 指出, 向量 Calapso 方程组 (5.68) 等价于由 Calogero 和Degasperis [63, 64] 独立提出的矩阵*boomeron* 方程的一类特殊情形.

5.3.2 标量 Lax 对

向量 Calapso 方程组可以看作一个 Moutard 方程 $(5.64)_1$, 其中 $\underline{z}$ 通过势 ρ 与 Poisson 方程 $(5.64)_2$ 相耦合. 这个解释可用来构造向量 Calapso 方程的 Lax 对. 对于 Christoffel 变换 Σ^*, 我们引入 "标度化的" 的位置向量

$$\boldsymbol{\psi} = e^{\theta}\boldsymbol{r}^*, \tag{5.70}$$

从而由 (5.47) 式和 (5.49) 式得

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{\psi}_x - \theta_x\boldsymbol{\psi}, \quad \boldsymbol{Y} = -\boldsymbol{\psi}_y + \theta_y\boldsymbol{\psi}. \tag{5.71}$$

这些关系可以用来消去 Gauss-Weingarten 方程组 (5.35) 中的切向量 $\boldsymbol{X}$ 和 $\boldsymbol{Y}$. $\boldsymbol{X}_y$ 和 $\boldsymbol{Y}_x$ 的表达式给出了形如 $(5.64)_1$ 的向量方程

$$\boldsymbol{\psi}_{xy} = \rho\boldsymbol{\psi}, \quad \rho = e^{-\theta}(e^{\theta})_{xy} \tag{5.72}$$

于是, $\underline{z}$ 和 ψ 满足具有相同势 ρ 的 Moutard 方程. Moutard 方程有一个双线性势 (参见第 1 章), 现在它与一族法向量 $\underline{\boldsymbol{N}}$ 相联系. 特别地, 记

$$\underline{\boldsymbol{S}} = \underline{z}^*\boldsymbol{\psi} - \sqrt{2}\underline{\boldsymbol{N}}, \tag{5.73}$$

由 Gauss-Weingarten 方程组得出

$$\underline{\boldsymbol{S}}_x = \underline{z}_x\boldsymbol{\psi} - \underline{z}\boldsymbol{\psi}_x, \quad \underline{\boldsymbol{S}}_y = \underline{z}\boldsymbol{\psi}_y - \underline{z}_y\boldsymbol{\psi}, \tag{5.74}$$

以及

$$\begin{aligned} \Box\boldsymbol{\psi} + f\boldsymbol{\psi} &= \underline{z}^{\mathrm{T}}\underline{\boldsymbol{S}}(\underline{z}, \boldsymbol{\psi}), \\ \Delta\boldsymbol{\psi} - 2\nabla\theta\cdot\nabla\boldsymbol{\psi} + g\boldsymbol{\psi} &= \underline{z}^{*\mathrm{T}}\underline{\boldsymbol{S}}(\underline{z}, \boldsymbol{\psi}), \end{aligned} \tag{5.75}$$

而函数 f, g 由

$$f = \underline{z}^{\mathrm{T}}\underline{z}^* - e^{-\theta}\Box e^{\theta}, \quad g = \underline{z}^{*2} + e^{\theta}\Delta e^{-\theta} \tag{5.76}$$

给出. 方程组 (5.75) 正是 Gauss-Weingarten 方程组 (5.35) 的重新表述.

双线性势 $\underline{\boldsymbol{S}}$ 有确切定义当且仅当 $\underline{z}$ 是 Moutard 方程 $(5.64)_1$ 的解. 由相容性条件 $\Box(\boldsymbol{\psi}_{xy}) = (\Box\boldsymbol{\psi})_{xy}$ 得出

$$f_x = 2\rho_y + (\underline{z}^2)_x, \quad f_y = -2\rho_x - (\underline{z}^2)_y \tag{5.77}$$

以及 $(5.64)_2$ 式, 而 $(5.64)_2$ 式包含了方程组 (5.77) 的相容性条件. 于是, 我们重新得到了向量 Calapso 方程组 (5.64), 而 f 是与之相关的势, 它在 Calapso 的早期工作[62] 中已被引入.

因为方程 (5.77) 的通解依赖于一个任意的相加常数, 它在

$$f \to f + k \tag{5.78}$$

下的不变性可用于在线性系统中加入谱参数, 从而有下述定理.

定理 7 (向量 Calapso 方程组的 Lax 对) 标量 (非局域) Lax 对

$$\psi_{xy} = \rho\psi, \quad \Box\psi + (f + k)\psi = \underline{z}^{\mathrm{T}}\underline{S}(\underline{z}, \psi) \tag{5.79}$$

与

$$\underline{S}_x = \underline{z}_x\psi - \underline{z}\psi_x, \quad \underline{S}_y = \underline{z}\psi_y - \underline{z}_y\psi \tag{5.80}$$

相容当且仅当 $(\underline{z}, \rho)$ 是向量 Calapso 方程组 (5.64) 的解, 而 f 是对应的势, 满足 (5.77) 式, 这里 k 是一个任意常数. 线性方程组 (5.79) 具有首次积分

如果 ψ_0 是对应于 $I=0$ 的特征函数, 即是方程组 (5.79) 的解, 那么

$$\underline{z}^* = \frac{\underline{S}(\underline{z},\psi_0)}{\psi_0}, \quad \rho^* = \psi_0(\psi_0^{-1})_{xy} \tag{5.82}$$

是向量 Calapso 方程组的另一个解, 并且

$$\theta = \ln\psi_0, \quad \underline{h}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\underline{z}+\underline{z}^*), \quad \underline{h}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\underline{z}-\underline{z}^*) \tag{5.83}$$

满足向量等温方程组 (5.43).

证明　我们已经知道 Lax 对 (5.79) 相容当且仅当向量 Calapso 方程组成立. 换一种角度来看, 引入 $(n+4)$ 维向量 $\phi=(\psi,\psi_x,\psi_y,\Delta\psi,\underline{S})$, 并将 (5.79) 式和 (5.80) 式写为矩阵 Frobenius 方程组

$$\phi_x = F\phi, \quad \phi_y = G\phi. \tag{5.84}$$

相容性条件

$$F_y - G_x + [F,G] = 0 \tag{5.85}$$

就给出向量 Calapso 方程组以及 f 所满足的 Frobenius 方程组.

首次积分 (5.81) 可以直接验证, 它在构造向量 Calapso 方程组的 Bäcklund 变换中起着重要的作用, 它也给出了向量等温方程组和 Calapso 方程组之间的联系. 记 $\psi_0=e^\theta$ 为特征函数, $\underline{S}_0=\underline{S}(\underline{z},\psi_0)$ 为对应的双线性势, 那么 (5.81) 式可写为

$$2\Delta\theta + \underline{z}^2 - \underline{S}_0^2 e^{-2\theta} = Ie^{-2\theta}. \tag{5.86}$$

在 $I=0$ 时, 如果 $\underline{z}^*$ 和 $\underline{h}_1,\underline{h}_2$ 分别由 (5.82) 和 (5.83) 式所定义, 则上述方程约化为 $(5.43)_1$ 式. 容易验证 $\underline{h}_1$ 和 $\underline{h}_2$ 满足剩下的方程 $(5.43)_{2,3}$, 从而 (5.82) 式给出了向量 Calapso 方程组的另一个解 (参见 (5.65) 式). 进一步, 如果 I 是正的, 那么方程 (5.86) 与 $\mathbb{R}^{n+3}$ 中的等温曲面相联系, 而其对偶曲面嵌入在球面 $\mathbb{S}^{n+2}$ 中 (参见 5.2.3 小节). □

5.3.3　约化

我们以下列重要结果结束本节. 因为 $z=-e^{-\theta}\mathcal{H}/\sqrt{2}$, Calapso 方程的解

$$z=0, \quad \Delta\rho=0 \tag{5.87}$$

对应于极小曲面 (参见练习 1). 下面构造对应于常平均曲率曲面的 Calapso 方程的解. 因为 z 满足 Lax 对 (5.79) 的第一个方程, 可以要求 z 是 Calapso 方程的特征函数. 利用 $(5.79)_2$ 式将势 f 用 z 显式地表示出来, 即

$$f = S - k - \frac{\Box z}{\ } \tag{5.88}$$

其中 $S = S(z, z)$ 是常数. 将 (5.88) 式代入 (5.77) 式得到两个三阶方程, 由此积分就得到首次积分 (5.81), 即

$$\Delta(\ln z) + \frac{1}{2}z^2 - \frac{S^2 + I}{2z^2} = 0. \tag{5.89}$$

在 $\theta = \ln z$ 时这就是椭圆 sinh-Gordon 方程 (5.53).

练　习

1. 证明如果 z 满足 Calapso 方程和 $(5.79)_2$ 式, 那么方程组 (5.77) 的解由 (5.88) 式给出, 其中 $\theta = \ln z$ 满足 sinh-Gordon 方程

$$\Delta\theta + \frac{1}{2}e^{2\theta} - ce^{-2\theta} = 0,$$

c 是积分常数.

5.4 基 本 变 换

关于共轭网的变换的经典结果可以在 Eisenhart 的书[119] 上找到, 该书中对 Laplace-Darboux 变换、径向变换、Levy 变换和基本变换都作了详细的讨论. 文献 [212] 中讨论了这些经典几何变换与现代孤立子理论的关系. 相应的离散问题随后由 Konopelchenko, Schief[213] 和 Doliwa 等[113] 所研究. 下面要讨论基本变换, 它是由 Jonas 在 1915 年引入的[183].

5.4.1 平行网与梳状变换

回到共轭网 (点) 方程

$$\boldsymbol{r}_{xy} = (\ln H_1)_y \boldsymbol{r}_x + (\ln H_2)_x \boldsymbol{r}_y. \tag{5.90}$$

从 3.3 节中已知向量值函数 $\boldsymbol{r}$ 可以等同于曲面 Σ 上的位置向量, 在此曲面上坐标曲线 $x =$ 常数 和 $y =$ 常数 形成共轭网 $\mathcal{N}$. 曲面 Σ' 上的网 $\mathcal{N}'$ 称为平行于 $\mathcal{N}$, 如果 Σ 和 Σ' 在对应点的坐标曲线的切向量互相平行, 即存在函数 h 和 l 使得

$$\mathcal{C}: \quad \boldsymbol{r}'_x = h\boldsymbol{r}_x, \quad \boldsymbol{r}'_y = l\boldsymbol{r}_y. \tag{5.91}$$

$\boldsymbol{r}'$ 满足点方程

$$\boldsymbol{r}'_{xy} = (\ln H'_1)_y \boldsymbol{r}'_x + (\ln H'_2)_x \boldsymbol{r}'_y, \tag{5.92}$$

其中的系数

因此 $\mathcal{N}'$ 也是共轭网. 从 $\mathcal{N}$ 到 $\mathcal{N}'$ 的变换通常称为梳状变换. 平行网的存在性由 (5.91) 式的相容性条件所保证, 即

$$h_y = (l-h)(\ln H_1)_y, \quad l_x = (h-l)(\ln H_2)_x. \tag{5.94}$$

这个方程组是点方程 (5.90) 的共轭.

5.4.2　径向变换

还可以通过点方程 (5.90) 的标量解 ϕ 来构造共轭网. 事实上, 径向变换

$$\mathcal{R}: \quad \boldsymbol{r}^* = \frac{\boldsymbol{r}}{\phi} \tag{5.95}$$

满足共轭网方程

$$\boldsymbol{r}^*_{xy} = (\ln H_1^*)_y \boldsymbol{r}^*_x + (\ln H_2^*)_x \boldsymbol{r}^*_y, \tag{5.96}$$

其中的系数

$$H_1^* = \frac{H_1}{\phi}, \quad H_2^* = \frac{H_2}{\phi}. \tag{5.97}$$

用孤立子语言来说, 径向变换是一种特殊的规范变换.

与径向变换 $\boldsymbol{r}^*$ 相联系的共轭方程组 (5.94) 的一个特解为

$$h^* = \phi' - h\phi, \quad l^* = \phi' - l\phi, \tag{5.98}$$

其中 ϕ' 是一个标量, 同 $\boldsymbol{r}'$ 满足相同的方程

$$\phi'_x = h\phi_x, \quad \phi'_y = l\phi_y. \tag{5.99}$$

注意到

$$\phi^* = \frac{1}{\phi} \tag{5.100}$$

是点方程 (5.96) 的一个标量解, 因为任一常数是种子方程 (5.90) 的一个平凡标量解.

5.4.3　基本变换

利用相应于 (h^*, l^*) 的梳状变换, 我们将共轭网 $\mathcal{N}^*$ 映为共轭网 $\mathcal{N}^{*\prime}$, 那么曲面 $\Sigma^{*\prime}$ 的位置向量满足

$$\begin{aligned} \boldsymbol{r}^{*\prime}_x &= h^* \boldsymbol{r}^*_x = (\phi' - h\phi)\left(\frac{\boldsymbol{r}}{\phi}\right)_x, \\ \boldsymbol{r}^{*\prime}_y &= l^* \boldsymbol{r}^*_y = (\phi' - l\phi)\left(\frac{\boldsymbol{r}}{\phi}\right)_y. \end{aligned} \tag{5.101}$$

通过积分这些方程, 不失一般性可得

$$\boldsymbol{r}^{*\prime} = \frac{\phi'}{\phi}\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'. \tag{5.102}$$

于是, 相应的点方程

$$\boldsymbol{r}^{*\prime}_{xy} = (\ln H_1^{*\prime})_y \boldsymbol{r}^{*\prime}_x + (\ln H_2^{*\prime})_x \boldsymbol{r}^{*\prime}_y \tag{5.103}$$

有一个标量解

$$\phi^{*\prime} = \frac{\phi'}{\phi}, \tag{5.104}$$

这里

$$H_1^{*\prime} = (\phi' - h\phi)\frac{H_1}{\phi}, \quad H_2^{*\prime} = (\phi' - l\phi)\frac{H_2}{\phi}. \tag{5.105}$$

再次应用径向变换就给出共轭网 $\tilde{\mathcal{N}} = \mathcal{N}^{*\prime *}$, 相应的位置向量

$$\tilde{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{r}^{*\prime *} = \frac{\boldsymbol{r}^{*\prime}}{\phi^{*\prime}}. \tag{5.106}$$

这个变换称为 $\boldsymbol{r}$ 的基本变换.

定理 8 (基本变换) *共轭网方程 (5.90) 在基本变换*

$$\mathcal{F}: \quad \begin{cases} \boldsymbol{r} \to \tilde{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{r} - \dfrac{\phi}{\phi'}\boldsymbol{r}', \\ H_1 \to \tilde{H}_1 = \left(1 - h\dfrac{\phi}{\phi'}\right) H_1, \\ H_2 \to \tilde{H}_2 = \left(1 - l\dfrac{\phi}{\phi'}\right) H_2 \end{cases} \tag{5.107}$$

下保持不变. 进一步, $\mathcal{F}$ *可以按*

$$\mathcal{F} = \mathcal{R} \circ \mathcal{C} \circ \mathcal{R} \tag{5.108}$$

分解成一个梳状变换和两个径向变换的复合.

下节中, 将讨论与基本变换相联系的可换性定理及其在等温曲面中的应用.

练　　习

1. 证明由

$$\boldsymbol{r}_1 = \boldsymbol{r} - \frac{\phi}{\phi_y}\boldsymbol{r}_y$$

和

$$\boldsymbol{r}_2 = \boldsymbol{r} - \frac{\phi}{\phi_x}\boldsymbol{r}_x$$

给出的与 ϕ 相联系的*Levy* 变换分别将满足点方程 (5.90) 的共轭网变为满足点方程

和

$$\boldsymbol{r}_{2xy} = (\ln \alpha)_y \boldsymbol{r}_{2x} + [\ln\{\beta(\ln \alpha)_y\}]_x \boldsymbol{r}_{2y}$$

的共轭网, 这里

$$\alpha = H_1 \frac{\phi}{\phi_x}, \quad \beta = H_2 \frac{\phi}{\phi_y}.$$

2. 在共轭网 $\mathcal{N}$ 及其相应于 ϕ 的径向变换 $\mathcal{N}^*$ 上, 分别取相应于 $\phi - 1$ 的 Levy 变换

$$\boldsymbol{r} - \frac{(\phi-1)}{(\phi-1)_y} \boldsymbol{r}_y$$

和

$$\boldsymbol{r} - \frac{(\phi-1)}{(\phi-1)_x} \boldsymbol{r}_x$$

的对应点, 则在对应点上, 分别成立 $x =$ 常数 和 $y =$ 常数 的切线互相平行.

5.5 等温曲面的 Bäcklund 变换

本节中, 将讨论 Darboux[95] 和 Bianchi[36] 所建立的等温曲面的经典 Bäcklund 变换的推广. Darboux 的 Bäcklund 变换可参见 [59-61, 165],它的矩阵 Darboux 变换表示 (参见第 7 章) 由 Cieśliński 给出[83]. 当将标量函数换为向量值函数时, 任意维空间中等温曲面的 Bäcklund 变换可模仿 Darboux 的经典变换得到[331]. 这里, 我们将要基于经典的基本变换从孤立子理论观点得到 Bäcklund 变换.

5.5.1 共轭坐标系的基本变换

上节中, 我们已经知道点方程 (5.90) 在基本变换下是不变的. 虽然基本变换是在 $\mathbb{R}^3$ 中导出的, 很明显定理 8 在任意维数下都是对的. 我们将考虑点方程的两个等价形式, 即原始的二阶形式

$$\boldsymbol{r}_{xy} = (\ln H_1)_y \boldsymbol{r}_x + (\ln H_2)_x \boldsymbol{r}_y \tag{5.109}$$

以及引入

$$\boldsymbol{X} = \frac{\boldsymbol{r}_x}{H_1}, \quad \boldsymbol{Y} = \frac{\boldsymbol{r}_y}{H_2}, \quad p = \frac{H_{1y}}{H_2}, \quad q = \frac{H_{2x}}{H_1} \tag{5.110}$$

后得到的一阶形式

$$\boldsymbol{X}_y = q\boldsymbol{Y}, \quad \boldsymbol{Y}_x = p\boldsymbol{X}. \tag{5.111}$$

注意到 (5.111) 式是 Gauss-Weingarten 方程组 (5.35) 的一部分, 而 (5.110) 式与 (5.36) 式以及 (5.40) 式一致. 但是, 这里 $\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}$ 和 H_i 不再是单位向量以及度量系数.

我们已经知道, 曲面 Σ' 上的共轭坐标系称为平行共轭网, 如果在 Σ 和 Σ' 上的对应点, 坐标曲线的切向量互相平行. 这时, 存在函数 X' 和 Y' 满足

$$\boldsymbol{r}'_x = X'\boldsymbol{X}, \quad \boldsymbol{r}'_y = Y'\boldsymbol{Y}. \tag{5.112}$$

如果这个方程组有解, 需要成立相容性条件

$$X'_y = pY', \quad Y'_x = qX', \tag{5.113}$$

它给出平行共轭网. 这里 X' 和 Y' 同上节中所用的量的关系是

$$X' = H_1 h, \quad Y' = H_2 l. \tag{5.114}$$

线性方程组 (5.113) 可以看作同 (5.111) 式共轭. 在孤立子理论中, 我们将方程组 (5.109) 和 (5.111) 的解看作为特征函数, 而 (5.113) 的解为共轭特征函数. 于是平行网 $\boldsymbol{r}'$ 可以用平方特征函数来定义. 由 $(5.110)_{3,4}$ 知道, H_1 和 H_2 是共轭特征函数.

用上述记号, 我们有[331]

定理 9 (基本变换)　设 $\boldsymbol{r}$ 是共轭网, 相应的切向量为 $\boldsymbol{X}$ 和 $\boldsymbol{Y}$, r, X, Y 是方程组 (5.109), (5.111) 的标量解, 且

$$r_x = H_1 X, \quad r_y = H_2 Y. \tag{5.115}$$

又设 $\boldsymbol{r}'$ 是相应于方程 (5.113) 的解 X', Y' 的平行网. 那么第二个共轭网 $\tilde{\boldsymbol{r}}$ 由基本变换

$$\begin{gathered}\tilde{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{r} - r\frac{\boldsymbol{r}'}{r'}, \quad \tilde{\boldsymbol{X}} = \boldsymbol{X} - X\frac{\boldsymbol{r}'}{r'}, \quad \tilde{\boldsymbol{Y}} = \boldsymbol{Y} - Y\frac{\boldsymbol{r}'}{r'}, \\ \tilde{H}_1 = H_1 - X'\frac{r}{r'}, \quad \tilde{H}_2 = H_2 - Y'\frac{r}{r'}, \\ \tilde{p} = p - \frac{X'Y}{r'}, \quad \tilde{q} = q - \frac{Y'X}{r'}\end{gathered} \tag{5.116}$$

给出, 这里 r' 是标量双线性势, 满足与 (5.112) 式类似的方程

$$r'_x = X'X, \quad r'_y = Y'Y. \tag{5.117}$$

下一小节中将讨论基本变换是如何作用于平行网及其对应的共轭特征函数上的. 考虑到对称性, 可以猜想平行网及其共轭特征函数同原来的网 $\boldsymbol{r}$ 及其共轭特征函数以相同的方式变换. 事实上, 这确实成立. 下面给出与变换规则 $(5.116)_{1,4,5}$ 类

推论 1　在定理 9 的假设下, 设 $\boldsymbol{r}''$ 是平行网, 满足

$$\boldsymbol{r}''_x = X''\boldsymbol{X}, \quad \boldsymbol{r}''_y = Y''\boldsymbol{Y}, \tag{5.118}$$

其中 X'', Y'' 是两个特征函数. 如果 r'' 是

$$r''_x = X''X, \quad r''_y = Y''Y \tag{5.119}$$

的标量解, 则 $\boldsymbol{r}''$ 和 X'', Y'' 的基本变换为

$$\tilde{\boldsymbol{r}}'' = \boldsymbol{r}'' - r''\frac{\boldsymbol{r}'}{r'}, \quad \tilde{X}'' = X'' - X'\frac{r''}{r'}, \quad \tilde{Y}'' = Y'' - Y'\frac{r''}{r'}. \tag{5.120}$$

证明　容易验证, 由 (5.120) 式给出的 $\tilde{\boldsymbol{r}}''$ 和 $\tilde{X}'', \tilde{Y}''$ 满足

$$\tilde{\boldsymbol{r}}''_x = \tilde{X}''\tilde{\boldsymbol{X}}, \quad \tilde{\boldsymbol{r}}''_y = \tilde{Y}''\tilde{\boldsymbol{Y}}, \tag{5.121}$$

从而 $\tilde{\boldsymbol{r}}''$ 与 $\tilde{\boldsymbol{r}}$ 平行. □

5.5.2 Ribaucour 变换

如果取正交坐标系, 则成立 Gauss-Weingarten 方程组 (5.35). 特别地, 法向量 $\underline{\boldsymbol{N}}$ 满足

$$\underline{\boldsymbol{N}}_x = \underline{h}_1\boldsymbol{X}, \quad \underline{\boldsymbol{N}}_y = \underline{h}_2\boldsymbol{Y}, \tag{5.122}$$

其中 $\underline{h}_1$ 和 $\underline{h}_2$ 是方程组 $(5.39)_{2,3}$, 即

$$\underline{h}_{1y} = p\underline{h}_2, \quad \underline{h}_{2x} = q\underline{h}_1 \tag{5.123}$$

的解. 同 (5.112) 式和 (5.113) 式相比较得, 法向量 $\boldsymbol{N}^i$ 定义了对应于共轭特征函数 h_1^i 和 h_2^i 的平行网 $(i = 1, \cdots, n)$. 由推论 1, $\underline{\boldsymbol{N}}$ 和 $\underline{h}_1, \underline{h}_2$ 的基本变换是

$$\tilde{\underline{\boldsymbol{N}}} = \underline{\boldsymbol{N}} - \underline{N}\frac{\boldsymbol{r}'}{r'}, \quad \tilde{\underline{h}}_1 = \underline{h}_1 - X'\frac{\underline{N}}{r'}, \quad \tilde{\underline{h}}_2 = \underline{h}_2 - Y'\frac{\underline{N}}{r'}, \tag{5.124}$$

其中

$$\underline{N}_x = \underline{h}_1 X, \quad \underline{N}_y = \underline{h}_2 Y. \tag{5.125}$$

剩下的问题是, 在什么条件下, 由 $(5.116)_{2,3}$ 式和 $(5.124)_1$ 式给出的向量 $\tilde{\boldsymbol{X}}, \tilde{\boldsymbol{Y}}$ 和 $\tilde{\underline{\boldsymbol{N}}}$ 是标准正交的?

标准正交条件

$$\tilde{\boldsymbol{X}}^2 = 1, \quad \tilde{\boldsymbol{X}}\cdot\tilde{\boldsymbol{Y}} = 0, \quad \tilde{\boldsymbol{Y}}^2 = 1 \tag{5.126}$$

给出

它也等价于

$$\left(\frac{\boldsymbol{r}'^2}{r'}\right)_x = 0, \quad \left(\frac{\boldsymbol{r}'^2}{r'}\right)_y = 0. \tag{5.128}$$

不失一般性, 取

$$r' = \frac{1}{2}\boldsymbol{r}'^2, \tag{5.129}$$

从而

$$X = \boldsymbol{X}\cdot\boldsymbol{r}', \quad Y = \boldsymbol{Y}\cdot\boldsymbol{r}'. \tag{5.130}$$

类似地,

$$\tilde{\boldsymbol{N}}^i\cdot\tilde{\boldsymbol{N}}^j = \delta^{ij}, \quad \underline{\tilde{\boldsymbol{N}}}\cdot\tilde{\boldsymbol{X}} = 0, \quad \underline{\tilde{\boldsymbol{N}}}\cdot\tilde{\boldsymbol{Y}} = 0 \tag{5.131}$$

给出

$$\underline{N} = \underline{\boldsymbol{N}}\cdot\boldsymbol{r}'. \tag{5.132}$$

最后, 由 (5.130) 式及 Gauss-Weingarten 方程组 (5.35) 得到

$$X_x = X' - pY - \underline{h}_1^{\mathrm{T}}\underline{N}, \quad Y_y = Y' - qX - \underline{h}_2^{\mathrm{T}}\underline{N}. \tag{5.133}$$

这样, 我们就得到了曲率线网的经典*Ribaucour* 变换[119] 的推广.

定理 10 (Ribaucour 变换) 如果平行网 $\boldsymbol{r}'$ 及其标量势 r' 取为

$$\boldsymbol{r}' = X\boldsymbol{X} + Y\boldsymbol{Y} + \underline{N}^{\mathrm{T}}\underline{\boldsymbol{N}}, \quad r' = \frac{1}{2}\boldsymbol{r}'^2 = \frac{1}{2}(X^2 + Y^2 + \underline{N}^2), \tag{5.134}$$

而对应的共轭特征函数为

$$X' = X_x + pY + \underline{h}_1^{\mathrm{T}}\underline{N}, \quad Y' = Y_y + qX + \underline{h}_2^{\mathrm{T}}\underline{N}, \tag{5.135}$$

则基本变换保持 Gauss-Weingarten 方程组 (5.35) 和 Gauss-Mainardi-Codazzi 方程组 (5.39) 的形式不变. 这时, $\underline{\boldsymbol{N}}$ 和 $\underline{h}_i$ 的 Ribaucour 变换是

$$\underline{\tilde{\boldsymbol{N}}} = \underline{\boldsymbol{N}} - \underline{N}\frac{\boldsymbol{r}'}{r'}, \quad \underline{\tilde{h}}_1 = \underline{h}_1 - X'\frac{\underline{N}}{r'}, \quad \underline{\tilde{h}}_2 = \underline{h}_2 - Y'\frac{\underline{N}}{r'}, \tag{5.136}$$

其中 $\underline{N}$ 由 (5.125) 所定义.

证明 通过简单计算可知 X' 和 Y' 确实是共轭方程组 (5.113) 的解. 平行网 $\boldsymbol{r}'$ 的形式由 (5.130) 式和 (5.132) 式给出, 因为 $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}, \underline{\boldsymbol{N}})$ 是一组标准正交标架. 事实上, 可以证明 $\boldsymbol{r}'$ 和 r' 分别满足方程组 (5.112) 和 (5.117). □

注意到在经典的 $n=1$ 情形, 成立 $N(\tilde{\boldsymbol{r}} - \boldsymbol{r}) = r(\tilde{\boldsymbol{N}} - \boldsymbol{N})$, 从而曲面 Σ 和 $\tilde{\Sigma}$ 上在对应点的法向量不但相交, 而且交点到两个曲面的距离相等, 从而 Σ 和 $\tilde{\Sigma}$ 是一个双参数球面族的包络的两叶, 称为 Ribaucour 球汇[95]. 事实上, 正是这个性质使

5.5.3 等温曲面的 Bäcklund 变换

如果条件 $H_1 = H_2$ 成立, 则 Ribaucour 变换将等温曲面变为等温曲面. 按现在 Ribaucour 变换的形式, 有 $X' = Y'$. 但是, Gauss-Weingarten 方程组 (5.35) 和 Gauss-Mainardi-Codazzi 方程组 (5.39) 在变换

$$(\boldsymbol{X}, H_1, p, q, \underline{h}_1) \to -(\boldsymbol{X}, H_1, p, q, \underline{h}_1) \tag{5.137}$$

下是不变的. 于是它同 Ribaucour 变换的复合导致约束 $\tilde{H}_1 = -\tilde{H}_2$, 即

$$r' = \frac{1}{2}(X' + Y')re^{-\theta}. \tag{5.138}$$

从而,

$$X'_x - \theta_x Y' = \frac{X' - Y'}{r} X e^{\theta}, \quad Y'_y - \theta_y X' = \frac{Y' - X'}{r} Y e^{\theta}, \tag{5.139}$$

即

$$\left(\frac{X' - Y'}{r} e^{\theta}\right)_x = 0, \quad \left(\frac{X' - Y'}{r} e^{\theta}\right)_y = 0, \tag{5.140}$$

所以有

$$X' - Y' = 2mre^{-\theta}, \quad m \text{ 为常数}. \tag{5.141}$$

现在引入函数 r^* 满足

$$X' + Y' = 2mr^* e^{\theta}, \tag{5.142}$$

那么约束 (5.138) 成为

$$r' = mrr^*, \tag{5.143}$$

而 (5.139) 式给出

$$r^*_x = e^{-\theta} X, \quad r^*_y = -e^{-\theta} Y. \tag{5.144}$$

于是函数 r^* 恰好是 (5.49) 式所定义的 Christoffel 变换 $\boldsymbol{r}^*$ 的标量形式.

现在我们建立与 Darboux 给出的等温曲面的经典 Bäcklund 变换相类似的结果[331].

定理 11 (等温曲面的 Bäcklund 变换)　**设 $\boldsymbol{r}$ 是等温曲面 Σ 的位置向量, 那么新的等温曲面 $\tilde{\Sigma}$ 由**

$$\tilde{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{r} - \frac{1}{mr^*}(X\boldsymbol{X} + Y\boldsymbol{Y} + \underline{N}^{\mathrm{T}}\underline{\boldsymbol{N}}) \tag{5.145}$$

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ \underline{N} \\ r \\ r^* \end{pmatrix}_x = \begin{pmatrix} 0 & -\theta_y & -\underline{h}_1^{\mathrm{T}} & me^{-\theta} & me^{\theta} \\ \theta_y & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \underline{h}_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ e^{\theta} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ e^{-\theta} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ \underline{N} \\ r \\ r^* \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ \underline{N} \\ r \\ r^* \end{pmatrix}_y = \begin{pmatrix} 0 & \theta_x & 0 & 0 & 0 \\ -\theta_x & 0 & -\underline{h}_2^{\mathrm{T}} & -me^{-\theta} & me^{\theta} \\ 0 & \underline{h}_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{\theta} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -e^{-\theta} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ \underline{N} \\ r \\ r^* \end{pmatrix} \tag{5.146}$$

的解, 并且满足约束

$$X^2 + Y^2 + \underline{N}^2 = 2mrr^*. \tag{5.147}$$

向量等温方程组 (5.43) 的新解为

$$e^{\tilde{\theta}} = \frac{r}{r^*} e^{-\theta},$$
$$\underline{\tilde{h}}_1 = -\underline{h}_1 + \left(\frac{e^{\theta}}{r} + \frac{e^{-\theta}}{r^*}\right)\underline{N}, \quad \underline{\tilde{h}}_2 = \underline{h}_2 - \left(\frac{e^{\theta}}{r} - \frac{e^{-\theta}}{r^*}\right)\underline{N}. \tag{5.148}$$

证明 线性方程组 (5.146) 通过比较 (5.135) 式同共轭特征函数 X' 和 Y' 的表达式 (5.141), (5.142) 得到. 在向量等温方程组成立时, 方程组 (5.146) 是相容的. 对 $m = 0$, (5.146) 式给出了 Gauss-Weingarten 方程组的一个标量形式以及位置向量与它的 Christoffel 变换之间的一个一阶关系. 约束 (5.147) 从 r' 的两个表示 $(5.134)_2$ 和 (5.143) 相等得到, 它是首次积分

$$X^2 + Y^2 + \underline{N}^2 - 2mrr^* = 常数 \tag{5.149}$$

的一个特殊情形. 变换关系 (5.148) 由 (5.116) 式和 (5.136) 式加上对合 (5.137) 得到. □

练 习

1. 证明由推论 1 给出的 $\tilde{r}''$ 和 $\tilde{X}'', \tilde{Y}''$ 满足 (5.121) 式.
2. 证明由定理 10 给出的 r' 和 r' 分别满足方程组 (5.112) 和 (5.117).
3. 证明在线性方程组 (5.146) 成立时,

$$X^2 + Y^2 + \underline{N}^2 - 2mrr^*$$

5.6 可换性定理及其几何意义

上一节中, 我们可以取特殊的基本变换使之与共轭网上的附加约束相容, 于是, 正交和共形的要求给出了基本变换要满足的条件. 下面将看到, 这些代数条件将导致隐式的几何约束, 这将在用于递推生成 Bäcklund 变换的可换性定理中显示出来. 为了记号上的方便, 平行网以及共轭特征函数上的撇将改为上划线, 上标用来表示生成 Bäcklund 变换的量, 而下标表示对应的 Bäcklund 变换.

5.6.1 共轭网的可换性定理与平面性

设 $\boldsymbol{r}$ 为共轭网, $\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}$ 为对应的切向量, 满足

$$\boldsymbol{r}_x = H_1\boldsymbol{X}, \quad \boldsymbol{r}_y = H_2\boldsymbol{Y}, \quad \boldsymbol{X}_y = q\boldsymbol{Y}, \quad \boldsymbol{Y}_x = p\boldsymbol{X}, \tag{5.150}$$

其中 p 和 q 以通常的方式同 H_1 和 H_2 相联系.[3] 设 r^1, X^1, Y^1 是特征函数, 满足

$$r^1_x = H_1X^1, \quad r^1_y = H_2Y^1, \quad X^1_y = qY^1, \quad Y^1_x = pX^1, \tag{5.151}$$

而 $\bar{\boldsymbol{r}}^1$ 是同共轭特征函数 $\bar{X}^1, \bar{Y}^1$ 相联系的平行网, 即

$$\bar{\boldsymbol{r}}^1_x = \bar{X}^1\boldsymbol{X}, \quad \bar{\boldsymbol{r}}^1_y = \bar{Y}^1\boldsymbol{Y}, \tag{5.152}$$

则 Σ 的基本变换 $\Sigma_1 = \mathbb{B}_1(\Sigma)$ 是

$$\mathbb{B}_1: \quad \boldsymbol{r}_1 = \boldsymbol{r} - r^1\frac{\bar{\boldsymbol{r}}^1}{\bar{r}^{11}}, \tag{5.153}$$

其中标量函数 $\bar{r}^{11}$ 满足

$$\bar{r}^{11}_x = \bar{X}^1X^1, \quad \bar{r}^{11}_y = \bar{Y}^1Y^1. \tag{5.154}$$

类似地, 第二组量 $\{r^2, X^2, Y^2, \bar{X}^2, \bar{Y}^2, \bar{\boldsymbol{r}}^2, \bar{r}^{22}\}$ 定义了第三个曲面 $\Sigma_2 = \mathbb{B}_2(\Sigma)$, 它可表示为

$$\mathbb{B}_2: \quad \boldsymbol{r}_2 = \boldsymbol{r} - r^2\frac{\bar{\boldsymbol{r}}^2}{\bar{r}^{22}}. \tag{5.155}$$

在曲面 Σ_1 上作用基本变换时, 需要用到与 Σ_1 相关的 (共轭) 特征函数以及平行网, 这些都可以通过基本变换的性质构造出来. 首先, 由于特征函数 r^2 和 X^2, Y^2 是位置向量 $\boldsymbol{r}$ 和切向量 $\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}$ 的标量类比, 它们的基本变换表示为 $(5.116)_{1,2,3}$ 式的标量类比, 即

$$r^2_1 = r^2 - r^1\frac{\bar{r}^{12}}{\bar{r}^{11}}, \quad X^2_1 = X^2 - X^1\frac{\bar{r}^{12}}{\bar{r}^{11}}, \quad Y^2_1 = Y^2 - Y^1\frac{\bar{r}^{12}}{\bar{r}^{11}}, \tag{5.156}$$

其中双线性势 $\bar{r}^{12}$ 满足通常的一阶关系

$$\bar{r}^{12}_x = \bar{X}^1 X^2, \quad \bar{r}^{12}_y = \bar{Y}^1 Y^2. \tag{5.157}$$

其次, 对平行网 $\bar{\boldsymbol{r}}^2$ 应用推论 1, 我们得到一个平行于 Σ_1 的网及其对应的特征函数. 它们是

$$\bar{\boldsymbol{r}}^2_1 = \bar{\boldsymbol{r}}^2 - \bar{r}^{21}\frac{\bar{\boldsymbol{r}}^1}{\bar{r}^{11}}, \quad \bar{X}^2_1 = \bar{X}^2 - \bar{X}^1\frac{\bar{r}^{21}}{\bar{r}^{11}}, \quad \bar{Y}^2_1 = \bar{Y}^2 - \bar{Y}^1\frac{\bar{r}^{21}}{\bar{r}^{11}}, \tag{5.158}$$

而

$$\bar{r}^{21}_x = \bar{X}^2 X^1, \quad \bar{r}^{21}_y = \bar{Y}^2 Y^1, \tag{5.159}$$

其标量对应 $\bar{r}^{22}$ 的变换为

$$\bar{r}^{22}_1 = \bar{r}^{22} - \bar{r}^{21}\frac{\bar{r}^{12}}{\bar{r}^{11}}. \tag{5.160}$$

$\{r^2_1, X^2_1, Y^2_1, \bar{X}^2_1, \bar{Y}^2_1, \bar{\boldsymbol{r}}^2_1, \bar{r}^{22}_1\}$ 与曲面 Σ_1 的关系同 $\{r^i, X^i, Y^i, \bar{X}^i, \bar{Y}^i, \bar{\boldsymbol{r}}^i, \bar{r}^{ii}\}$, $i = 1, 2$ 与曲面 Σ 的关系相同. 于是, 再作用一次基本变换, 就生成第四个曲面 $\Sigma_{12} = \mathbb{B}^1_2(\Sigma_1)$:

$$\mathbb{B}^1_2: \quad \boldsymbol{r}_{12} = \boldsymbol{r}_1 - r^2_1\frac{\bar{\boldsymbol{r}}^2_1}{\bar{r}^{22}_1}, \tag{5.161}$$

其中 $\mathbb{B}^1_2$ 上的指标表示 Bäcklund 变换是由带指标 2 的 $\mathbb{B}_1$- 变换生成的. 类似地, 应用由带指标 1 的 $\mathbb{B}_2$- 变换生成的另一个基本变换, 就可得到第五个曲面 $\Sigma_{21} = \mathbb{B}^2_1(\Sigma_2)$:

$$\mathbb{B}^2_1: \quad \boldsymbol{r}_{21} = \boldsymbol{r}_2 - r^1_2\frac{\bar{\boldsymbol{r}}^1_2}{\bar{r}^{11}_2}. \tag{5.162}$$

一个重要的事实是, 这两个曲面 Σ_{12} 和 Σ_{21} 是相同的, 这个几何性质给出了基本变换的经典可换性定理[119, 183].

定理 12 (基本变换的可换性定理) 基本变换 $\mathbb{B}_1, \mathbb{B}_2$ 和 $\mathbb{B}^1_2, \mathbb{B}^2_1$ 使得 Bianchi 图封闭, 即

$$\mathbb{B}^1_2 \circ \mathbb{B}_1 = \mathbb{B}^2_1 \circ \mathbb{B}_2. \tag{5.163}$$

曲面 $\Sigma_{12} = \Sigma_{21}$ 的位置向量为

$$\boldsymbol{r}_{12} = \boldsymbol{r}_{21} = \frac{\begin{vmatrix} \boldsymbol{r} & r^1 & r^2 \\ \bar{\boldsymbol{r}}^1 & \bar{r}^{11} & \bar{r}^{12} \\ \bar{\boldsymbol{r}}^2 & \bar{r}^{21} & \bar{r}^{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \bar{r}^{11} & \bar{r}^{12} \\ \bar{r}^{21} & \bar{r}^{22} \end{vmatrix}}. \tag{5.164}$$

证明　将由 (5.153) 式、$(5.156)_1$ 式和 $(5.158)_1$ 式、(5.160) 式给出的 $\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_1^2$ 和 $\bar{r}_1^2, \bar{r}_1^{22}$ 代入 (5.161) 式就得到位置向量 $\boldsymbol{r}_{12}$ 满足的 (5.164) 式. 交换指标 1 和 2 就得到 $\boldsymbol{r}_{12}=\boldsymbol{r}_{21}$, 从而 Bianchi 图封闭. □

由此定理,

$$\boldsymbol{r}_{12}-\boldsymbol{r}=\alpha\bar{\boldsymbol{r}}^1+\beta\bar{\boldsymbol{r}}^2, \tag{5.165}$$

其中函数 α 和 β 由 (5.164) 式得到. 由 (5.153) 和 (5.155) 式中解出 $\bar{\boldsymbol{r}}^1$ 和 $\bar{\boldsymbol{r}}^2$, 有

$$\boldsymbol{r}_{12}-\boldsymbol{r}=a(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r})+b(\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}), \tag{5.166}$$

其中 $a=-\alpha\bar{r}^{11}/r^1$, $b=-\beta\bar{r}^{22}/r^2$, 从而向量 $\boldsymbol{r}_{12}-\boldsymbol{r}$ 和 $\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}$ 共面, 这样我们有下列同基本变换相关的 Bianchi 图的 “物理实现”.

推论 2 (Bianchi 四边形的平面性)　*位置向量 $\boldsymbol{r}$ 及其基本变换 $\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{r}_{12}$ 满足形为 (5.166) 的线性方程. 对任何选定的共轭参数 (x,y), Bianchi 四边形的顶点 $\boldsymbol{r}(x,y), \boldsymbol{r}_1(x,y), \boldsymbol{r}_2(x,y), \boldsymbol{r}_{12}(x,y)$ 在一个平面上 (图 5.1).*

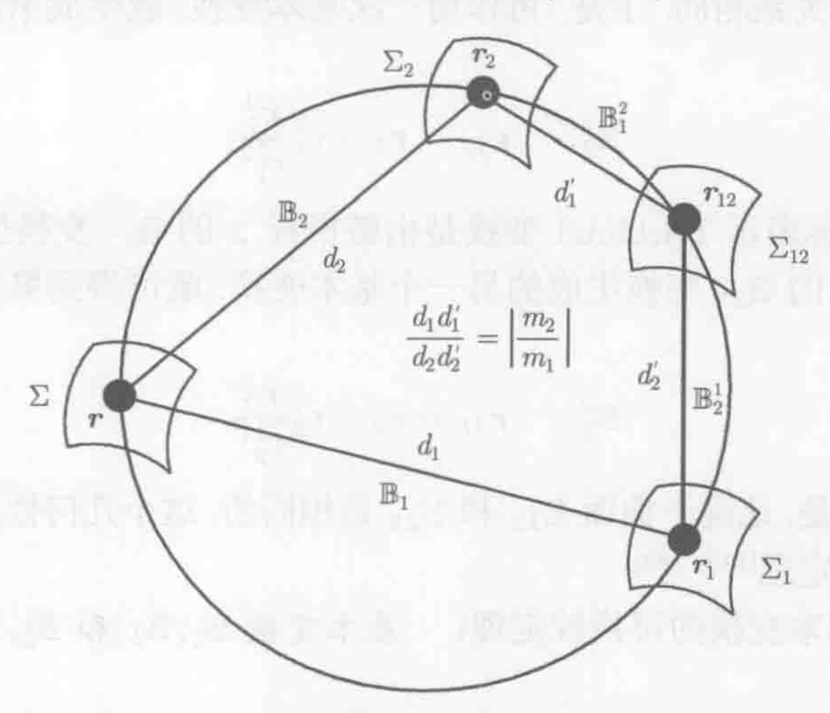


图 5.1　Bianchi 四边形的平面性、共圆性和常交比性

5.6.2　正交共轭网的可换性定理与共圆性

我们已经知道正交性导致基本变换需要满足约束 (5.134), (5.135). 为了使可换性定理在此约束下也成立, 约束必须在基本变换下保持不变. 用现在的记号,

$$\bar{\boldsymbol{r}}^2=X^2\boldsymbol{X}+Y^2\boldsymbol{Y}+\underline{N}^{2\,\mathrm{T}}\underline{\boldsymbol{N}}, \qquad \bar{r}^{22}=\frac{1}{2}(\bar{\boldsymbol{r}}^2)^2, \tag{5.167}$$

在 Ribaucour 变换 $\mathbb{B}_1$ 下必须不变, 即要有

$$\begin{aligned} &\bar{\boldsymbol{r}}_1^2 = X_1^2 \boldsymbol{X}_1 + Y_1^2 \boldsymbol{Y}_1 + \underline{N}_1^{2\,\mathrm{T}} \underline{\boldsymbol{N}}_1, \qquad \bar{r}_1^{22} = \frac{1}{2}(\bar{\boldsymbol{r}}_1^2)^2, \\ &\bar{X}_1^2 = X_{1x}^2 + p_1 Y_1^2 + \underline{h}_{1,1}^{\mathrm{T}} \underline{N}_1^2, \qquad \bar{Y}_1^2 = Y_{1y}^2 + q_1 X_1^2 + \underline{h}_{2,1}^{\mathrm{T}} \underline{N}_1^2, \end{aligned} \tag{5.168}$$

其中

$$\begin{gathered} \boldsymbol{X}_1 = \boldsymbol{X} - X^1 \frac{\bar{\boldsymbol{r}}^1}{\bar{r}^{11}}, \quad \boldsymbol{Y}_1 = \boldsymbol{Y} - Y^1 \frac{\bar{\boldsymbol{r}}^1}{\bar{r}^{11}}, \quad \underline{\boldsymbol{N}}_1 = \underline{\boldsymbol{N}} - \underline{N}^1 \frac{\bar{\boldsymbol{r}}^1}{\bar{r}^{11}}, \\ p_1 = p - \frac{\bar{X}^1 Y^1}{\bar{r}^{11}}, \quad q_1 = q - \frac{\bar{Y}^1 X^1}{\bar{r}^{11}}, \\ \underline{h}_{1,1} = \underline{h}_1 - \bar{X}^1 \frac{\underline{N}^1}{\bar{r}^{11}}, \quad \underline{h}_{2,1} = \underline{h}_2 - \bar{Y}^1 \frac{\underline{N}^1}{\bar{r}^{11}}. \end{gathered} \tag{5.169}$$

从 (5.168) 式的相容性条件得到一个附加的约束, 它在重复应用基本变换时起作用, 它的合理性由下列定理给出. 还需注意到

$$\underline{N}_1^2 = \underline{N}^2 - \underline{N}^1 \frac{\bar{r}^{12}}{\bar{r}^{11}}. \tag{5.170}$$

定理 13 (Ribaucour 变换的可换性定理) *在首次积分*

$$\bar{r}^{12} + \bar{r}^{21} = \bar{\boldsymbol{r}}^1 \cdot \bar{\boldsymbol{r}}^2 = X^1 X^2 + Y^1 Y^2 + \underline{N}^{1\,\mathrm{T}} \underline{N}^2 \tag{5.171}$$

成立时, 与 Ribaucour 变换相联系的 Bianchi 图封闭.

证明 通过计算下式的微分得到

$$\bar{\boldsymbol{r}}^1 \cdot \bar{\boldsymbol{r}}^2 - \bar{r}^{12} - \bar{r}^{21} = \text{常数}, \tag{5.172}$$

从而约束 (5.171) 是容许的. □

这个定理给出的几何结论最早由 Bianchi 在经典情形所考虑[37]. 约束 (5.171) 给出

$$\bar{\boldsymbol{r}}_2^1 \cdot \bar{\boldsymbol{r}}^2 + \bar{\boldsymbol{r}}_1^2 \cdot \bar{\boldsymbol{r}}^1 = 2(\bar{\boldsymbol{r}}^1 \cdot \bar{\boldsymbol{r}}^2 - \bar{r}^{12} - \bar{r}^{21}) = 0, \tag{5.173}$$

其中 $\bar{\boldsymbol{r}}_1^2$ 和 $\bar{\boldsymbol{r}}_2^1$ 分别由 $(5.158)_1$ 式和 $(5.158)_1|_{1\leftrightarrow 2}$ 式所给出, 而一般的基本变换满足

$$\begin{aligned} &\bar{\boldsymbol{r}}_2^1 \cdot C\bar{\boldsymbol{r}}^2 + \bar{\boldsymbol{r}}_1^2 \cdot C\bar{\boldsymbol{r}}^1 \\ &= \bar{\boldsymbol{r}}^1 \cdot C\bar{\boldsymbol{r}}^2 + \bar{\boldsymbol{r}}^2 \cdot C\bar{\boldsymbol{r}}^1 - \frac{\bar{r}^{21}}{\bar{r}^{11}} \bar{\boldsymbol{r}}^1 \cdot C\bar{\boldsymbol{r}}^1 - \frac{\bar{r}^{12}}{\bar{r}^{22}} \bar{\boldsymbol{r}}^2 \cdot C\bar{\boldsymbol{r}}^2 = 0 \end{aligned} \tag{5.174}$$

定理 14 (Bianchi 四边形的共圆性) *与 Ribaucour 变换相联系的 Bianchi 四边形的顶点落在一个圆周上* (图 5.1).

证明 我们将平面与一个复平面相对应:

$$P(\boldsymbol{r}) = a + \mathrm{i}b \in \mathbb{C} \quad \leftrightarrow \quad \boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2. \tag{5.175}$$

四个点 $\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{r}_{12}$ 的交比定义为复数

$$\frac{P(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r})P(\boldsymbol{r}_{12} - \boldsymbol{r}_2)}{P(\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r})P(\boldsymbol{r}_{12} - \boldsymbol{r}_1)}. \tag{5.176}$$

交比为实数当且仅当四点共圆 (或者共线, 通常将直线看作半径为无穷大的圆周). 现在, 向量 $\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{r}_{12} - \boldsymbol{r}_1$ 和 $\boldsymbol{r}_{12} - \boldsymbol{r}_2$ 位于一个平面 (看作复平面) 上. 由于 $\bar{\boldsymbol{r}}^1, \bar{\boldsymbol{r}}^2, \bar{\boldsymbol{r}}_2^1$ 和 $\bar{\boldsymbol{r}}_1^2$ 同 Bianchi 四边形的边平行, 当交比

$$\frac{P(\bar{\boldsymbol{r}}^1)P(\bar{\boldsymbol{r}}_2^1)}{P(\bar{\boldsymbol{r}}^2)P(\bar{\boldsymbol{r}}_1^2)} \tag{5.177}$$

是实数时, Bianchi 四边形内接于一个圆. 不失一般性, 可假设 $\bar{\boldsymbol{r}}^1, \bar{\boldsymbol{r}}^2, \bar{\boldsymbol{r}}_2^1$ 和 $\bar{\boldsymbol{r}}_1^2$ 是二维向量, 且

$$C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{5.178}$$

由 (5.173) 式和 (5.174) 式通过简单的计算即可知道 (5.177) 式确实是实数. □

5.6.3 等温曲面的可换性定理与常交比性

对于等温曲面, 需要证明 (5.141)–(5.143) 式在 Ribaucour 变换与对合 (5.137) 的复合下是不变的. 为此, 注意到 Christoffel 变换 $\boldsymbol{r}^*$ 是一个特殊的平行网, 从而与其他任何平行网以相同的方式变换. 所以, 标量 r^{*2} 的 Ribaucour 变换 $\mathbb{B}_1$ 是

$$r_1^{*2} = r^{*2} - r^{*1}\frac{\bar{r}^{12}}{\bar{r}^{11}}. \tag{5.179}$$

为了使 (5.143) 式不变, 要求

$$\bar{r}_1^{22} = m_2 r_1^2 r_1^{*2}, \tag{5.180}$$

由此得

$$\frac{\bar{r}^{12}}{m_1} + \frac{\bar{r}^{21}}{m_2} = r^1 r^{*2} + r^2 r^{*1}. \tag{5.181}$$

同约束 (5.171) 比较得

$$\begin{aligned} \bar{r}^{12} &= \frac{m_1}{m_1 - m_2}[\bar{\boldsymbol{r}}^1 \cdot \bar{\boldsymbol{r}}^2 - m_2(r^1 r^{*2} + r^{*1} r^2)], \\ \bar{r}^{21} &= \frac{m_2}{\cdots}[\bar{\boldsymbol{r}}^1 \cdot \bar{\boldsymbol{r}}^2 - \cdots(r^1 r^{*2} + r^{*1} r^2)], \end{aligned} \tag{5.182}$$

这些事实上是 (5.157) 式和 (5.159) 式的解. 剩下要证明的是保持关系式 (5.141) 和 (5.142) 的要求并不对 Ribaucour 变换增加更多的约束. 于是, 我们可以建立与 Bianchi 关于经典等温曲面的可换性定理[36] 类似的结果[331].[4]

定理 15 (等温曲面的可换性定理) 对带参数 $m=0$ 的线性方程组 (5.146) 的向量值解 $(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y},\underline{\boldsymbol{N}},\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}^*)$, 记相应的种子等温曲面为 Σ. 又记 $(X^1,Y^1,\underline{N}^1,r^1,r^{*1})$ 为带参数 $m=m_1$ 的方程组 (5.146) 的满足约束 (5.147) 的解. 那么, 线性方程组 (5.146) 在

$$\mathbb{B}_1:\quad\left\{\begin{array}{c}(X,Y,\underline{N},r,r^*,\theta,\underline{h}_1,\underline{h}_2),\\ \downarrow\\ (X_1,Y_1,\underline{N}_1,r_1,r_1^*,\theta_1,\underline{h}_{1,1},\underline{h}_{2,1})\end{array}\right. \tag{5.183}$$

下不变, 其中

$$\begin{gathered}X_1=-X+\frac{X^1}{r^1r^{*1}}M^1,\quad Y_1=Y-\frac{Y^1}{r^1r^{*1}}M^1,\quad \underline{N}_1=\underline{N}-\frac{\underline{N}^1}{r^1r^{*1}}M^1,\\ r_1=r-\frac{1}{r^{*1}}M^1,\quad r_1^*=r^*-\frac{1}{r^1}M^1,\quad e^{\theta_1}=\frac{r^1}{r^{*1}}e^{-\theta},\\ \underline{h}_{1,1}=-\underline{h}_1+\left(\frac{e^\theta}{r^1}+\frac{e^{-\theta}}{r^{*1}}\right)\underline{N}^1,\quad \underline{h}_{2,1}=\underline{h}_2-\left(\frac{e^\theta}{r^1}-\frac{e^{-\theta}}{r^{*1}}\right)\underline{N}^1,\end{gathered} \tag{5.184}$$

$$M^1=\frac{X^1X+Y^1Y+\underline{N}^{1\mathrm{T}}\underline{N}-m(r^1r^*+r^{*1}r)}{m_1-m}. \tag{5.185}$$

等温曲面 Σ_1、它的 Christoffel 变换 Σ_1^* 以及正交标架 $(\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{Y}_1,\underline{\boldsymbol{N}}_1)$ 由 (5.184) 式和 (5.185) 式通过代换 $(X,Y,\underline{N},r,r^*,m)\to(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y},\underline{\boldsymbol{N}},\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}^*,0)$ 得到. 相应于带参数 m_1 和 m_2 的两个 Bäcklund 变换 $\mathbb{B}_1$ 和 $\mathbb{B}_2$ 的 Bianchi 图封闭, 即

$$\mathbb{B}_2\circ\mathbb{B}_1=\mathbb{B}_1\circ\mathbb{B}_2. \tag{5.186}$$

注意到在递推的每一步中, Bäcklund 变换 $\mathbb{B}_i$ 只带一个指标, 因为我们现在仅用 Bäcklund 参数 m_i 而不用对应的特征函数来区分变换.

在上小节中, 我们已经知道 Bianchi 四边形的交比是实的. 这里, 交比有几何解释

$$\left|\frac{P(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r})P(\boldsymbol{r}_{12}-\boldsymbol{r}_2)}{P(\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r})P(\boldsymbol{r}_{12}-\boldsymbol{r}_1)}\right|=\frac{d_1d_1'}{d_2d_2'}, \tag{5.187}$$

其中

$$\begin{aligned}d_1&=|\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}|,\quad & d_1'&=|\boldsymbol{r}_{12}-\boldsymbol{r}_2|,\\ d_2&=|\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}|,\quad & d_2'&=|\boldsymbol{r}_{12}-\boldsymbol{r}_1|.\end{aligned} \tag{5.188}$$

交比的符号决定了四边形的边是否相交. 一个不相交的 (嵌入的) Bianchi 四边形见图 5.1, 它对应的交比为负. Bianchi 四边形的边长可用 θ 及其 Bäcklund 变换表示出来. 例如, 与 Bäcklund 变换 $\mathbb{B}_1$ 相关的位置向量的变换 (5.145) 给出

$$(d_1)^2 = (\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r})^2 = \frac{2}{m_1}\frac{r^1}{r^{*1}} = \frac{2}{m_1}e^{\theta_1+\theta}, \tag{5.189}$$

这里用到了 $(5.184)_6$ 式. 类似地, 有

$$(d_2)^2 = \frac{2}{m_2}e^{\theta_2+\theta}, \quad (d_1')^2 = \frac{2}{m_1}e^{\theta_{12}+\theta_2}, \quad (d_2')^2 = \frac{2}{m_2}e^{\theta_{21}+\theta_1}. \tag{5.190}$$

进一步, Bianchi 图的封闭性给出 $\theta_{12} = \theta_{21}$, 从而

$$\frac{d_1 d_1'}{d_2 d_2'} = \left|\frac{m_2}{m_1}\right|. \tag{5.191}$$

交比的符号可以由定理 15 直接计算得到. 这样, 我们就得到下列推论, 它推广了 Demoulin 的经典结果[101].

推论 3 (Bianchi 四边形的常交比性) *Bianchi 四边形的交比与坐标 x 和 y 无关, 其值为*

$$\frac{P(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r})P(\boldsymbol{r}_{12} - \boldsymbol{r}_2)}{P(\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r})P(\boldsymbol{r}_{12} - \boldsymbol{r}_1)} = \frac{m_2}{m_1} \tag{5.192}$$

(图 5.1).

练 习

1. 导出第二代等温曲面 Σ_{12} 的位置向量 (5.164) 式.
2. 证明当约束 (5.171) 成立时 (5.168) 式成立, 并证明 (5.172) 式.
3. 设 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}$ 是满足

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{d} + \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c} = 0, \quad \boldsymbol{a}\cdot C\boldsymbol{d} + \boldsymbol{b}\cdot C\boldsymbol{c} = 0, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

的四个二维向量, 则它们的交比

$$\frac{P(\boldsymbol{a})P(\boldsymbol{b})}{P(\boldsymbol{c})P(\boldsymbol{d})}$$

是实的.

4. 证明等温曲面的 Bäcklund 变换保持关系 (5.141) 和 (5.142) 当且仅当约束 (5.181) 成立. 证明 (5.182) 式是 (5.157) 和 (5.159) 式的解.

5.7 向量 Calapso 方程组显式的可换性定理

我们已经从等温曲面的 Ribaucour 变换得到了它具有几何意义的可换性定理, 它是在线性 (曲面) 层次上表述的. 但是, 在经典文献中, 好像并没有非线性层次上, 即对等温方程组本身的可换性定理. 现在, 我们将要说明, 如果用经典 Moutard 变换表示 Ribaucour 变换, 就可以得到向量 Calapso 方程组的非线性叠加原理, 由此可以简单地导出可换性定理.

5.7.1 Ribaucour 变换与 Moutard 变换的关系

先回到第 1 章中讨论过的经典 Moutard 变换.

定理 16 (Moutard 变换) *Moutard 方程*

$$\psi_{xy} = \rho\psi \tag{5.193}$$

在

$$\psi \to \psi_1 = \frac{S(\psi, \psi^1)}{\psi^1}, \quad \rho \to \rho_1 = \rho - 2(\ln\psi^1)_{xy} \tag{5.194}$$

下不变, 其中 ψ^1 是 (5.193) 式的另一个解, 而双线性势 $S(\psi, \psi^1)$ 满足

$$S_x = \psi_x\psi^1 - \psi\psi^1_x, \quad S_y = \psi\psi^1_y - \psi_y\psi^1. \tag{5.195}$$

定义 (参见 5.3 节)

$$\psi = e^\theta r^*, \quad \underline{S} = \underline{z}^*\psi - \sqrt{2}\underline{N}, \tag{5.196}$$

则由线性方程组 (5.146) 知道 (5.71) 式对于标量 X 和 Y 成立. 计算 X_y, Y_x 和 $X_x + Y_y$ 就得到当 $k = -2m$ 时的向量 Calapso 方程组, 而计算 $X_x - Y_y$ 可得到 r 关于 ψ 和 $\underline{S}$ 的表达式. 可以验证, Lax 对 (5.79) 等价于线性表示 (5.146), 而首次积分 (5.81) 和 (5.149) 一致. 此外, r^* 和 θ 的变换 $(5.184)_{5,6}$ 给出了 ψ 的变换, 它在相差一个常数因子外, 同带有特殊双线性势 $S(\psi, \psi^1)$ 的 $(5.194)_1$ 式相同. $\underline{z}$ 是 Moutard 方程 (5.193) 的 (向量值) 解, 它需要同 ψ 以相同方式变换, 这提示了 Bäcklund 变换在向量 Calapso 方程上的作用形式[331].

定理 17 (向量 Calapso 方程组的 Bäcklund 变换) *向量 Calapso 方程组 (5.64) 在 Moutard 型变换*

$$\underline{z} \to \underline{z}_1 = \frac{\underline{S}(\underline{z}, \psi^1)}{\psi^1}, \quad \rho \to \rho_1 = \rho - 2(\ln\psi^1)_{xy} \tag{5.197}$$

证明 由于 $(5.197)_{1,2}$ 式是经典 Moutard 变换 (5.194) 的向量对应, $(5.64)_1$ 式成立. 此外, 首次积分 $I=0$ 给出

$$\underline{z}_1^2=\frac{\underline{S}^2}{(\psi^1)^2}=\underline{z}^2+2\Delta(\ln\psi^1), \tag{5.198}$$

从而

$$\begin{aligned}(\underline{z}_1^2)_{xy}+\Delta\rho_1&=[\underline{z}^2+2\Delta(\ln\psi^1)]_{xy}+\Delta\rho-2\Delta(\ln\psi^1)_{xy}\\&=(\underline{z}^2)_{xy}+\Delta\rho.\end{aligned} \tag{5.199}$$

□

注意到这个 Bäcklund 变换已在定理 7 中隐约地体现出来, 因为在向量 Calapso 方程组的层次上, 由 (5.82) 式给出的向量 Calapso 方程组的对偶解 $(\underline{z}^*,\rho^*)$ 同 Bäcklund 变换 $(\underline{z}_1,\rho_1)$ 以相同的方法导出. 但是, 如果我们让 $\psi_0=e^\theta$, 其中 θ 是向量等温方程组的解, 则特殊选取 $\psi^1=\psi_0$ 可使得对偶解同 Bäcklund 变换是完全相同的. 这与下列事实相一致, 即等温曲面 Σ 的 Christoffel 变换 Σ^* 可以看作为 Σ 的一个退化 Ribaucour 变换[61]. 这一事实将在 5.8 节中与 Dupin 四次圆纹曲面一起作详细讨论.

5.7.2 可换性定理

向量 Calapso 方程组的可换性定理可由定理 17 直接导出.

推论 4 *将向量 Calapso 方程组写为*

$$\underline{z}_{xy}=a_y\underline{z},\quad a_y=\epsilon b_x,\quad a_x+\epsilon b_y+\underline{z}^2=0, \tag{5.200}$$

其中 $\epsilon^2=1$, $\rho=a_y=\epsilon b_x$, $f=-a_x+\epsilon b_y$, 则它的解的 Bäcklund 变换为

$$\mathbb{B}_1:\quad \underline{z}_1=\frac{\underline{S}(\underline{z},\psi^1)}{\psi^1},\quad \begin{aligned}a_1&=a-2(\ln\psi^1)_x,\\ b_1&=-b+2\epsilon(\ln\psi^1)_y,\end{aligned} \tag{5.201}$$

其中 $\epsilon_1=-\epsilon$.

引入常数 $\epsilon=\pm1$ 是为了使可换性定理取一致的形式. 首先用 (5.201) 式在 Lax 对中消去特征函数 ψ^1 及对应的双线性势 $\underline{S}(\underline{z},\psi^1)$. 由 (5.201) 式中解出 ψ_x^1,ψ_y^1 和 $\underline{S}$ 后, $(5.80)_1$ 式与 Lax 对 (5.79) 成为

$$\begin{aligned}&(\underline{z}_1-\underline{z})_x=\frac{1}{2}(a_1-a)(\underline{z}_1+\underline{z}),\quad (b_1-b)_x=\frac{1}{2}(a_1-a)(b_1+b),\\&(a_1+a)_x=\frac{1}{4}(a_1-a)^2-\frac{1}{4}(b_1+b)^2-\frac{1}{2}(\underline{z}_1+\underline{z})^2+k_1.\end{aligned} \tag{5.202}$$

带参数 k_2 的 Bäcklund 变换 $\mathbb{B}_2$ 给出类似的关系, 而在由 $\mathbb{B}_2$ 和 $\mathbb{B}_1$ 给出的 Bäcklund

$$\begin{aligned}
\mathbb{B}_2: \qquad & (\underline{z}_2 - \underline{z})_x = \frac{1}{2}(a_2 - a)(\underline{z}_2 + \underline{z}), \\
\mathbb{B}_1: \qquad & (\underline{z}_{21} - \underline{z}_2)_x = \frac{1}{2}(a_{21} - a_2)(\underline{z}_{21} + \underline{z}_2), \\
\mathbb{B}_2: \qquad & (\underline{z}_{12} - \underline{z}_1)_x = \frac{1}{2}(a_{12} - a_1)(\underline{z}_{12} + \underline{z}_1).
\end{aligned} \tag{5.203}$$

$(5.202)_1$ 式和 (5.203) 式类似 1.3 节中对于伪球曲面的经典可换性定理的关系式. 于是, 如果考虑到 Bianchi 图的封闭性, 则 $(5.202)_1-(5.203)_1-(5.203)_2+(5.203)_3$ 的作用给出代数关系

$$\begin{aligned}
&(a_1 - a)(\underline{z}_1 + \underline{z}) - (a_{12} - a_2)(\underline{z}_{12} + \underline{z}_2) \\
&-(a_2 - a)(\underline{z}_2 + \underline{z}) + (a_{12} - a_1)(\underline{z}_{12} + \underline{z}_1) = 0.
\end{aligned} \tag{5.204}$$

剩下的 $(5.202)_{1,2}$ 式以及它们的对应可以类似处理, 从而得到另外两个纯代数关系. 从这三个代数方程中可以解出

$$\begin{aligned}
&a_{12} - a = \hat{\rho}(a_1 - a_2), \quad b_{12} - b = \hat{\rho}(b_1 - b_2), \quad \underline{z}_{12} - \underline{z} = \hat{\rho}(\underline{z}_1 - \underline{z}_2), \\
&\hat{\rho} = 4\frac{k_2 - k_1}{(a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2 + 2(\underline{z}_1 - \underline{z}_2)^2}.
\end{aligned} \tag{5.205}$$

注意到在这个叠加原理中, a, b 和 $\sqrt{2}\underline{z}$ 是对称的, 从而有[331]:

定理 18(向量Calapso方程组的可换性定理) 如果向量Calapso方程组 (5.200) 的解 $\underline{u}_1$ 和 $\underline{u}_2$ 与种子解 $\underline{u} = (a, b, \sqrt{2}\underline{z})$ 通过 Bäcklund 变换 $\mathbb{B}_1$ 和 $\mathbb{B}_2$ 相联系, 那么由

$$\boxed{\underline{u}_{12} - \underline{u} = \frac{4(k_2 - k_1)}{(\underline{u}_1 - \underline{u}_2)^2}(\underline{u}_1 - \underline{u}_2)} \tag{5.206}$$

决定的 $\underline{u}_{12}$ 是向量 Calapso 方程组的另一个解, 并且它既是 $\underline{u}_1$ 也是 $\underline{u}_2$ 的 Bäcklund 变换, 即 $\underline{u}_{12} = \mathbb{B}_2(\underline{u}_1) = \mathbb{B}_1(\underline{u}_2)$.

上述叠加原理类似 sine-Gordon 方程的经典可换性定理 (1.63). 令人感兴趣的是, 在 $n = 2$ 及 $b \to ib$ 时 (参见 5.3.1 小节), 形如 (5.205) 的可换性定理给出了 boomeron 方程的可换性定理的简化版本[64]. 那里的可换性定理包含了标量和向量分量, 同矩阵 Schrödinger 方程的矩阵形式的经典 Darboux 变换有密切关系.

练 习

1. 利用定理 17 证明推论 4.

2. 导出 Bäcklund 方程 (5.202), 利用 $(5.202)_1$ 式、(5.203) 式以及用上面的方法

5.8 特殊的等温曲面, 单孤立子曲面与四次圆纹曲面

现在, 分别用 Darboux-Ribaucour 和 Moutard 变换构造经典等温方程组和 Calapso 方程的显式解. 在平凡种子解上作用这些变换得到 "单孤立子" 等温曲面和 Dupin 四次圆纹曲面. 对应的 zoomeron 方程的局域解通过一个简单的 Lie 点对称同 Davey-Stewartson III 方程重要的 dromion 解相联系.

5.8.1 单孤立子等温曲面

显然平面是 $\mathbb{R}^3$ 中的等温曲面, 因为

$$\boldsymbol{r}=\begin{pmatrix}x\\y\\0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{Y}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{N}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \tag{5.207}$$

满足 Gauss-Weingarten 方程组 (5.35), (5.42), 对应的等温方程组的解为

$$\theta=0,\quad h_1=0,\quad h_2=0. \tag{5.208}$$

这时, 线性方程组 (5.146) 成为

$$\begin{aligned} r_x&=X, & r_x^*&=X, & X_x&=m(r^*+r), & X&=X(x),\\ r_y&=Y, & r_y^*&=-Y, & Y_y&=m(r^*-r), & Y&=Y(y), \end{aligned} \tag{5.209}$$

以及 $N=N_0$, 由此得

$$X_{xx}=\omega^2X,\quad Y_{yy}=-\omega^2Y\quad (\omega^2=2m). \tag{5.210}$$

如果 $\omega\neq 0$, 则不失一般性, 有

$$\begin{aligned} X&=X_0\sinh\omega x, & r&=\frac{X_0}{\omega}\cosh\omega x-\frac{Y_0}{\omega}\cos\omega y,\\ Y&=Y_0\sin\omega y, & r^*&=\frac{X_0}{\omega}\cosh\omega x+\frac{Y_0}{\omega}\cos\omega y. \end{aligned} \tag{5.211}$$

这样, 约束 (5.147) 给出

$$X_0^2=Y_0^2+N_0^2, \tag{5.212}$$

而新的等温曲面 $\tilde{\Sigma}$ 的位置向量为[86]

$$\tilde{\boldsymbol{r}}=\begin{pmatrix}x\\y\\ \vphantom{0}\end{pmatrix}-\frac{2/\omega}{X_0\cosh\omega x+Y_0\cos\omega y}\begin{pmatrix}X_0\sinh\omega x\\Y_0\sin\omega y\\ \vphantom{0}\end{pmatrix}. \tag{5.213}$$

这个曲面称为单孤立子等温曲面. 对应的经典 Calapso 方程的解由变换 (5.148) 得到, 即

$$\tilde{z} = \frac{\sqrt{2}\,\omega N_0}{X_0 \cosh \omega x + Y_0 \cos \omega y}. \tag{5.214}$$

典型的这类等温曲面见图 5.2, 其中 $Y_0/N_0 = 0, 1/4, 1/2, 3/4$. 当 $Y_0 = 0, X_0 = N_0$ 时, 文献 [86] 得到了柱对称等温曲面. 注意到在此特殊情形, 基曲线

$$\tilde{\boldsymbol{r}} = \begin{pmatrix} x - \dfrac{2}{\omega} \tanh \omega x \\ -\dfrac{2}{\omega} \dfrac{1}{\cosh \omega x} \end{pmatrix} \tag{5.215}$$

为圈状孤立子 (参见第 6 章).

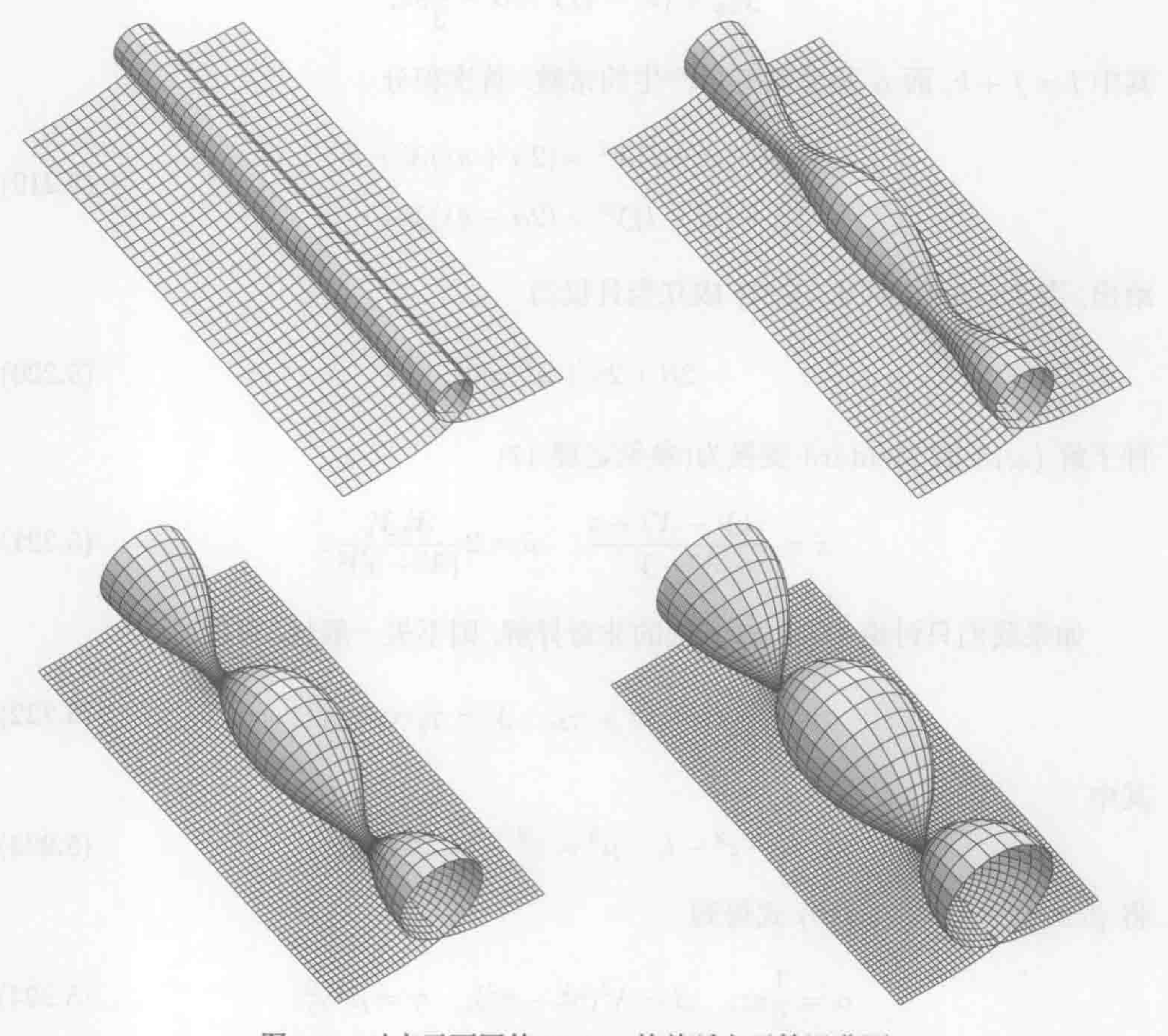


图 5.2 对应于不同的 Y_0/N_0 的单孤立子等温曲面

5.8.2 由 Moutard 变换生成的一族解

经典 Calapso 方程 (5.18) 最简单的种子解为

$$z = 常数 \quad \Rightarrow \quad \rho = 0, \quad f = 常数, \tag{5.216}$$

相应的 Lax 对 (5.79), (5.80) 的解为

$$\psi = \mathcal{X}(x) + \mathcal{Y}(y), \quad S = z(\mathcal{Y}(y) - \mathcal{X}(x)) + s, \tag{5.217}$$

其中 s 是任意的积分常数. 代入 $(5.79)_2$ 式得

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_{xx} + (z^2 + l)\mathcal{X} &= \alpha + \frac{1}{2}sz, \\ \mathcal{Y}_{yy} + (z^2 - l)\mathcal{Y} &= \alpha - \frac{1}{2}sz, \end{aligned} \tag{5.218}$$

其中 $l = f + k$, 而 α 是分离变量产生的常数. 首次积分

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_x^2 + (z^2 + l)\mathcal{X}^2 &= (2\alpha + sz)\mathcal{X} + \beta, \\ \mathcal{Y}_y^2 + (z^2 - l)\mathcal{Y}^2 &= (2\alpha - sz)\mathcal{Y} + \gamma \end{aligned} \tag{5.219}$$

给出, 当 $I = 0$ 时, 约束 (5.81) 成立当且仅当

$$2\beta + 2\gamma + s^2 = 0. \tag{5.220}$$

种子解 (z, ρ) 的 Moutard 变换为(参见定理 17)

$$\tilde{z} = \frac{z(\mathcal{Y} - \mathcal{X}) + s}{\mathcal{X} + \mathcal{Y}}, \quad \tilde{\rho} = 2\frac{\mathcal{X}_x\mathcal{Y}_y}{(\mathcal{X} + \mathcal{Y})^2}. \tag{5.221}$$

如果我们只讨论 Calapso 方程的非奇异解, 则不失一般性, 可取

$$\mathcal{X} = \gamma_1 \cosh \lambda x + \gamma_2, \quad \mathcal{Y} = \gamma_3 \cos \mu y, \tag{5.222}$$

其中

$$\lambda^2 = -z^2 - l, \quad \mu^2 = z^2 - l, \quad -l > z^2. \tag{5.223}$$

将 (5.222) 式代入 (5.219) 式得到

$$\alpha = \frac{1}{2}sz, \quad \beta = \lambda^2(\gamma_2^2 - \gamma_1^2), \quad \gamma = \mu^2\gamma_3^2, \tag{5.224}$$

(5.223) 式和 (5.224) 式可以分别看作为 z, l 和 α, β, γ 的定义, 剩下的 (5.225) 式在 $z \neq 0$ 时决定了 s. 下面分别考虑两个情形:

$z = 0$ 情形

由 $\gamma_2 = 0$ 和 (5.223) 式得到 $\lambda = \mu$, 而约束 (5.220) 给出

$$s^2 = 2\lambda^2(\gamma_1^2 - \gamma_3^2). \tag{5.226}$$

由上式得到 $\gamma_1 \neq 0$, 从而不失一般性, 有 Calapso 方程的新解

$$\tilde{z} = \frac{\lambda\sqrt{2(1-\gamma_3^2)}}{\cosh \lambda x + \gamma_3 \cos \lambda y}. \tag{5.227}$$

从几何观点来看, λ 是无关紧要的, 因为形如 $(x, y, \tilde{z}) \to (cx, cy, \tilde{z}/c)$ 的标度变换只不过改变了外围空间 $\mathbb{R}^3$ 的标度. 于是, $\tilde{z}$ 本质上给出了 Calapso 方程的一个单参数解族. 如果 $\gamma_3 = 0$, 则 $\tilde{z}$ 与 y 无关, 并且当 $x \to \pm\infty$ 时指数衰减. 对于非零的 γ_3, 解关于 y 是周期的, 而在 x 方向指数衰减. 解的形状见图 5.3.

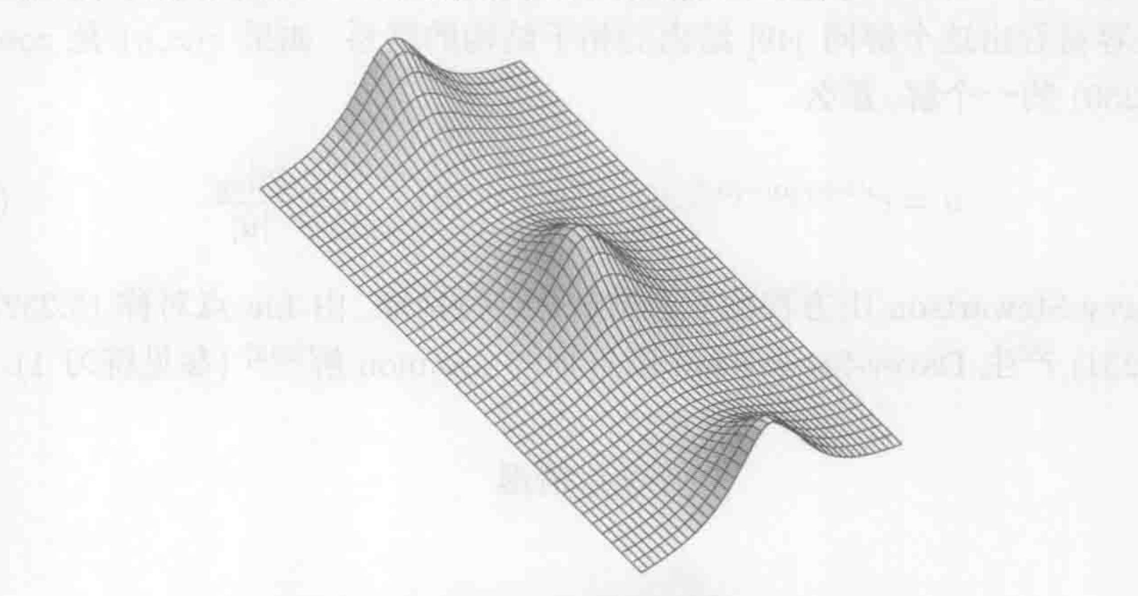


图 5.3 Calapso 方程的 "单孤立子" 解

一个代数的局域解 (团块解) 可以通过

$$\lambda = \epsilon, \quad \gamma_3 = \epsilon^2 - 1, \quad \epsilon \to 0 \tag{5.228}$$

得到, 它是 (参见图 5.4)

$$\tilde{z} = \frac{4}{2 + x^2 + y^2}. \tag{5.229}$$

Calapso 方程的这个解可以通过 Christoffel 变换同经典 Enneper 极小曲面相联系. 注意到 Enneper 曲面不是到目前为止讨论过的任何单孤立子等温曲面的对偶.[5] 然而, 在 Calapso 方程的层次上, 通过比较 (5.214) 式和 (5.227) 式可知两类是完全相同的, 而 Calapso 方程的解同等温方程组的解之间的映射不是一一对应.

[5] 注意极小曲面的 Christoffel 变换是球面.

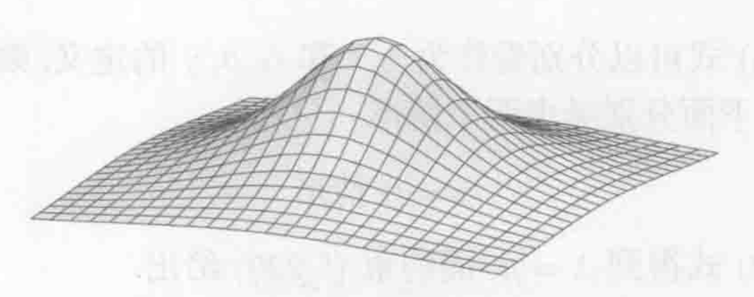


图 5.4　Calapso 方程的 “团块” 解

变换 $y \to \mathrm{i}y$ 将 Calapso 方程的解 (5.227) 变为 zoomeron 方程

$$\Box\left(\frac{z_{xy}}{z}\right) + (z^2)_{xy} = 0 \tag{5.230}$$

的解

$$\tilde{z} = \frac{\lambda\sqrt{2(1-\gamma_3^2)}}{\cosh\lambda x + \gamma_3\cosh\lambda y}. \tag{5.231}$$

对于非负的 γ_3, $\tilde{z}$ 是局域的, 在无穷远处指数衰减, 并且是非奇异的, 见图 5.5. 事实上, 很容易看出这个解同 [49] 给出的相干结构的联系. 如果 $z(x, y)$ 是 zoomeron 方程 (5.230) 的一个解, 那么

$$u = e^{\mathrm{i}(\nu x+\mu y+\mu\nu t)}z(x+\mu t, y+\nu t), \quad \rho = \frac{|u|_{xy}}{|u|} \tag{5.232}$$

给出 Davey-Stewartson III方程的双参数解族. 特别地, 由 Lie 点对称 (5.232) 给出的解 (5.231) 产生 Davey-Stewartson III方程的 dromion 解[282] (参见练习 1).

$z \neq 0$ 情形

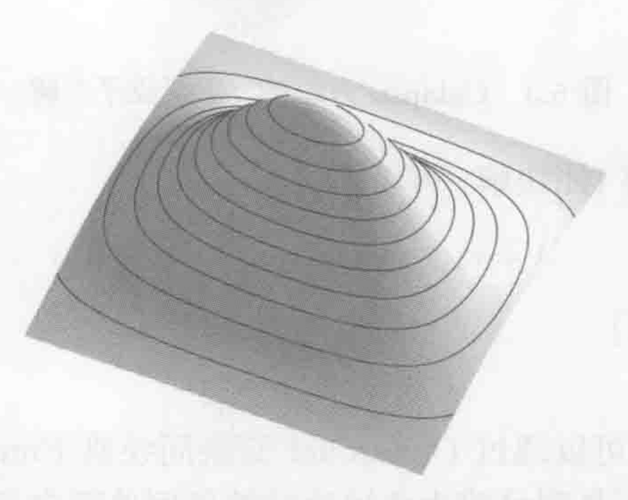


图 5.5　zoomeron 方程的 dromion 型解

(5.224) 式和 (5.225) 式给出

$$\ldots \lambda^2\frac{\gamma_2}{\ldots}, \quad \epsilon^2 = \frac{1}{\ldots}(\mu^2 - \lambda^2) \tag{5.233}$$

从而约束 (5.220) 成为

$$\mu^2\lambda^2\gamma_2^2 + (\mu^2 - \lambda^2)(\mu^2\gamma_3^2 - \lambda^2\gamma_1^2) = 0. \tag{5.234}$$

Calapso 方程的新解为

$$\tilde{z} = -z + \frac{2z\gamma_3\cos\mu y + s}{\gamma_1\cosh\lambda x + \gamma_3\cos\mu y + \gamma_2}, \tag{5.235}$$

其中 s, z 由 (5.233) 式给出, 而常数 γ_i 满足约束关系 (5.234). 如果我们对外围空间 $\mathbb{R}^3$ 作一标度变换, 那么 (5.235) 式依赖于 λ, μ, γ_i 之间的两个比值, 从而给出 Calapso 方程的双参数解族. 所得的解在 y 方向也是周期的, 而在 $x \to \pm\infty$ 时指数地趋于 $-z$. 图 5.6 表示了一个典型的解.

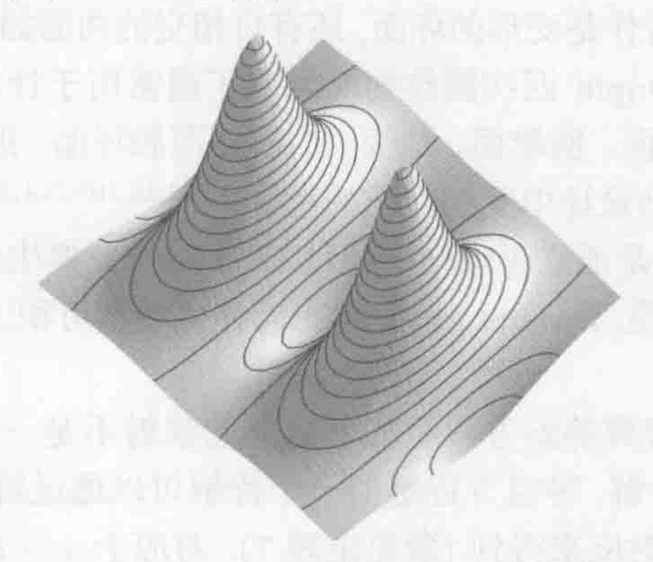


图 5.6 Calapso 方程对应于 $z \neq 0$ 的解

当经典 Calapso 方程组和 $n = 1$ 的 (5.77) 式成立时,

$$2\Delta(\ln\tau) = z^2 + \delta, \quad 2\Box(\ln\tau) = f, \quad 2(\ln\tau)_{xy} = -\rho \tag{5.236}$$

的相容性条件成立, 其中 δ 是一个任意常数, 从而存在 "τ 函数" 满足上述条件. 如果再定义函数

$$\sigma = z\tau, \tag{5.237}$$

那么 Calapso 方程组 $(5.64)_{n=1}$ 可以写为双线性形式[6]

$$D_xD_y\sigma\cdot\tau = 0, \quad (D_x^2 + D_y^2)\tau\cdot\tau = \sigma^2 + \delta\tau^2, \tag{5.238}$$

其中 D_x 和 D_y 是 Hirota 引入的双线性算子[166], 定义为

$$D_x^nD_y^m a\cdot b = (\partial_x - \partial_{x'})^n(\partial_y - \partial_{y'})^m a(x,y)b(x',y')|_{x'=x,y'=y}. \tag{5.239}$$

[6] 有关 Hirota 双线性算子的内容已超出了本书的范围. 有兴趣的读者可以参阅 Matsuno 的书[250]. 双线性算子的基本性质在 Rogers 和 Shadwick 关于 Bäcklund 变换的书[311] 中有列表.

这时由

$$\tau = \mathcal{X}(x) + \mathcal{Y}(y), \quad \sigma = \hat{\mathcal{X}}(x) + \hat{\mathcal{Y}}(y) \tag{5.240}$$

恰好得到 (5.221) 式.

下面将看到解 (5.235) (以及退化情形 (5.227)) 同经典 Dupin 四次圆纹曲面相联系.

5.8.3 Dupin 四次圆纹曲面

Dupin 四次圆纹曲面是由数学家和海军建筑师 Dupin 引入的一类曲面[114], 它的定义是所有的曲率线都是圆. 在十九世纪, 它被一些著名的科学家如 Maxwell 于 1868 年[253]、Cayley 于 1873 年所研究. 四次圆纹曲面有多种类型, 其中一类重要的环四次圆纹曲面可以看作是变形的环面, 还有自相交的曲面如喇叭四次圆纹曲面和纺锤四次圆纹曲面. Dupin 四次圆纹曲面涵盖了通常用于计算机辅助设计的所有曲面, 包括平面、圆柱面、圆锥面、球面、二次曲面和环面. 近些年来, Dupin 四次圆纹曲面在计算机辅助设计中受到广泛的重视[9−12,46,103,244,245,256,278,287,347].

这里, 我们关心的是孤立子理论中通过 Bäcklund 变换生成的 Dupin 四次圆纹曲面[100]. 附带说明的是, Ferapontov 发现在流体力学型可积 Hamilton 系统中也有 Dupin 超曲面 [127].

Calapso 方程的解到等温方程组的解之间的映射不是一对一的. 但是, 给定 Calapso 方程组的一个解, 等温方程组的一个特解可以通过将 Bäcklund 变换 $\tilde{z}$ 同 Christoffel 变换 z^* 相对应来得到 (参见定理 7). 对应于 $z=$ 常数 的等温方程组的解为

$$e^{\theta} = \psi, \quad h_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(z + \tilde{z}), \quad h_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(z - \tilde{z}), \tag{5.241}$$

它与 $\tilde{z}$ 的关系由

$$e^{-\tilde{\theta}} = \psi, \quad \tilde{h}_1 = h_1, \quad \tilde{h}_2 = -h_2 \tag{5.242}$$

给出.[7] 利用 $(5.217)_1$ 式和 $(5.221)_1$ 式, 我们得到等温方程组 (5.12) 的新解

$$e^{\tilde{\theta}} = \frac{1}{\mathcal{X} + \mathcal{Y}}, \quad \tilde{h}_1 = \frac{s + 2z\mathcal{Y}}{\sqrt{2}(\mathcal{X} + \mathcal{Y})}, \quad \tilde{h}_2 = \frac{s - 2z\mathcal{X}}{\sqrt{2}(\mathcal{X} + \mathcal{Y})}. \tag{5.243}$$

根据文献 [380], 等温曲面上曲率线的曲率和挠率为

$$\kappa^{(x)^2} = \frac{|\boldsymbol{r}_x \times \boldsymbol{r}_{xx}|^2}{\boldsymbol{r}_x^6} = e^{-2\theta}(\theta_x^2 + h_1^2),$$

$$\kappa^{(y)^2} = \frac{|\boldsymbol{r}_y \times \boldsymbol{r}_{yy}|^2}{\boldsymbol{r}_y^6} = e^{-2\theta}(\theta_y^2 + h_2^2),$$

---

[7] 这里取 $z^* = -\frac{1}{\sqrt{2}}(h_1^* + h_2^*)$.

$$\begin{aligned}\tau^{(x)} &= -\frac{[\boldsymbol{r}_x\,\boldsymbol{r}_{xx}\,\boldsymbol{r}_{xxx}]}{|\boldsymbol{r}_x \times \boldsymbol{r}_{xx}|^2} = e^{-\theta}\left(\frac{\theta_y h_{1x} - \theta_{xy} h_1}{\theta_x^2 + h_1^2}\right),\\ \tau^{(y)} &= -\frac{[\boldsymbol{r}_y\,\boldsymbol{r}_{yy}\,\boldsymbol{r}_{yyy}]}{|\boldsymbol{r}_y \times \boldsymbol{r}_{yy}|^2} = e^{-\theta}\left(\frac{\theta_x h_{2y} - \theta_{xy} h_2}{\theta_y^2 + h_2^2}\right),\end{aligned} \tag{5.244}$$

这里用到了 Gauss-Weingarten 方程组 (5.9). 容易验证, 现在

$$\tilde{\kappa}_x^{(x)} = 0, \quad \tilde{\kappa}_y^{(y)} = 0, \quad \tilde{\tau}^{(x)} = 0, \quad \tilde{\tau}^{(y)} = 0, \tag{5.245}$$

因此曲率线是圆周. 事实上, 曲率线是圆周的所有曲面都满足 (5.243) 式, 这些曲面称为 Dupin 四次圆纹曲面, 它们有一个参数化[114]

$$\tilde{\boldsymbol{r}} = \frac{1}{a - c\cos\alpha\cos\beta}\begin{pmatrix}\mu(c - a\cos\alpha\cos\beta) + b^2\cos\alpha\\ b\sin\alpha(a - \mu\cos\beta)\\ b\sin\beta(c\cos\alpha - \mu)\end{pmatrix}, \tag{5.246}$$

$$a^2 = b^2 + c^2,$$

其中 α 和 β 是曲率线坐标. 它们一般不是共形的, 因为

$$\frac{\tilde{\boldsymbol{r}}_\alpha^2}{\tilde{\boldsymbol{r}}_\beta^2} = \left(\frac{a - \mu\cos\beta}{c\cos\alpha - \mu}\right)^2 \neq 1, \tag{5.247}$$

但是, 由变换

$$\begin{aligned}\alpha &= 2\arctan\left[\sqrt{\frac{c-\mu}{c+\mu}}\tanh\left(\frac{\sqrt{c^2-\mu^2}}{2}x\right)\right],\\ \beta &= 2\arctan\left[\sqrt{\frac{a-\mu}{a+\mu}}\tan\left(\frac{\sqrt{a^2-\mu^2}}{2}y\right)\right]\end{aligned} \tag{5.248}$$

得到

$$\tilde{\boldsymbol{r}}_x^2 = \tilde{\boldsymbol{r}}_y^2, \tag{5.249}$$

从而有共形曲率线坐标 x 和 y. 在适当选取常数时, 由 (5.246) 和 (5.248) 式给出的位置向量 $\tilde{\boldsymbol{r}}$ 满足相应于解 $(\tilde{\theta}, \tilde{h}_1, \tilde{h}_2)$ 的 Gauss-Weingarten 方程组 (5.9), 从而, 由 (5.227) 和 (5.235) 式给出的相应于 Dupin 四次圆纹曲面的 Calapso 方程的解分别对应于种子解 $z = 0$ 和 $z =$ 常数 $\neq 0$.

参数 a, c 和 μ 的意义可以很容易看出. 曲线 $\beta = \pi$ 和 $\beta = 0$ 是平面 $Z = 0$ 上的圆周, 满足

$$(X \pm c)^2 + Y^2 = (a \pm \mu)^2. \tag{5.250}$$

当 $c^2 > \mu^2$ 时两个圆周相交, 图 5.7 显示了对应的一个四次圆纹曲面.

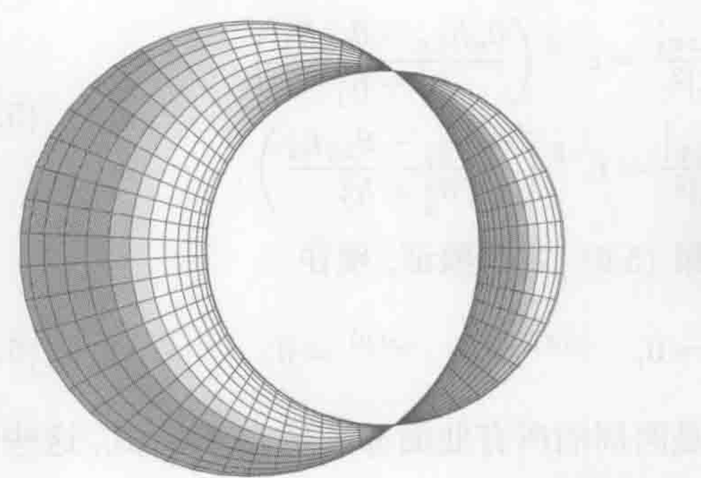
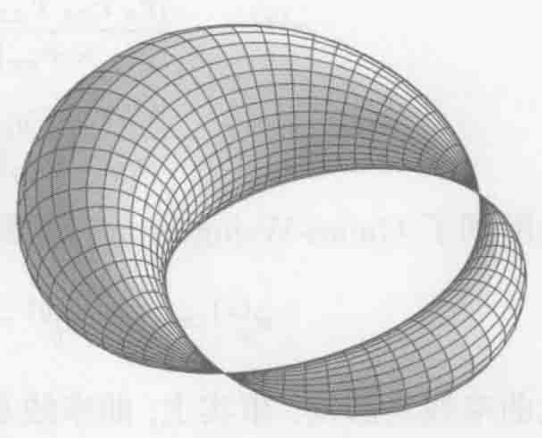



图 5.7 $c^2 > \mu^2$ 时的 Dupin 四次圆纹曲面

当 $c^2 = \mu^2$ 时, 两个圆周相切, 图 5.8 显示了一个这样的例子.

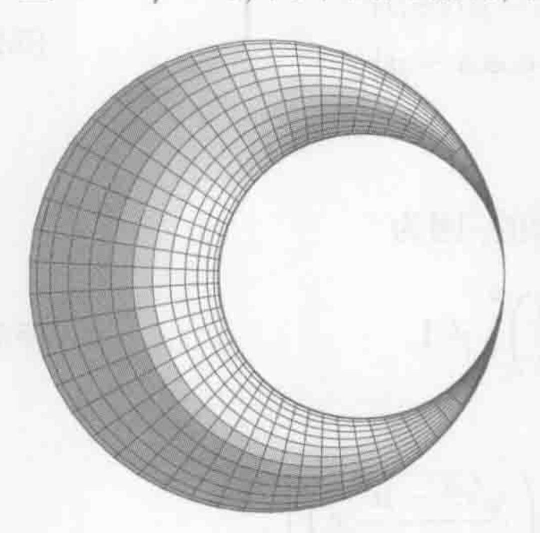
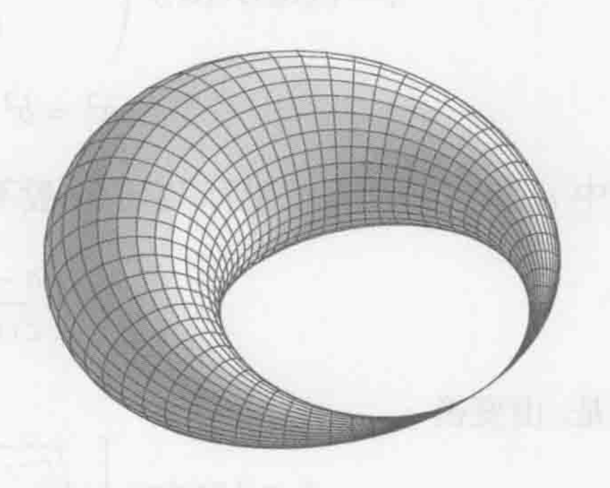



图 5.8 $c^2 = \mu^2$ 时的 Dupin 四次圆纹曲面

如果 $c^2 < \mu^2$, 则小圆周完全包含于大圆周中, 相应的四次圆纹曲面可以看作为环面的形变 (图 5.9). 当 $c \to 0$ 时, Dupin 四次圆纹曲面就退化为环面, 这时, 两个圆周同心 (图 5.10).

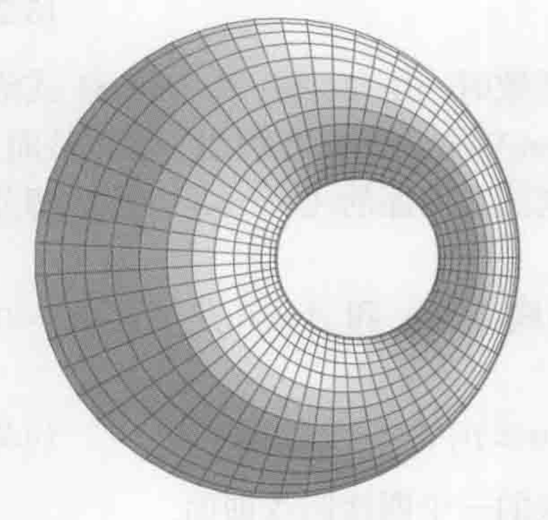
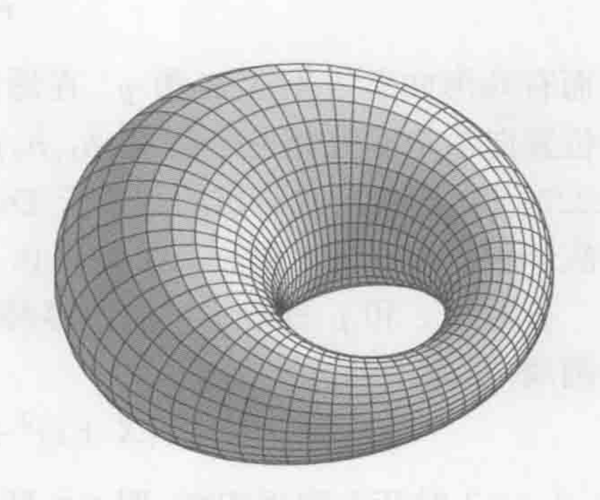



图 5.9 $c^2 < \mu^2$ 时的 Dupin 四次圆纹曲面

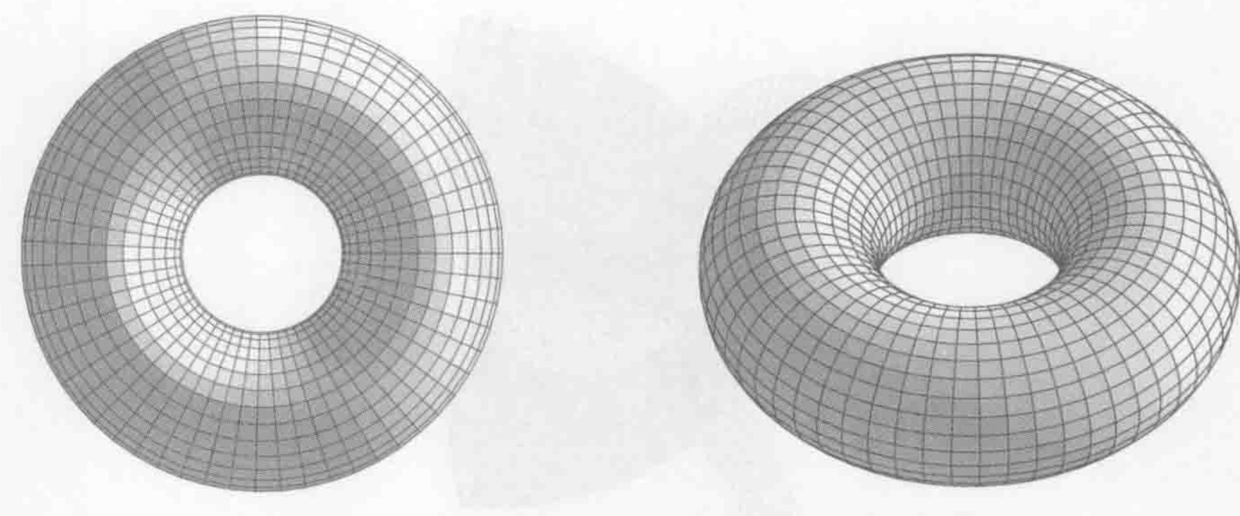


图 5.10 $c=0$ 时的 Dupin 四次圆纹曲面 (环面)

通过取极限

$$\alpha=\epsilon x,\quad \beta=\epsilon y,\quad a=2+\epsilon^2,\quad c=2,\quad \mu=0,\quad \epsilon\to 0, \tag{5.251}$$

可以得到球面

$$\tilde{\boldsymbol{r}}=\frac{4}{1+x^2+y^2}\begin{pmatrix}1\\ x\\ y\end{pmatrix}. \tag{5.252}$$

通过积分

$$\tilde{\boldsymbol{r}}_x^*=\frac{\tilde{\boldsymbol{r}}_x}{\tilde{\boldsymbol{r}}_x^2},\quad \tilde{\boldsymbol{r}}_y^*=-\frac{\tilde{\boldsymbol{r}}_y}{\tilde{\boldsymbol{r}}_y^2}, \tag{5.253}$$

得到的 Christoffel 变换 $\tilde{\Sigma}^*$ 给出了一个极小曲面, 它的表达式是

$$\tilde{\boldsymbol{r}}^*=\frac{1}{12}\begin{pmatrix}3y^2-3x^2\\ 3x+3xy^2-x^3\\ -3y-3yx^2+y^3\end{pmatrix}, \tag{5.254}$$

它表示经典 Enneper 曲面 (参见 5.1 节, 练习 1), 相应的图示见图 5.11. 进一步, 由于我们已将 Bäcklund 变换 $\tilde{\Sigma}$ 等同于 Christoffel 变换 Σ^*, Enneper 曲面产生了对应于 Calapso 方程的零解的特殊种子曲面 Σ. 这时, 与球面 (5.252) 相联系的等温方程组的解是

$$e^{\tilde{\theta}}=\frac{4}{1+x^2+y^2},\quad \tilde{h}_1=\tilde{h}_2=\frac{2}{1+x^2+y^2}, \tag{5.255}$$

从而有 Calapso 方程的解

$$\tilde{z}=\frac{2\sqrt{2}}{1+x^2+y^2}. \tag{5.256}$$

考虑到 Calapso 方程在变换 $(x,y,\tilde{z})\to(x/\sqrt{2},y/\sqrt{2},\sqrt{2}\,\tilde{z})$ 下的不变性, 这就是从种子解 $z=0$ 通过 Bäcklund 变换 (5.229) 所得到的.

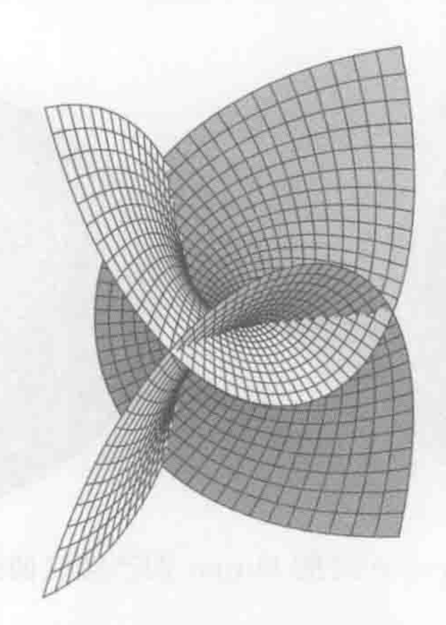


图 5.11　Enneper 曲面

练　　习

1. 如果 $u=u(x,y,t)$, $\rho=\rho(x,y,t)$ 是 Davey-Stewartson III方程 (5.69) 的解, 证明

$$\tilde{u}=e^{\mathrm{i}(\nu x+\mu y+\mu\nu t)}u(x+\mu t,y+\nu t,t),\quad \tilde{\rho}=\rho(x+\mu t,y+\nu t,t)$$

是 Davey-Stewartson III方程的一族双参数解.

2. 导出 Calapso 方程的双线性形式 (5.238), 并求出形如 (5.240) 式的所有解.

3. 验证与 (5.243) 式相联系的曲率线是圆周.

4. 导出表示 (5.250), 验证两个圆周相交当且仅当 $c^2>\mu^2$. 进一步, 证明交点为

$$X=\frac{a}{c}\mu,\quad Y=\pm\frac{b}{c}\sqrt{c^2-\mu^2}.$$

第 6 章 孤立子曲面的一般性质以及规范变换和反向变换的作用

1973 年建立了 AKNS 谱问题[1]. 通过相容性, 这个线性表示给出了一大类孤立子方程, 包括 sine-Gordon 方程、mKdV 方程、KdV 方程和 NLS 方程. 1976 年前后, Lund 和 Regge[240] 以及 Pohlmeyer[285] 建立了特殊类型曲面的几何与孤立子理论的联系. 现在所称的 Pohlmeyer-Lund-Regge 孤立子方程组是通过用 3×3 线性表示的 Gauss-Weingarten 方程组所相应的 Gauss-Mainardi-Codazzi 方程组产生的. 此外, Lund 和 Regge 用了旋量表示使之与 2×2 表示相联系, 从而纳入了 AKNS 系统中.

孤立子几何理论中另一个重要的发展是 1982 年 Sym 的开创性工作[353], 他引入了孤立子曲面的概念. 与 sine-Gordon 方程和 NLS 方程相联系的孤立子曲面分别是伪球曲面和 Hasimoto 曲面. 一般地, 为了得到与一个孤立子方程的解相联系的单参数族孤立子曲面 $\Sigma : \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v)$, 可以将此解代入相关的 Gauss-Weingarten 方程并由此解出位置向量 $\boldsymbol{r}$. 然而, 可以避开直接的积分过程而使用文献 [356] 给出的更巧妙的方法. 这个 Sym-Tafel 方法必须依赖于孤立子方程的线性表示中的 "谱参数". 这里将讨论一大类由 AKNS 系统产生的孤立子方程.

孤立子曲面的位置向量可以解释为 "特征函数方程" 的解, 而这些 "特征函数方程" 是可积的[206]. 这里将对 NLS 梯队通过作用递推算子得到此结论, 并构造相应的孤立子梯队, 其中最低阶的是著名的 Heisenberg 自旋方程.

与 NLS 梯队相联系的孤立子曲面由圈孤立子的运动所扫出[376], 这可以通过孤立子曲面上取反向变换得到的坐标导出, 而反向变换最初在研究气体动力学中的不变性时引入 (参见文献 [311]). 这里, 我们将讨论孤立子理论中的反向变换, 特别是它同 Dym, mKdV 和 KdV 梯队的联系. 对于势 KdV 方程, 将给出可换性定理, 并同数值分析中的 ε- 算法相联系. 然后用平面曲线运动导出 mKdV 梯队.

最后, 从常曲率和常挠率不可伸长曲线的纯从法向运动可分别导出推广的 Dym 方程组和 sine-Gordon 方程组, 这些曲线的运动所产生的孤立子曲面具有对偶孤立子曲面, 而 Bäcklund 变换具有常距离性质.

6.1 AKNS 2×2 谱问题

6.1.1 伪球曲面的位置向量

回到带渐近坐标的伪球曲面的基本形式 (1.24). 利用不变性 (2.31), 我们加入了谱参数 λ. 为简单起见, 设 $\rho=1$, 从而 Gauss 曲率 $\mathcal{K}=-1$. 由 Gauss-Weingarten 方程产生的相应的 AKNS 表示形如 (2.32) 式, 即

$$\Phi_{,\mu}=g_\mu\Phi,\quad \mu=1,2, \tag{6.1}$$

其中

$$\begin{aligned} g_1&=\frac{\mathrm{i}}{2}(\omega_{,1}\,\sigma_2+\lambda\sigma_3),\\ g_2&=\frac{\mathrm{i}}{2\lambda}(\sin\omega\,\sigma_1-\cos\omega\,\sigma_3). \end{aligned} \tag{6.2}$$

这里用了记号 $_{,\mu}=\partial/\partial x^\mu$, $\mu=1,2$, 其中 $x^1=u$, $x^2=v$, 并略去了$\tilde{}$, σ_i 是由 (2.25) 式给出的 Pauli 矩阵. 利用 2.2 节给出的对应 $e_k=\dfrac{\sigma_k}{2\mathrm{i}}\leftrightarrow L_k$, 可以得到用矩阵 L_i 表示的 3×3 线性表示. 于是, 矩阵 g_μ 可以按 Pauli 矩阵分解为

$$g_\mu=\boldsymbol{g}_\mu\cdot\boldsymbol{e},\quad \boldsymbol{e}=\begin{pmatrix}e_1\\ e_2\\ e_3\end{pmatrix}, \tag{6.3}$$

其中向量

$$\boldsymbol{g}_\mu=\begin{pmatrix}g_{\mu_1}\\ g_{\mu_2}\\ g_{\mu_3}\end{pmatrix} \tag{6.4}$$

由 (6.2) 式和 (6.3) 式决定, 矩阵值内积

$$\boldsymbol{g}_\mu\cdot\boldsymbol{e}=g_{\mu_1}e_1+g_{\mu_2}e_2+g_{\mu_3}e_3. \tag{6.5}$$

通过对应 $e_k\leftrightarrow L_k$, 我们得到同方程组 (6.1) 相对应的 $so(3)$ 形式

$$\hat{\Phi}_{,\mu}=(\boldsymbol{g}_\mu\cdot\boldsymbol{L})\hat{\Phi}, \tag{6.6}$$

其中

$$\boldsymbol{L}=\begin{pmatrix}L_1\\ L_2\\ L_3\end{pmatrix}. \tag{6.7}$$

在 2.2 节中给出了这个 $so(3)$ 线性表示同 Gauss-Weingarten 方程之间的联系. 这里关心的是只要用矩阵 g_μ 就可计算出第一、第二基本形式. 由 (6.2) 式,

$$g_{1,\lambda}=\frac{\mathrm{i}}{2}\sigma_3,\quad g_{2,\lambda}=\frac{\mathrm{i}}{2\lambda^2}(\sin\omega\,\sigma_1-\cos\omega\,\sigma_3), \tag{6.8}$$

其中 $_{,\lambda}=\partial/\partial\lambda$, 从而

$$-2\mathrm{Tr}(g_{\mu,\lambda}\ g_{\nu,\lambda})\,\mathrm{d}x^\mu\,\mathrm{d}x^\nu\big|_{\lambda=1}=\mathrm{d}u^2+2\cos\omega\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v+\mathrm{d}v^2. \tag{6.9}$$

这里, 再次用到了 Einstein 求和约定, 而 "Tr" 表示矩阵的迹.

将 (1.24) 式和 (6.9) 式比较得, 如果用向量 $\boldsymbol{g}_\mu$ 来表示, 渐近坐标下伪球曲面的第一基本形式为

$$\mathrm{I}=-2\mathrm{Tr}(g_{\mu,\lambda}\ g_{\nu,\lambda})\mathrm{d}x^\mu\,\mathrm{d}x^\nu\big|_{\lambda=1}, \tag{6.10}$$

或等价的

$$\mathrm{I}=(\boldsymbol{g}_{\mu,\lambda}\cdot\boldsymbol{g}_{\nu,\lambda})\mathrm{d}x^\mu\,\mathrm{d}x^\nu\big|_{\lambda=1}. \tag{6.11}$$

另一方面, 如果将曲面 Σ 的位置向量 $\boldsymbol{r}=(X(u,v),\,Y(u,v),\,Z(u,v))$ 表示为矩阵形式

$$r=Xe_1+Ye_2+Ze_3=\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{e}, \tag{6.12}$$

则第一基本形式 $(1.2)_1$ 可以写为

$$\mathrm{I}=-2\mathrm{Tr}(r_{,\mu}r_{,\nu})\mathrm{d}x^\mu\,\mathrm{d}x^\nu\big|_{\lambda=1}. \tag{6.13}$$

这里用到了

$$-2\,\mathrm{Tr}\,(e_ie_k)=\delta_{ik}. \tag{6.14}$$

由于矩阵的迹在相似变换下不变, 通过比较 (6.10) 式和 (6.13) 式, 我们可以设

$$r_{,\mu}=G^{-1}g_{\mu,\lambda}G, \tag{6.15}$$

其中规范变换矩阵 G 待定. 利用 AKNS 系统 (6.1) 的相容性条件, 即 "Gauss-Mainardi-Codazzi" 方程组

$$g_{1,2}-g_{2,1}+[g_1,\ g_2]=0, \tag{6.16}$$

(6.15) 式的相容性条件 $r_{,1,2}=r_{,2,1}$ 给出

$$[G_{,1}G^{-1}-g_1,\ g_{2,\lambda}]=[G_{,2}G^{-1}-g_2,\ g_{1,\lambda}]. \tag{6.17}$$

当取

$$G=\Phi \tag{6.18}$$

时, 上式恒成立, 这里 Φ 是 AKNS 表示 (6.1) 的 2×2 特征函数矩阵.

将 (6.18) 式代入 (6.15) 式, 我们还需要解相容的方程组

$$r_{,\mu} = \Phi^{-1} g_{\mu,\lambda}\Phi, \quad \mu = 1,2. \tag{6.19}$$

但是, 在 (6.16) 式成立时, $\Phi_{,\lambda,\mu} = \Phi_{,\mu,\lambda}$, 从而

$$\begin{aligned}(\Phi^{-1}\Phi_{,\lambda})_{,\mu} &= -\Phi^{-1}\Phi_{,\mu}\Phi^{-1}\Phi_{,\lambda} + \Phi^{-1}\Phi_{,\lambda,\mu}\\ &= -\Phi^{-1} g_\mu \Phi_{,\lambda} + \Phi^{-1}(g_{\mu,\lambda}\Phi + g_\mu\Phi_{,\lambda}) = \Phi^{-1} g_{\mu,\lambda}\Phi,\end{aligned} \tag{6.20}$$

于是 (6.19) 式给出

$$r_{,\mu} = (\Phi^{-1}\Phi_{,\lambda})_{,\mu}. \tag{6.21}$$

求解 (6.21) 式给出 Sym-Tafel 关系[356][1]

$$\boxed{r = \Phi^{-1}\Phi_{,\lambda},} \tag{6.22}$$

它在允许空间平移下唯一确定. 利用分解 (6.12), 孤立子曲面的位置向量 $\boldsymbol{r}$ 为

$$\boldsymbol{r} = -2\,\mathrm{Tr}\,(r\boldsymbol{e}) = \mathrm{i}\,\mathrm{Tr}\,(\Phi^{-1}\Phi_{,\lambda}\boldsymbol{\sigma}). \tag{6.23}$$

我们已经知道由 (6.23) 式给出的位置向量 $\boldsymbol{r}$ 所对应的第一基本形式与渐近坐标下伪球曲面的相同. 下面将说明这个 $\boldsymbol{r}$ 所对应的第二基本形式也与相应的伪球曲面的相同. 为此, 用 "位置矩阵" r, 将第二基本形式写为

$$\mathrm{II} = h_{\mu\nu}\,\mathrm{d}x^\mu\,\mathrm{d}x^\nu = (\boldsymbol{r}_{,\mu,\nu}\cdot\boldsymbol{N})\,\mathrm{d}x^\mu\,\mathrm{d}x^\nu, \tag{6.24}$$

这里

$$h_{\mu\nu} = -\frac{1}{\det^{1/2}[r_{,1}, r_{,2}]}\,\mathrm{Tr}\,([r_{,1}, r_{,2}]r_{,\mu,\nu}). \tag{6.25}$$

由 (6.19) 式给出的 $r_{,\mu}$ 和关系式

$$(\Phi^{-1}g_{\mu,\lambda}\Phi)_{,\nu} = \Phi^{-1}(g_{\mu,\nu,\lambda} + [g_{\mu,\lambda}, g_\nu])\Phi \tag{6.26}$$

得到

$$\begin{aligned}\mathrm{II} &= h_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu\,\mathrm{d}x^\nu,\\ h_{\mu\nu} &= -\frac{1}{\det^{1/2}[g_{1,\lambda}, g_{2,\lambda}]}\,\mathrm{Tr}\,([g_{1\lambda}, g_{2,\lambda}](g_{\mu,\nu,\lambda} + [g_{\mu,\lambda}, g_\nu])).\end{aligned} \tag{6.27}$$

---

[1]孤立子浸入和 Sym-Tafel 公式在 Lie 群和 Lie 代数上的推广是近来关心的问题[84, 110, 138, 139, 208]

将 (6.2) 式给出的 g_μ 代入 (6.27) 式, 有

$$h_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu\,\mathrm{d}x^\nu\big|_{\lambda=1}=2\sin\omega\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v, \tag{6.28}$$

于是我们重新得到了具有 $\mathcal{K}=-1/\rho^2=-1$ 的伪球曲面的第二基本形式 $(1.24)_2$. 这就是说, (6.23) 式定义的位置向量 $\boldsymbol{r}$ 确实给出了渐近坐标下的伪球曲面. 注意到现在位置向量 $\boldsymbol{r}$ 可以通过计算特征函数 Φ 关于参数 λ 的导数得到, 而不再需要直接去求解渐近坐标 u 和 v 下的 Gauss-Weingarten 方程. 这个结论以及它的推广在构造孤立子曲面中非常有用.

6.1.2 $su(2)$ 线性表示及其相关的孤立子曲面: $r=-\bar{q}$ 时的 AKNS 系统

前面我们基于经典 sine-Gordon 方程的 AKNS 表示 (6.1) 和 (6.2) 导出了伪球曲面的位置向量 $\boldsymbol{r}$ 的表达式 (6.23) 以及它所相应的第一、第二基本形式 (6.10) 和 (6.27). 然而, 第一、第二基本形式 (6.10) 和 (6.27) 的导出只要求矩阵 $g_\mu\in su(2)$ 满足相容性条件 (6.16), 此相容性条件即为一个非线性方程. 需要注意的是, 在计算第一、第二基本形式时, 并没有用到特征函数矩阵 Φ 的性质. 非线性条件 (6.16) 保证存在 Φ 满足线性的 AKNS 系统 (6.1). 利用 (6.23) 式, 这个特征函数矩阵 Φ 被用来计算相应于第一、第二基本形式 I 和 II 的曲面的位置向量 $\boldsymbol{r}$. 这个更一般的结果由下列定理表述.

定理 19 设矩阵 $g_\mu\in su(2)$, $\mu=1,2$ 依赖于一个实参数 λ, 并满足非线性方程

$$g_{1,2}-g_{2,1}+[g_1,g_2]=0. \tag{6.29}$$

那么, 存在矩阵值函数 $\Phi\in SU(2)$ 满足线性方程组

$$\Phi_{,\mu}=g_\mu\Phi. \tag{6.30}$$

进一步, 由

$$r=\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{e}=\Phi^{-1}\Phi_{,\lambda} \tag{6.31}$$

给出的向量值函数 $\boldsymbol{r}$ 定义了 $\mathbb{R}^3$ 上的一个曲面, 它的基本形式是

$$\boxed{\begin{aligned}\mathrm{I}\ &=-2\,\mathrm{Tr}\,(g_{\mu,\lambda}\,g_{\nu,\lambda})\,\mathrm{d}x^\mu\,\mathrm{d}x^\nu,\\ \mathrm{II}\ &=-\frac{1}{\det^{1/2}[g_{1,\lambda},g_{2,\lambda}]}\,\mathrm{Tr}\,([g_{1\lambda},g_{2,\lambda}](g_{\mu,\nu,\lambda}+[g_{\mu,\lambda},g_\nu]))\,\mathrm{d}x^\mu\,\mathrm{d}x^\nu.\end{aligned}} \tag{6.32}$$

由此构造, 在非线性相容性条件 (6.29) 满足时, Mainardi-Codazzi 方程组和 Gauss 方程组均成立. Sym 指出[356], 欧氏空间 $\mathbb{R}^3$ 可以看作为由 Lie 代数 $su(2)\cong$

这个事实可以将定理 19 推广到同半单 Lie 代数相联系的 $m \times m$ 线性问题上, 特别地, 如果 Lie 代数是 $sl(2) \cong o(2,1)$, 那么对应的曲面就嵌入在 2+1 维 Minkowski 空间中. 事实上, KdV 方程和广义相对论中的 Ernst 方程所相应的孤立子曲面就是在 Minkowski 空间中的[353, 358]. 这里, 我们将集中讨论三维欧氏空间 $\mathbb{R}^3$ 中的经典几何.

一个自然的问题是, 哪些方程可以表示成非线性矩阵条件 (6.29). 注意到 sine-Gordon 方程和与它相容的 mKdV 方程的 $su(2)$ 线性表示 (2.32) 以及 NLS 方程的 $su(2)$ 线性表示 (4.87) 具有相同的 "空间" 部分

$$\Phi_x = \frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix} 0 & q \\ r & 0 \end{pmatrix} + \mathrm{i}\lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right]\Phi, \tag{6.33}$$

其中 $r = -\bar{q}$. 这个散射问题被 Ablowitz, Kaup, Newell 和 Segur[2] 用于导出可用反散射变换求解的一大类孤立子方程. 反散射变换是经典 Fourier 变换的一种推广, 它可用来求解一些 1+1 维孤立子方程的初值问题[3]. 上述可积系统中的典型方程有 sine-Gordon 方程 ($r = -q$), KdV 方程 ($r = -1$), mKdV 方程 ($r = \pm q$) 和 NLS 方程 ($r = \pm\bar{q}$). 导出这个著名的 AKNS 系统的过程中, 在散射问题 (6.33) 上还要加上 Φ 随时间的演化, 从而通过相容性条件得到 r 和 q 所满足的非线性方程. 这里, 我们限于讨论 $su(2)$ Lie 代数, 即 $r = -\bar{q}$ 的情形.

在 (6.33) 式上加上时间演化

$$\Phi_t = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \mathrm{i}A(\lambda) & B(\lambda) \\ -\bar{B}(\lambda) & -\mathrm{i}A(\lambda) \end{pmatrix}\Phi, \tag{6.34}$$

其中 A, B 分别是关于实谱参数 λ 的 N 次实值和复值的多项式. 方程组 (6.33) 和 (6.34) 的相容性条件给出非线性方程

$$\begin{aligned} &q_t - B_x - \mathrm{i}qA + \mathrm{i}\lambda B = 0, \\ &2A_x + \mathrm{i}(\bar{q}B - q\bar{B}) = 0. \end{aligned} \tag{6.35}$$

将 A 和 B 展开为

$$A = \sum_{k=0}^{N} A_k\lambda^k, \quad B = \sum_{k=0}^{N} B_k\lambda^k \tag{6.36}$$

就得到

$$B_{N-1} = qA_N, \quad B_N = 0, \quad A_N = A_N(t), \tag{6.37}$$

以及递推关系

$$
\begin{aligned}
&q_t - B_{0x} - \mathrm{i} q A_0 = 0, \\
&2A_{kx} + \mathrm{i}(\bar{q} B_k - q \bar{B}_k) = 0, \qquad k = 0, \cdots, N-1, \\
&B_{k+1x} - \mathrm{i} B_k + \mathrm{i} q A_{k+1} = 0, \qquad k = 0, \cdots, N-2.
\end{aligned} \tag{6.38}
$$

通过积分 $(6.38)_2$ 式得到

$$
2A_k = -\mathrm{i}\partial_x^{-1}(\bar{q} B_k - q \bar{B}_k), \qquad k = 0, \cdots, N-1, \tag{6.39}
$$

再代入 $(6.38)_3$ 式得到向量递推关系

$$
\begin{pmatrix} B_k \\ \bar{B}_k \end{pmatrix} = L \begin{pmatrix} B_{k+1} \\ \bar{B}_{k+1} \end{pmatrix}, \qquad k = 0, \cdots, N-2, \tag{6.40}
$$

其中

$$
L = \mathrm{i} \begin{pmatrix} -\partial_x - \frac{1}{2} q \partial_x^{-1} \bar{q} & \frac{1}{2} q \partial_x^{-1} q \\ -\frac{1}{2} \bar{q} \partial_x^{-1} \bar{q} & \partial_x + \frac{1}{2} \bar{q} \partial_x^{-1} q \end{pmatrix}. \tag{6.41}
$$

矩阵值算子 L 称为*递推算子*, 其原因将在后面看到. 由递推关系 (6.40) 加上条件 $(6.37)_1$ 得到

$$
\begin{pmatrix} B_k \\ \bar{B}_k \end{pmatrix} = A_N L^{N-k-1} \begin{pmatrix} q \\ \bar{q} \end{pmatrix}, \qquad k = 0, \cdots, N-2, \tag{6.42}
$$

这决定了系数 B_k. 剩下的方程 $(6.38)_1$ 以及它的复共轭给出了 q 和 $\bar{q}$ 满足的向量发展型方程

$$
\begin{pmatrix} q \\ -\bar{q} \end{pmatrix}_t = \mathrm{i} A_N L^N \begin{pmatrix} q \\ \bar{q} \end{pmatrix}. \tag{6.43}
$$

方程组 (6.43) 给出了*NLS 梯队*. 在 NLS 方程中与时间无关的部分上反复作用递推算子 L 就得到 N 阶非线性可积方程 (6.43). 需要注意的是, 在每一步中, (6.43) 式给出的都是微分方程, 虽然 L 包含了积分 - 微分算子. 对 $N = 2, A_N = -1$, (6.43) 式给出 NLS 方程

$$
\mathrm{i} q_t + q_{xx} + \frac{1}{2}|q|^2 q = 0. \tag{6.44}
$$

NLS 梯队 (6.43) 中的方程互相都是相容的. 如果我们将特征函数 Φ 看作无穷个"时间" 变量 $t_1 = x, t_2, t_3, \cdots$ 的函数, 即

$$
\Phi = \Phi(t_1, t_2, t_3, \cdots), \tag{6.45}
$$

$$\Phi_{t_n}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} \mathrm{i}A^{(n)} & B^{(n)} \\ -\bar{B}^{(n)} & -\mathrm{i}A^{(n)} \end{pmatrix}\Phi, \quad n=2,3,\cdots, \tag{6.46}$$

加到 NLS 方程线性表示的“空间部分”

$$\Phi_{t_1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} \mathrm{i}\lambda & q \\ -\bar{q} & -\mathrm{i}\lambda \end{pmatrix}\Phi \tag{6.47}$$

上, 其中

$$A^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}A_k^{(n)}\lambda^k, \quad B^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}B_k^{(n)}\lambda^k. \tag{6.48}$$

于是, 由相容性条件

$$\Phi_{t_n t_1}=\Phi_{t_1 t_n} \tag{6.49}$$

得到

$$B_{n-1}^{(n)}=qA_n^{(n)}, \quad B_n^{(n)}=0, \quad A_n^{(n)}=A_n^{(n)}(t) \tag{6.50}$$

以及递推关系

$$\begin{aligned} &q_{t_n}-B_{0,x}^{(n)}-\mathrm{i}qA_0^{(n)}=0, \\ &2A_{kx}^{(n)}+\mathrm{i}(\bar{q}B_k^{(n)}-q\bar{B}_k^{(n)})=0, \qquad k=0,\cdots,n-1, \\ &B_{k+1x}^{(n)}-\mathrm{i}B_k^{(n)}+\mathrm{i}qA_{k+1}^{(n)}=0, \qquad k=0,\cdots,n-2. \end{aligned} \tag{6.51}$$

关系式 (6.50), (6.51) 同 (6.37), (6.38) 在 $N=n=2,3,\cdots$ 时是一致的, 因此导出了 NLS 梯队中的高阶方程. 如果在时间演化方程 (6.46) 中取 $n=2$, $A^{(2)}=-1$, $t_2=t$, 则 (6.47) 式和 (6.46) 式给出了 NLS 方程 (6.44) 的 AKNS 线性表示.

记

$$\mathrm{K}_n[q,\bar{q}]=(-1)^{n+1}\mathrm{i}L^n\begin{pmatrix} q \\ \bar{q} \end{pmatrix}, \quad A_n^{(n)}=(-1)^{n+1}, \tag{6.52}$$

那么可以验证, 在 NLS 梯队中的方程

$$\begin{pmatrix} q \\ -\bar{q} \end{pmatrix}_{t_n}=\mathrm{K}_n[q,\bar{q}] \tag{6.53}$$

成立时, 相容性条件

$$\partial_{t_m}\mathrm{K}_n=\partial_{t_n}\mathrm{K}_m \tag{6.54}$$

成立. 由此, 在 NLS 梯队 (6.53) 成立时, 剩下的相容性条件

也成立. 用孤立子理论的语言来说[271], 流 K_n 是交换的, 并且 K_n 表示 NLS 方程 (6.44) 的对称. 在 $n=1$ 这一最简单的情形得到的是平移对称

$$q_{t_1} = q_x. \tag{6.56}$$

mKdV 梯队

在 NLS 梯队 (6.43) 中考虑特殊的情形: q 是实的且 N 是奇数. 这给出了 mKdV 梯队, 我们将在 6.3 节中详细讨论此梯队. 特别地, 在 $N=3$, $A_N=1$ 时 (6.43) 式给出 mKdV 方程

$$q_t + q_{xxx} + \frac{3}{2}q^2 q_x = 0. \tag{6.57}$$

NLS 基本形式

在定理 19 中, 带有空间部分 (6.47) 和时间演化 (6.46) 的 AKNS 线性表示是以 $su(2)$ 形式写出的. 于是, NLS 梯队和 mKdV 梯队自然同 $\mathbb{R}^3$ 中的曲面相联系. 特别地, $n=2$, $A_2=-1$ 时的时间演化所对应的 NLS 方程 (6.44) 为

$$\Phi_{t_2} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -\mathrm{i}\lambda^2 + \frac{1}{2}\mathrm{i}|q|^2 & -\lambda q + \mathrm{i}q_x \\ \lambda\bar{q} + \mathrm{i}\bar{q}_x & \mathrm{i}\lambda^2 - \frac{1}{2}\mathrm{i}|q|^2 \end{pmatrix}\Phi, \tag{6.58}$$

其中 $t_2 = t$. 将 (6.47) 式和 (6.58) 式给出的 $su(2)$ 矩阵 g_μ 代入基本形式的表达式 (6.32) 得到

$$\begin{aligned} \mathrm{I} &= \mathrm{d}x^2 - 4\lambda\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + (\kappa^2 + 4\lambda^2)\,\mathrm{d}t^2, \\ \mathrm{II} &= -\kappa\,\mathrm{d}x^2 + 2\kappa(\tau+\lambda)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + [\kappa_{xx} - \kappa(\tau+\lambda)^2]\,\mathrm{d}t^2, \end{aligned} \tag{6.59}$$

其中利用了常用的变换

$$q = \kappa\exp(\mathrm{i}\partial_x^{-1}\tau). \tag{6.60}$$

于是, NLS 曲面的全曲率为

$$\mathcal{K} = -\frac{\kappa_{xx}}{\kappa}, \tag{6.61}$$

这与 (4.29) 式一致.

(6.59) 式给出的第一、第二基本形式同 4.1 节中用几何方法给出的相同, 也就是 (4.26) 式和 (4.28) 式加上保持 NLS 方程不变的变换 (4.80). 于是, 曲线以速度 $\boldsymbol{r}_t = \kappa\boldsymbol{b}$ 扫出的曲面同定理 19 给出的 NLS 曲面相同.

本节中, 给出了具有 $su(2)$ 线性表示的非线性方程与三维欧氏空间中曲面的自

球曲面和 Hasimoto 曲面. 这时, 曲面的坐标曲线是渐近曲线或平行的测地线. 下一节将详细讨论同规范变换和反向变换相联系的孤立子曲面上的坐标系, 特别是有些孤立子曲面可以由圈孤立子曲线运动时扫出.

练　习

1. (a) 证明交换关系 (6.17).

(b) 证明同 (6.22) 式相联系的位置向量 $\boldsymbol{r}$ 的分量 X^j 满足

$$X^j = \mathrm{i}\,\mathrm{Tr}(\Phi^{-1}\Phi_{,\lambda}\sigma_j), \qquad j = 1, 2, 3.$$

(c) 利用同构 $so(3) \cong su(2)$ 验证

$$\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{L} = \hat{\Phi}^{-1}\hat{\Phi}_{,\lambda}, \tag{6.62}$$

其中对应于 Φ 的 $SO(3)$ 矩阵 $\hat{\Phi}$ 由附录 A 给出.

(d) 利用 Sym-Tafel 关系 (6.22) 证明同 NLS 方程的单孤立子解 (4.23) 相联系的曲面的位置向量 $\boldsymbol{r}$ 由 (4.25) 式给出.

2. (a) 若 A 和 B 是 $su(2)$ 中的矩阵, 利用分解 (6.12) 证明相应的向量 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 满足

$$\begin{aligned} &\text{(i)} \qquad \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = -2\,\mathrm{Tr}\,(AB), \\ &\text{(ii)} \qquad |\boldsymbol{A}|^2 = 4 \det A, \\ &\text{(iii)} \qquad (\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) \cdot \boldsymbol{e} = [A, B]. \end{aligned} \tag{6.63}$$

(b) 证明曲面的单位法向 $\boldsymbol{N}$ 在用矩阵表示时为

$$N = \boldsymbol{N} \cdot \boldsymbol{e} = \frac{[r_{,1}, r_{,2}]}{2 \det^{1/2}[r_{,1}, r_{,2}]}. \tag{6.64}$$

导出 $h_{\mu\nu}$ 满足的 $(6.27)_2$ 式, 并由此得到伪球曲面的第二基本形式 (6.28).

3. (a) 推导 (6.42) 式和 (6.43) 式.

(b) 证明当 $N = 2$, $A_N = -1$ 时, (6.43) 式给出 NLS 方程

$$\mathrm{i}q_t + q_{xx} + \frac{1}{2}|q|^2 q = 0.$$

4. 利用相容性条件 (6.49) 导出 (6.50) 式和 (6.51) 式.

5. 证明在 $m = 1$, $n = 2$ 时, 如果记 $t_1 = x$, $t_2 = t$, 则在 NLS 方程

$$\begin{pmatrix} q \\ \end{pmatrix} = -\mathrm{i}L^2 \begin{pmatrix} q \\ \end{pmatrix}$$

成立时, 条件 (6.54) 成立.

6. (a) 用定理 19 重新推导 NLS 曲面的第一、第二基本形式 (6.59).

(b) 由第一、第二基本形式 (4.26) 和 (4.28) 并利用变换 (4.80) 导出 $s = x$ 时的基本形式 (6.59).

6.2 NLS 特征函数梯队, 几何性质和 Miura 变换

本节中将证明, 与 NLS 梯队相联系的孤立子曲面的位置向量本身满足一个可积梯队, 即势 NLS 特征函数梯队, 从而 NLS 特征函数梯队可以从 NLS 梯队的 AKNS 线性表示通过规范变换产生. 最后, 对于用内蕴导数给出的曲线的曲率和挠率的经典表示, 我们将它解释为从 NLS 梯队到它的特征函数梯队的 Miura 变换.

6.2.1 作为特征函数方程解的孤立子曲面的位置向量

Miura 在 1968 年发现了 KdV 和 mKdV 方程之间的联系[262]. 这个 Miura 变换的存在表明, mKdV 方程可以看作 KdV 方程的特征函数方程. Miura 变换的标准导出方法如下. KdV 方程

$$u_t = u_{xxx} - 6uu_x \tag{6.65}$$

是下列*Lax* 对

$$\begin{aligned} \lambda\psi &= \psi_{xx} - u\psi, \\ \psi_t &= 4\psi_{xxx} - 6u\psi_x - 3u_x\psi \end{aligned} \tag{6.66}$$

的相容性条件[228]. 在 $\lambda = 0$ 时, u 可用特征函数 ψ 表示为

$$u = v_x + v^2, \tag{6.67}$$

其中 $v = \psi_x/\psi$, 将 u 代入 $(6.66)_2$ 式就得到 mKdV 方程

$$v_t = v_{xxx} - 6v^2 v_x. \tag{6.68}$$

由于方程 (6.68) 表示了特征函数 ψ 所满足的方程, 它通常被称为 KdV 方程的**特征函数方程**. 如果 v 是这个 mKdV 方程的解, 则由*Miura* 变换 (6.67) 给出的 u 就满足 KdV 方程 (6.65).

Miura 变换可用于生成 KdV 方程的一系列守恒律. 对 Miura 型变换的推广以及将它解释为规范变换的逆变换方面有很多研究[15, 16, 280]. 另一方面, Konopelchenko 给出了与孤立子方程相联系的特征函数方程可积性的一般研究[206].

这里, 我们讨论 NLS 梯队 (6.43) 的 Miura 型变换的几何解释. 首先, 在线性表示 (6.33), (6.34) 中消去函数 q, 得到特征函数 Φ 满足的非线性方程. 同导出经典

$$S = \Phi_0^{-1}\sigma_3\Phi_0, \quad V_k = \Phi_0^{-1}\begin{pmatrix} A_k & -\mathrm{i}B_k \\ \mathrm{i}\bar{B}_k & -A_k \end{pmatrix}\Phi_0 \tag{6.69}$$

$(k = 0, \cdots, N)$, 那么

$$S^2 = \mathbb{1}, \quad S^\dagger = S, \tag{6.70}$$

这是由于 $\Phi_0^\dagger\Phi_0 = \mathbb{1}$, 即 $\Phi_0 \in SU(2)$, 并且成立

$$V_N = A_N(t)S. \tag{6.71}$$

这里, $S^\dagger$ 表示 S 的复共轭转置, 即对 $S = (S_{ij})$, $S^\dagger = (\bar{S}_{ji})$.

矩阵 V_k 满足的递推关系可如下导出. 由 $(6.69)_2$ 式和谱问题 (6.33) 以及递推关系 (6.38),

$$\begin{aligned} V_{kx} &= \Phi_0^{-1}\left\{\begin{pmatrix} A_{kx} & -\mathrm{i}B_{kx} \\ \mathrm{i}\bar{B}_{kx} & -A_{kx} \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix} A_k & -\mathrm{i}B_k \\ \mathrm{i}\bar{B}_k & -A_k \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & q \\ -\bar{q} & 0 \end{pmatrix}\right]\right\}\Phi_0 \\ &= \Phi_0^{-1}\begin{pmatrix} 0 & B_{k-1} \\ \bar{B}_{k-1} & 0 \end{pmatrix}\Phi_0, \quad k = 1, \cdots, N-1. \end{aligned} \tag{6.72}$$

将 (6.72) 式的右端用 V_{k-1} 表示, 就有

$$V_{k-1} = -\mathrm{i}SV_{kx} + \frac{1}{2}\operatorname{Tr}(SV_{k-1})\,S, \quad k = 1, \cdots, N-1. \tag{6.73}$$

用 S 和 S_x 左乘 (6.73) 式并求迹得到

$$\begin{aligned} &\operatorname{Tr}(SV_{kx}) = 0, \\ &\operatorname{Tr}(S_xV_{k-1}) = -\mathrm{i}\operatorname{Tr}(S_xSV_{kx}) = \mathrm{i}\operatorname{Tr}(SS_xV_{kx}), \end{aligned} \tag{6.74}$$

从而

$$[\operatorname{Tr}(SV_{k-1})]_x = \mathrm{i}\operatorname{Tr}(SS_xV_{kx}), \quad k = 2, \cdots, N-1. \tag{6.75}$$

由此, 有

$$V_{k-1} = RV_k, \tag{6.76}$$

其中线性算子 R 满足

$$R = -\mathrm{i}S[\partial_x - \frac{1}{2}\partial_x^{-1}\operatorname{Tr}(SS_x\partial_x\,\cdot)]. \tag{6.77}$$

另一方面, S 的定义 $(6.69)_1$ 式给出守恒律

$$S_t = \Phi_0^{-1}\begin{pmatrix} 0 & B_0 \\ \cdots & \cdots \end{pmatrix}\Phi_0 = V_{1x} \tag{6.78}$$

而由 (6.76) 式, 有

$$V_1 = R^{N-1}V_N = R^{N-1}A_N(t)S. \tag{6.79}$$

于是, 我们得到了 S 满足的一个非线性矩阵方程

$$S_t = A_N(R^{N-1}S)_x. \tag{6.80}$$

根据构造, 上述方程是 NLS 梯队 (6.43) 中一个方程的特征函数方程, 因此 (6.80) 式称为*NLS 特征函数梯队*. 开始的两个方程 ($A_2 = -1, A_3 = 1$) 是

$$\begin{aligned} &\mathrm{i}S_t + (SS_x)_x = 0, \\ &S_t + S_{xxx} + \frac{3}{2}\left(SS_x^2\right)_x = 0. \end{aligned} \tag{6.81}$$

方程 (6.81) 也可用向量

$$S = \boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{\sigma}, \quad \boldsymbol{S}^2 = 1 \tag{6.82}$$

表示为向量方程

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{S}_t + \boldsymbol{S}\times\boldsymbol{S}_{xx} = \boldsymbol{0}, \\ &\boldsymbol{S}_t + \boldsymbol{S}_{xxx} + \frac{3}{2}\left(\boldsymbol{S}_x^2\boldsymbol{S}\right)_x = \boldsymbol{0}. \end{aligned} \tag{6.83}$$

上一节中, 我们知道由定理 19 给出的 NLS 方程所相应的"孤立子曲面"可以等同于曲线按 $\boldsymbol{r}_t = \kappa\boldsymbol{b}$ 演化所产生的 Hasimoto 曲面. 上述曲线的切向量 $\boldsymbol{t}$ 满足 Heisenberg 自旋方程 (4.38). 由于它同 NLS 特征函数方程 $(6.83)_1$ 相同 (相差一符号), 我们自然希望知道 $\boldsymbol{S}$ 与位置向量 $\boldsymbol{r}$ 之间的关系. 引入记号 $r_0 = r|_{\lambda=0}$, 由位置矩阵 (6.31) 得到

$$r_{0x} = \frac{1}{2}\mathrm{i}S, \quad r_{0t} = \frac{1}{2}\mathrm{i}V_1. \tag{6.84}$$

因此, 位置矩阵就是同守恒律 (6.78) 相联系的势. 由分解 (6.31) 得到, (6.84) 式用向量形式表示就是

$$\boldsymbol{r}_{0x} = -\boldsymbol{S}, \quad \boldsymbol{r}_{0t} = -\boldsymbol{V}_1, \tag{6.85}$$

其中

$$V_1 = \boldsymbol{V}_1\cdot\boldsymbol{\sigma}. \tag{6.86}$$

(6.85) 式给出了下列重要结论.

定理 20 与 NLS 梯队 (6.43) 相联系的孤立子曲面的位置向量 $\boldsymbol{r}_0$ 满足势 *NLS 特征函数梯队*.

势 NLS 特征函数梯队的前两个是

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{r}_{0t} = \boldsymbol{r}_{0x}\times\boldsymbol{r}_{0xx}, \\ &-\boldsymbol{r}_{0t} = \boldsymbol{r}_{0xxx} + \frac{3}{2}\boldsymbol{r}_{0xx}^2\boldsymbol{r}_{0x}, \end{aligned} \tag{6.87}$$

6.2.2 Serret-Frenet 方程和 NLS 梯队

从几何角度来看, $(6.85)_1$ 式表示, $-\boldsymbol{S}$ 是由 $\boldsymbol{r}_0$ 确定的曲面上坐标曲线 $t=$ 常数的切向量. 这个结论可以用 4.1 节中通过从法向运动导出 NLS 方程时的 $\{\boldsymbol{t},\boldsymbol{n},\boldsymbol{b}\}$ 表示出来. 由附录 A, 如果 Φ_0 是散射问题 (6.33) 在 $\lambda=0$ 时的一个解, 那么 $SO(3)$ 矩阵

$$\hat{\Phi}_0=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{C}\end{pmatrix}=\left(-2\operatorname{Tr}\left(\Phi_0^{-1}e_i\Phi_0e_j\right)\right)_{i,j=1,2,3} \tag{6.88}$$

满足线性方程组

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{C}\end{pmatrix}_x=\begin{pmatrix}0 & 0 & -\kappa\cos\sigma\\ 0 & 0 & \kappa\sin\sigma\\ \kappa\cos\sigma & -\kappa\sin\sigma & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{C}\end{pmatrix}, \tag{6.89}$$

其中正交向量组 $\{\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}\}$ 包括了 $\hat{\Phi}_0$ 的行向量,

$$q=\kappa\exp(\mathrm{i}\sigma). \tag{6.90}$$

利用

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}'\\ \boldsymbol{B}'\\ \boldsymbol{C}'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0 & -1\\ -\cos\sigma & \sin\sigma & 0\\ \sin\sigma & \cos\sigma & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{C}\end{pmatrix}, \tag{6.91}$$

其中 $\sigma_x=\tau$, 将 $\{\boldsymbol{t},\boldsymbol{n},\boldsymbol{b}\}$ 等同于 $\{\boldsymbol{A}',\boldsymbol{B}',\boldsymbol{C}'\}$, 并取 x 为弧长, 则我们重新得到了通常的 Serret-Frenet 关系式. 比较 S 的定义 $(6.69)_1$ 式以及变换 (6.88) 式, 有 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{S}=-\boldsymbol{t}$.

注意到 NLS 特征函数梯队 $(6.80)_{N=1,2,\cdots}$ 可以从 NLS 梯队的 AKNS 线性表示 (6.33), (6.34) 出发用*规范变换*得到. 通过规范变换

$$\Phi=\Phi_0\Phi' \tag{6.92}$$

引入新的特征函数矩阵 Φ', 由 (6.33), (6.34) 式, Φ' 满足

$$\Phi'_x=\frac{1}{2}\mathrm{i}\lambda S\Phi',\quad \Phi'_t=\frac{1}{2}\mathrm{i}\sum_{k=1}^{N}\lambda^kV_k\Phi'. \tag{6.93}$$

从而, NLS 特征函数梯队 (6.80) 可以通过线性表示 (6.93) 的相容性条件得到. 由于规范矩阵不依赖于谱参数 λ, 位置向量在规范变换 (6.92) 下不变, 即

于是, 对线性表示 (6.93) 应用定理 19 得到相同的第一、第二基本形式, 但现在用 $\boldsymbol{S}$ 而不是 q 表示. 事实上, 用 Serret-Frenet 关系容易验证

$$\kappa = |\boldsymbol{S}_x|, \quad \tau = \frac{\boldsymbol{S}_x \cdot (\boldsymbol{S} \times \boldsymbol{S}_{xx})}{\boldsymbol{S}_x^2} \ . \tag{6.95}$$

这些关系正是 $\mathbb{R}^3$ 中曲线的曲率和挠率的定义. 考虑到 (6.60) 式, 它们表示了 NLS 梯队和 NLS 特征函数梯队之间的一个 Miura 型变换.

6.3 反向变换和圈孤立子

本节中, 将引入反向变换, 通过圈孤立子以及孤立子曲面的生成子指出它在几何中的重要性. 上节中我们已经知道, 利用规范变换可以将孤立子曲面的位置向量解释为特征函数方程的一个解. 另一方面, 反向变换表示孤立子曲面上一个自然的坐标变换. 在反向坐标下, 圈孤立子既是特征函数方程的解, 也是相应孤立子曲面的生成子. 在生成与 sine-Gordon 方程相联系的伪球孤立子曲面时已见到过圈状的孤立子. Sym[355] 从孤立子曲面的角度对圈孤立子给出了一般的讨论. 在这里, 我们将看到, 反向变换给出了 NLS 梯队相联系的孤立子曲面的自然参数化. 同规范变换 (6.92) 不同的是, 反向变换改变了第一、第二基本形式的系数 $\{E, F, G\}$ 和 $\{e, f, g\}$, 但不改变曲面本身. 在 6.4 节中, 我们将看到圈孤立子和 Dym 梯队在某些反向变换下不变, 这个反向不变性可以用来生成相应可积梯队的自 Bäcklund 变换.

6.3.1 反向变换和圈孤立子方程

我们已经知道, 相应于 NLS 梯队的孤立子曲面 Σ 的位置向量 $\boldsymbol{r}_0$ 满足势 NLS 特征函数梯队. 这时, 曲面 Σ 用独立变量 x 和 t 来参数化, 即

$$\boldsymbol{r}_0 = \begin{pmatrix} X^1 \\ X^2 \\ X^3 \end{pmatrix} (x, t), \tag{6.96}$$

其中 $\boldsymbol{r}_0$ 满足势 NLS 特征函数梯队中的一个方程. 然而, 为了理解如何从圈孤立子的运动生成孤立子曲面 Σ, 比较方便的方法是将独立变量 x 换为 $\boldsymbol{r}_0$ 的一个分量 X^i. 这引出了反向变换的概念, 进而导出了圈孤立子方程.

利用 (6.82) 式的分解、

$$V_1 = \boldsymbol{V}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma} \tag{6.97}$$

以及 (6.85) 式中隐含的守恒律, 有

$$\mathrm{d}X^i = S_i \,\mathrm{d}x - V_i \,\mathrm{d}t, \quad i = 1, 2, 3 \tag{6.98}$$

作变量代换 $(x,t) \to (X^i,T)$, 使之满足

$$\mathrm{d}X^i = -S_i \mathrm{d}x - V_{1i}\mathrm{d}t, \quad \mathrm{d}T = \mathrm{d}t \tag{6.99}$$

或等价的

$$\partial_x = -S_i \partial_{X^i}, \quad \partial_t = \partial_T - V_{1i}\partial_{X^i}, \tag{6.100}$$

其中 i 为 $1,2,3$ 之一, 这个变换称为反向变换[295]. 对于 NLS 梯队, 取新的独立变量为 $Z = X^3$ 和 $T = t$. 需要强调的是, 这个变量代换不改变孤立子曲面 Σ. 虽然第一、第二基本形式的系数 $\{E,F,G\}$ 和 $\{e,f,g\}$ 变化了, 但基本形式本身并不变.

在反向变换

$$\mathrm{d}Z = -S_3 \mathrm{d}x - V_{13}\mathrm{d}t, \quad \mathrm{d}T = \mathrm{d}t \tag{6.101}$$

下, 表示 NLS 特征函数梯队可积性的 (6.85) 式成为

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}_0}{\partial Z} = \frac{\boldsymbol{S}}{S_3}, \quad \frac{\partial \boldsymbol{r}_0}{\partial T} = -\boldsymbol{V}_1 + V_{13}\frac{\partial \boldsymbol{r}_0}{\partial Z} = -\boldsymbol{V}_1 + \frac{V_{13}}{S_3}\boldsymbol{S}. \tag{6.102}$$

(6.102) 式中, Z 分量是恒等式. 剩下的 X, Y 分量, 或等价的

$$\mathrm{d}X = \mathrm{d}X^1 = -S_1\,\mathrm{d}x - V_{11}\,\mathrm{d}t, \quad \mathrm{d}Y = \mathrm{d}X^2 = -S_2\,\mathrm{d}x - V_{12}\,\mathrm{d}t \tag{6.103}$$

给出

$$\begin{aligned} \frac{\partial X}{\partial Z} &= \frac{S_1}{S_3}, \qquad \frac{\partial X}{\partial T} = \frac{S_1}{S_3}\,V_{13} - V_{11}, \\ \frac{\partial Y}{\partial Z} &= \frac{S_2}{S_3}, \qquad \frac{\partial Y}{\partial T} = \frac{S_2}{S_3}\,V_{13} - V_{12}, \end{aligned} \tag{6.104}$$

其中用到了

$$\boldsymbol{S}^2 = S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 = 1. \tag{6.105}$$

于是

$$S_1 = \frac{\partial X}{\partial Z}\,S_3, \quad S_2 = \frac{\partial Y}{\partial Z}\,S_3, \tag{6.106}$$

其中

$$S_3 = \pm 1 \Big/ \sqrt{1 + \left(\frac{\partial X}{\partial Z}\right)^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial Z}\right)^2}. \tag{6.107}$$

进一步, 由 (6.79) 式和 $\partial_x = -S_3\partial_Z$, $\boldsymbol{V}_1$ 可以用 $\boldsymbol{S}$ 及其关于 Z 的导数表示. 从而, (6.104) 式给出了 X 和 Y 满足的发展方程

$$\frac{\partial X}{\partial T} = f(X, Y, X_Z, Y_Z, \cdots), \quad \frac{\partial Y}{\partial T} = G(X, Y, X_Z, Y_Z, \cdots) \tag{6.108}$$

这族非线性方程通过反向变换同 NLS 特征函数梯队 (6.80) 相联系, 它表示 Wadati 等[376] 给出的一类 "新可积系统". 通过复合反向变换和规范变换可给出一般的 AKNS 系统和 WKI 系统的联系[316].

下面将给出 WKI 系统 (6.108) 的几何解释. 对固定的 "时间" T, 方程组 (6.108) 的任一解给出了 $\mathbb{R}^3$ 中用 Z 分量作为参数的一条曲线 (X, Y, Z). 当时间 T 变化时, 这些曲线扫出一个曲面 Σ, 由定理 19, 这个曲面同 NLS 梯队 (6.43) 相联系. 进一步, 由于 (6.108) 式给出了 Σ 的位置向量 $\boldsymbol{r}_0$ 所满足的发展方程, 非线性方程的任一孤立子性质可以从曲面上 "看出". 说明此问题的最简单例子是将上述过程应用于势 mKdV 方程经反向变换得到一个非线性方程. 我们知道 mKdV 梯队是 NLS 梯队中取奇数阶并取实的 q 得到的. 于是, 可假设 S 是实矩阵, 并有参数化

$$\boldsymbol{S} = \begin{pmatrix} \sin\theta \\ 0 \\ \cos\theta \end{pmatrix}. \tag{6.109}$$

代入 NLS 特征函数方程 $(6.83)_2$, 就得到势 mKdV 方程

$$\theta_t + \theta_{xxx} + \frac{1}{2}\theta_x^3 = 0, \tag{6.110}$$

而反向关系 (6.98) 给出

$$\begin{aligned} \mathrm{d}X^1 = \mathrm{d}X &= -\sin\theta\,\mathrm{d}x + \left(\cos\theta\,\theta_{xx} + \frac{\theta_x^2}{2}\sin\theta\right)\mathrm{d}t, \\ \mathrm{d}X^3 = \mathrm{d}Z &= -\cos\theta\,\mathrm{d}x + \left(-\sin\theta\,\theta_{xx} + \frac{\theta_x^2}{2}\cos\theta\right)\mathrm{d}t. \end{aligned} \tag{6.111}$$

在反向变换 (6.101), 即

$$\mathrm{d}Z = -\cos\theta\,\mathrm{d}x - (\theta_{xx}\sin\theta - \frac{1}{2}\theta_x^2\cos\theta)\mathrm{d}t, \quad \mathrm{d}T = \mathrm{d}t \tag{6.112}$$

下, $(6.104)_{1.2}$ 式给出

$$X_Z = \tan\theta, \quad X_T = (\sin\theta)_{ZZ}, \tag{6.113}$$

由此得到圈孤立子方程[376]

$$X_T = \pm\left(\frac{X_Z}{\sqrt{1 + X_Z^2}}\right)_{ZZ}. \tag{6.114}$$

由 $(6.104)_{3,4}$ 式得到 $Y = Y_0$, 其中 Y_0 是积分常数. 于是, 相应于 mKdV 方程的孤立子曲面为

$$\boldsymbol{r}_0 = \begin{pmatrix} X(Z,T) \\ Y_0 \\ \end{pmatrix}, \tag{6.115}$$

其中 $X = X(Z,T)$ 是圈孤立子方程的一个解. 这样, 相应于零谱参数的 mKdV 方程, 参数化 (6.109) 给出的孤立子曲面 $\Sigma : \boldsymbol{r}_0 = \boldsymbol{r}_0(Z,T)$ 是平面. 在 6.4 节中将看到, 整个 mKdV 梯队可以用平面中曲线的特殊运动来生成 (参见 2.4 节).

6.3.2 圈孤立子

方程 (6.114) 之所以称为圈孤立子方程, 是因为它的孤立子解具有圈状特征. 方程 (6.114) 的单圈孤立子解很容易从势 mKdV 方程 (6.110) 的单孤立子解

$$\theta = 4\arctan e^{\beta x-\beta^3 t} \tag{6.116}$$

得到. 将 (6.116) 式代入 (6.111) 式, 积分得

$$\boldsymbol{r}_0 = \begin{pmatrix} -(2/\beta)\operatorname{sech}(\beta x-\beta^3 t) \\ 0 \\ -x+(2/\beta)\tanh(\beta x-\beta^3 t) \end{pmatrix}, \tag{6.117}$$

这里略去了积分常数. 于是圈孤立子方程 (6.114) 的对应解为

$$\begin{aligned} X &= -(2/\beta)\operatorname{sech}\sigma, \\ Z &= -\beta^2 T - \sigma/\beta + (2/\beta)\tanh\sigma, \end{aligned} \tag{6.118}$$

其中 $\sigma = \beta x - \beta^3 t,\ -\infty < \sigma < \infty.$

在 T 为常数时, (6.118) 式决定了包含一个圈的平面曲线. 图 6.1 描述了 XZ 平面中的曲线 $T=0$. 当 T 变化时, 孤立子曲面 (6.117) 由圈孤立子曲线沿负 Z 方向以速度 β^2 运动所扫出. 由于圈的 “振幅” 为 $2/\beta$, 我们可以得到一个有趣的性质: 小的圈孤立子运动得比大的圈孤立子快.

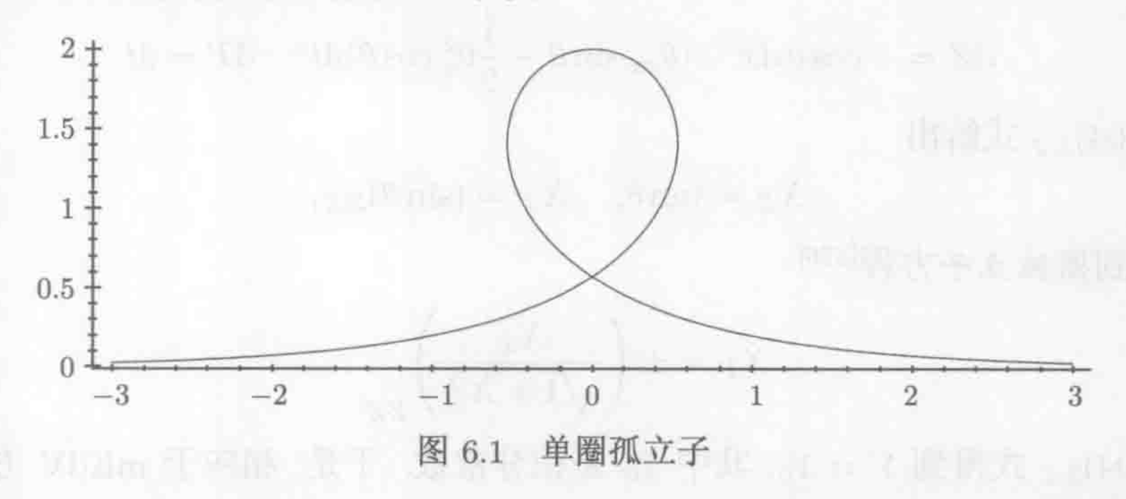


图 6.1　单圈孤立子

Konno 和 Jeffrey[180, 202] 用反散射变换研究了 N 圈孤立子的相互作用性质. Dmitrieva[106] 用反向变换得到了 N 圈孤立子的参数表示. Sym[355] 在孤立子曲面层次上重复利用 Bäcklund 变换得到了 N- 圈孤立子. 圈孤立子的相互作用见图 6.2

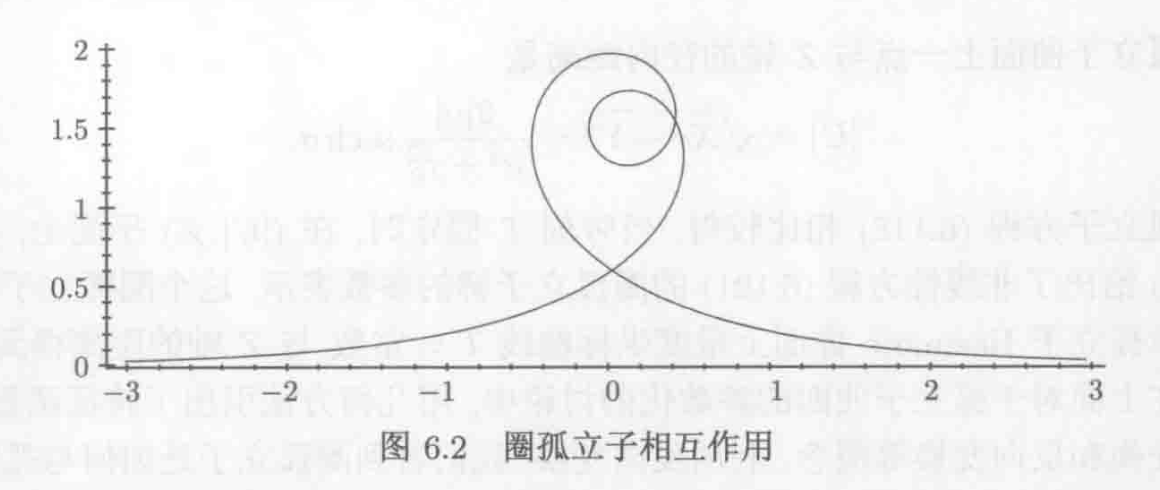


图 6.2 圈孤立子相互作用

一个自然的问题是, 复的 NLS 梯队是否有圈孤立子存在呢? 为此, 考虑 WKI 系统中的一个方程, 它通过反向变换联系于 NLS 特征函数梯队中的第一个方程, 即 Heisenberg 自旋方程 $(6.83)_1$

$$\boldsymbol{S}_t + (\boldsymbol{S} \times \boldsymbol{S}_x)_x = \boldsymbol{0}, \tag{6.119}$$

而它是

$$\boldsymbol{r}_{0x} = -\boldsymbol{S}, \quad \boldsymbol{r}_{0t} = -\boldsymbol{V}_1 = \boldsymbol{S} \times \boldsymbol{S}_x \tag{6.120}$$

的相容性条件. 引入分解 $U = X + \mathrm{i}Y$, (6.104), (6.105) 式将由反向变换联系于 Heisenberg 自旋方程 (6.119) 的 WKI 系统中的方程变为单一的复方程

$$U_T = \mp \mathrm{i} \left(\frac{U_Z}{\sqrt{1 + |U_Z|^2}} \right)_Z. \tag{6.121}$$

方程 (6.121) 的解 $U = U(Z, T)$ 通过

$$\boldsymbol{r}_0 = \begin{pmatrix} \Re(U) \\ \Im(U) \\ Z \end{pmatrix} \tag{6.122}$$

给出了 NLS 方程的孤立子曲面的参数化. 由此, 马上就可以得到 WKI 方程 (6.121) 的解, 它对应于 4.1 节中导出的 NLS 方程的单孤立子解 (4.23). 代入反向变换关系 (6.98) 并积分得

$$\boldsymbol{r}_0 = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dfrac{2\nu}{\nu^2 + \tau_0^2} \operatorname{sech} \sigma \cos \left[\dfrac{\tau_0}{\nu} \sigma + (\nu^2 + \tau_0^2) T \right] \\ -\dfrac{2\nu}{\nu^2 + \tau_0^2} \operatorname{sech} \sigma \sin \left[\dfrac{\tau_0}{\nu} \sigma + (\nu^2 + \tau_0^2) T \right] \\ \dfrac{\sigma}{\nu} + 2\tau_0 T - \dfrac{2\nu}{\nu^2 + \tau_0^2} \tanh \sigma \end{pmatrix}, \tag{6.123}$$

孤立子曲面上一点与 Z 轴的径向距离是

$$|U| = \sqrt{X^2 + Y^2} = \frac{2|\nu|}{\nu^2 + \tau_0^2} \operatorname{sech} \sigma.$$

同圈孤立子方程 (6.118) 相比较得, 当时刻 T 固定时, 在 $(|U|, Z)$ 平面上, 关系式 (6.123) 给出了非线性方程 (6.121) 的圈孤立子解的参数表示. 这个圈孤立子曲线可以在单孤立子 Hasimoto 曲面上量度坐标曲线 $T =$ 常数 与 Z 轴的距离得到.

在上面对于孤立子曲面的参数化的讨论中, 用几何方法引出了特征函数方程、规范变换和反向变换等概念. 利用反向变换, 我们看到圈孤立子是如何与孤立子曲面自然联系的. 下一节中, 将看到 Dym 型可积梯队在反向型变换下的不变性.

练 习

1. (a) 验证 NLS 特征函数梯队 (6.80) 的前两个方程由 (6.81) 式给出.

(b) 利用向量表示 (6.82) 导出向量方程 (6.83).

2. 导出 (6.84) 式.

3. (a) 对 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} \end{pmatrix}$, 导出线性方程 (6.89).

(b) 证明 $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{S}$.

4.(a) 利用矩阵 S 的定义 $(6.69)_1$ 以及散射问题 (6.33) 得到联系 NLS 梯队 (6.43) 和 NLS 特征函数梯队 (6.80) 的 Miura 型变换 (6.95).

(b) 用定理 19 导出 Heisenberg 自旋方程 $(6.83)_1$ 的第一、第二基本形式. 证明 Miura 型变换 (6.95) 将它们变为 NLS 方程的基本形式 (6.59).

5. 验证位置向量 $\boldsymbol{r}_0$ 的表达式 (6.117).

6. (a) 验证最低阶的 WKI 方程 (6.121) 通过反向变换同 Heisenberg 自旋方程 (6.119) 相联系.

(b) 在什么条件下平面曲线

$$\sigma \to (\operatorname{sech} \sigma, \alpha\sigma + \beta \tanh \sigma)$$

包含圈? 给出 (6.123) 式中参数 ν 和 τ_0 所满足的条件, 使得非线性方程 (6.121) 的解表示一个圈孤立子.

6.4 Dym 梯队, mKdV 梯队, KdV 梯队及其联系

反向变换有着漫长的历史, 并有很多应用. 1928 年, Haar[156] 在一篇关于共轭

十年以后, Bateman[25] 引入了一个相关的但约束更少的变换, 后来就被称为反向关系. 这类不变性在亚音速气体动力学的近似理论中的应用最早在 1939 年由 Tsien 给出[367].

文献 [22] 中, 通过将 Martin 表示的气体动力学方程组看作一个 Monge-Ampère 方程组[242], 指出 Bateman 的反向关系构成了一个 Bäcklund 变换. 事实上, 不论是共轭关系还是反向关系, 它们都可以用一类重要的矩阵 Bäcklund 变换导出, 在气体动力学中首先由 Loewner 给出[237].

非线性气体动力学方程组和磁流体动力学方程组在反向变换下的不变性已有了很多研究[286,295−297,304,306,307]. 在实际问题中, 反向变换对静态问题和移动边界问题, 特别是土壤力学和非线性热传导中的一些问题有重要应用[56, 57, 266, 298][299, 301, 302, 310, 315, 317]. Meirmanov 等的著作[258] 对反向型变换及其在连续介质力学中的应用有详细的介绍.

反向变换被 Ferapontov 用于对流体力学型方程组的分类中[124−126,132]. 从几何来看, 弱非线性 Hamilton 流体力学型方程组在允许反向变换下的分类完全等价于 Dupin 超曲面在允许 Lie 球变换下的分类[127, 130]. 最近, 文献 [5] 中揭示了经典线汇理论同在反向变换下不变的 Temple 类守恒律方程组[362] 之间的联系.

在此, 我们只关注反向变换在孤立子理论中的作用. 我们已经看到可积方程之间的联系所自然产生的反向变换, 例如势 mKdV 方程和圈孤立子方程, 以及 Heisenberg 自旋方程和 WKI 方程组中的第一个方程. 最近发现, 可积 Camassa-Holm 方程通过反向变换同 KdV 梯队的第一个负流相联系[174]. 本节中, 将要建立反向型变换下圈孤立子和 Dym 梯队的不变性.

6.4.1 反向变换下的不变性以及一类平面曲线运动

我们先罗列一些基本结果[195]:

定理 21 反向变换

$$\left.\begin{aligned} &\mathrm{d}x' = T\,\mathrm{d}x - F\,\mathrm{d}t, \quad \mathrm{d}t' = \mathrm{d}t, \\ &T' = \frac{1}{T}, \quad F' = -\frac{F}{T}, \\ &0 < |T| < \infty \end{aligned}\right\}\mathcal{R} \tag{6.124}$$

将守恒律

$$\frac{\partial}{\partial t}\{T(\partial/\partial x;\partial/\partial t;u)\} + \frac{\partial}{\partial x}\{F(\partial/\partial x;\partial/\partial t;u)\} = 0 \tag{6.125}$$

变为守恒律

$$\frac{\partial T'}{\partial t'} + \frac{\partial F'}{\partial x'} = 0, \tag{6.126}$$

反向变换 (6.124) 满足 $\mathcal{R}^2 = \mathrm{id}$.

文献 [196] 给出了反向变换下 $1+1$ 维发展方程不变性的一般结果. 这里我们仅限于讨论反向变换下某些重要的孤立子方程的不变性.

考虑平面曲线 C, 它在 (x,y) 平面上的运动满足条件

$$\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n} = \alpha\frac{\partial^n \kappa}{\partial s^n}, \quad n = 0,1,\cdots, \tag{6.127}$$

这里 $\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}$ 是速度的主法向分量, α 是任意常数, $\kappa = \theta_s$ 表示 C 上一点 P 处的曲率, s 表示弧长. 在 2.4 节中我们知道, $n=1$ 时一个特殊的平面运动导致了 mKdV 方程.[2] 用 Euler 坐标 x 和 y 来表示, 曲线可以用

$$C : y = \Omega(x,t) \tag{6.128}$$

参数化, 从而 $\Omega_x = \tan\theta$, 而 C 的法向 $\boldsymbol{n}$ 为

$$\boldsymbol{n} = \frac{1}{\sqrt{1+\Omega_x^2}}\begin{pmatrix}\Omega_x \\ -1\end{pmatrix}. \tag{6.129}$$

但是, 为了计算速度 $\boldsymbol{v}$, 必须使用 Lagrange 描述. 如果曲线 C 的位置向量 $\boldsymbol{r} = (x,y)^{\mathrm{T}}$ 用 Lagrange 变量 σ 参数化, 即 $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(\sigma,t)$, 或写为更明显的

$$x = x(\sigma,t), \quad y = y(\sigma,t), \tag{6.130}$$

那么

$$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} \left.\dfrac{\partial x}{\partial t}\right|_\sigma \\ \left.\dfrac{\partial y}{\partial t}\right|_\sigma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left.\dfrac{\partial x}{\partial t}\right|_\sigma \\ \Omega_x \left.\dfrac{\partial x}{\partial t}\right|_\sigma + \Omega_t \end{pmatrix}. \tag{6.131}$$

于是, 法向速度为

$$\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n} = -\frac{\Omega_t}{\sqrt{1+\Omega_x^2}}. \tag{6.132}$$

(6.127) 式给出 θ 满足的方程

$$\frac{\partial}{\partial t}(\tan\theta) + \alpha\frac{\partial}{\partial x}\left(\sec\theta\frac{\partial^{n+1}\theta}{\partial s^{n+1}}\right) = 0. \tag{6.133}$$

上述方程在 $n=0$ 和 $n=2$ 的特殊情形给出了两个 $1+1$ 维模型 —— 蒸发–凝结产生的表面槽的运动和受热多晶中的表面扩散. 在 $n=1$ 时, 方程 (6.133) 成为

$$\frac{\partial}{\partial t}(\tan\theta) + \alpha\frac{\partial^3}{\partial x^3}(\sin\theta) = 0, \tag{6.134}$$

这就是圈孤立子方程, 它可在 (6.113) 式中取 $Z \to -x, T \to t$ 和 $\alpha = 1$ 得到.

由定理 21 容易看到, 非线性发展方程 (6.133) 在反向变换

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{d}x' = \tan\theta\,\mathrm{d}x - \alpha\sec\theta\,\frac{\partial^{n+1}\theta}{\partial s^{n+1}}\,\mathrm{d}t, \quad \mathrm{d}t' = \mathrm{d}t, \\
&\theta' = -\theta + \pi/2
\end{aligned} \tag{6.135}
$$

下是不变的. 这对应于方程 (6.127) 在等温线变换

$$
x' = \Omega, \quad \Omega' = x, \quad t' = t \tag{6.136}
$$

下不变, Crank 将等温线变换用于非线性移动边界问题的数值计算中[90].

我们已经知道圈孤立子方程 (6.134) 与势 mKdV 方程通过反向变换相联系. 这里反向变换为

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}x^* &= \sec\theta\,\mathrm{d}x + \alpha\left[\frac{1}{2}\cos^2\theta\,\theta_x^2 - \sin\theta\frac{\partial}{\partial x}(\cos\theta\,\theta_x)\right]\mathrm{d}t, \\
\mathrm{d}t^* &= \mathrm{d}t,
\end{aligned} \tag{6.137}
$$

它的相容性条件, 即守恒律

$$
\frac{\partial}{\partial t}(\sec\theta) - \alpha\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{1}{2}\theta_x^2\cos^2\theta - \sin\theta\frac{\partial}{\partial x}(\cos\theta\,\theta_x)\right] = 0 \tag{6.138}
$$

由圈孤立子方程 (6.134) 保证. 由定理 21, 在反向变换 (6.137) 下, 圈孤立子方程成为

$$
\frac{\partial}{\partial t^*}(\cos\theta) + \alpha\frac{\partial}{\partial x^*}\left[\frac{1}{2}\cos\theta\,\theta_{x^*}^2 - \sin\theta\,\theta_{x^*x^*}\right] = 0.
$$

$\mathrm{d}x^* = \mathrm{d}s$ 表明, 反向变量 x^* 正是弧长, 从而有势 mKdV 方程

$$
\theta_{t^*} + \alpha\left(\theta_{sss} + \frac{\theta_s^3}{2}\right) = 0, \tag{6.139}
$$

而曲率 $\kappa = \theta_s$ 满足 mKdV 方程

$$
\kappa_t + \alpha\left(\kappa_{sss} + \frac{3}{2}\kappa^2\kappa_s\right) = 0. \tag{6.140}
$$

6.4.2 Dym 梯队, mKdV 梯队和 KdV 梯队

Dym 方程

$$
\rho_t = \rho^{-1}(\rho^{-1})_{xxx} \tag{6.141}
$$

在反向变换

$$
\mathrm{d}x' = \rho^2\mathrm{d}x + 2(\rho^{-1})_{xx}\mathrm{d}t, \quad \mathrm{d}t' = \mathrm{d}t, \tag{6.142}
$$

下的不变性是文献 [316] 中研究 AKNS 系统和 WKI 系统之间的联系时得到的. 随后文献 [308] 中指出, 由 Calogero 和 Degasperis[65] 建立的更一般的*Dym* 梯队

$$\rho_t = \rho^{-1}(-D^3 rIr)^n \rho\rho_x, \quad n = 1, 2, \cdots \tag{6.143}$$

在反向变换

$$\left.\begin{array}{c} \mathrm{d}x' = \rho^2 \mathrm{d}x - 2(\rho^{-1}\mathcal{E}_{n-1})_{xx}\mathrm{d}t, \quad \mathrm{d}t' = \mathrm{d}t, \\ \rho' = \rho^{-1} \end{array}\right\} \mathcal{R}' \tag{6.144}$$

下保持不变, 这里算子 D 和 I 定义为

$$D\phi := \phi_x, \quad I\phi := \int_x^\infty \phi(\sigma, t)\,\mathrm{d}\sigma, \tag{6.145}$$

$r = 1/\rho$,

$$\mathcal{E}_n = -\int_x^\infty \rho^{-1}(\rho^{-1}\mathcal{E}_{n-1})_{yyy}\mathrm{d}y, \quad \mathcal{E}_0 = 1, \quad n = 1, 2, \cdots. \tag{6.146}$$

Dym 方程和 Dym 梯队的反向不变性被 Dmitrieva 用于构造 N 间隔解和 N 圈解[105, 106]. Ibragimov[177] 用 Lie-Bäcklund 理论说明 Dym 方程 (6.141) 正是著名的 KdV 方程的另一种表示方法. 通过结合应用反向变换和规范变换, 相应的结果对 Dym 梯队和 KdV 梯队也成立. 于是, 在反向变换

$$\left.\begin{array}{c} \mathrm{d}\tilde{x} = \rho\,\mathrm{d}x - \mathcal{E}_n \mathrm{d}t, \quad \mathrm{d}\tilde{t} = \mathrm{d}t, \\ \tilde{\rho} = \dfrac{1}{\rho} \end{array}\right\} \tilde{\mathcal{R}} \tag{6.147}$$

下, Dym 梯队 (6.143) 变为 $\phi(\tilde{x}, \tilde{t})$ 满足的*Krichever-Novikov* 梯队, 其中 $\tilde{\rho} = \phi_{\tilde{x}}$. 上述 Dym 梯队的不变性诱导了 Krichever-Novikov 梯队在 $\phi_{\tilde{x}} \to 1/\phi_{\tilde{x}}$ 下的不变性, 后者自然出现在 WTC 展开方法的应用中.[3]

将

$$v = (\tilde{\rho}^{-1/2})_{\tilde{x}}/\tilde{\rho}^{-1/2} \tag{6.148}$$

代入 Krichever-Novikov 梯队就得到 mKdV 梯队

$$v_{\tilde{t}} = M^n v_{\tilde{x}}, \quad n = 1, 2, \cdots, \tag{6.149}$$

其中

$$M := \frac{\partial^2}{\partial \tilde{x}^2} - 4v^2 + 4v_{\tilde{x}} \int_{\tilde{x}}^\infty v(y, \tilde{t}) \cdot \mathrm{d}y, \tag{6.150}$$

[3] Weiss-Tabor-Carnavale (WTC) 方法是一类重要的 Painlevé 可积性测试, 它基于关于奇性流形 S :

这同上一节从 NLS 梯队取奇数 N 所得到的是相同的.

另一方面, 将

$$u = (\tilde{\rho}^{-1/2})_{\tilde{x}\tilde{x}}/\tilde{\rho}^{-1/2} \tag{6.151}$$

代入 Krichever-Novikov 梯队得到 *KdV* 梯队

$$u_{\tilde{t}} = K^n u_{\tilde{x}}, \quad n = 1, 2, \cdots, \tag{6.152}$$

其中

$$K := \frac{\partial^2}{\partial \tilde{x}^2} - 4u + 2u_{\tilde{x}} \int_{\tilde{x}}^{\infty} \cdot \, \mathrm{d}y. \tag{6.153}$$

注意到由 (6.148) 和 (6.151) 式可得到联系 mKdV 梯队和 KdV 梯队 Miura 变换

$$u = v_{\tilde{x}} + v^2. \tag{6.154}$$

(6.151) 式表示 $\tilde{\rho}^{-1/2}$ 相当于 KdV 梯队的线性问题 $(6.66)_1$ 中取 $\lambda = 0$ 时的特征函数.

Dym 梯队 (6.143) 在反向变换 (6.144) 加上 (6.147), (6.148) 下的不变性导出了 mKdV 梯队的一个简单对称性 $v \to -v$. 这个对称性连同 Miura 变换 (6.154) 以及 KdV 梯队在 Galilean 变换

$$u' = u + \frac{\beta}{2}, \quad x' = x - 3\beta t, \quad t' = t \tag{6.155}$$

下的不变性导出了 KdV 梯队的自 Bäcklund 变换的空间部分

$$\mathbb{B}_\beta: \quad (\Lambda^+ + \Lambda^-)_x = \beta - \frac{1}{2}[\Lambda^+ - \Lambda^-]^2, \tag{6.156}$$

其中 $u^\pm = -\Lambda_x^\pm$ 是对应于 mKdV 梯队的解 $\pm v$ 的 KdV 梯队的解. 于是, 如同经典 sine-Gordon 方程, 可以用一个 Lie 对称在 Bäcklund 变换中加入参数 β.

6.4.3 可换性定理

我们要对势 KdV 方程的 Bäcklund 变换 (6.156) 建立可换性定理, 结果如下.

定理 22 设 Λ_0 是势 KdV 方程

$$\Lambda_t = \Lambda_{xxx} - 3\Lambda_x^2 \tag{6.157}$$

的一个种子解, Λ_1, Λ_2 由 Λ_0 分别通过 Bäcklund 变换 $\mathbb{B}_{\beta_1}$ 和 $\mathbb{B}_{\beta_2}$ 所得, 即 $\Lambda_1 = \mathbb{B}_{\beta_1}(\Lambda_0)$, $\Lambda_2 = \mathbb{B}_{\beta_2}(\Lambda_0)$, 其中 $\mathbb{B}_\beta$ 表示 Bäcklund 变换的空间部分 (6.156), 则势 KdV 方程的解是

$$\Lambda = \Lambda_0 + 2(\beta_1 - \beta_2)/(\Lambda_1 - \Lambda_2), \tag{6.158}$$

上述结果可以导出如下. 由 Bäcklund 变换 $\mathbb{B}_\beta$,

$$\begin{aligned}\Lambda_{0,x}+\Lambda_{1,x}&=\beta_1-\frac{1}{2}(\Lambda_0-\Lambda_1)^2,\\ \Lambda_{0,x}+\Lambda_{2,x}&=\beta_2-\frac{1}{2}(\Lambda_0-\Lambda_2)^2,\\ \Lambda_{1,x}+\Lambda_{12,x}&=\beta_2-\frac{1}{2}(\Lambda_1-\Lambda_{12})^2,\\ \Lambda_{2,x}+\Lambda_{21,x}&=\beta_1-\frac{1}{2}(\Lambda_2-\Lambda_{21})^2.\end{aligned} \tag{6.159}$$

假设存在 Λ 满足

$$\Lambda_{12}=\Lambda_{21}=\Lambda,$$

那么 $(6.159)_1$–$(6.159)_2$ 和 $(6.159)_3$–$(6.159)_4$ 分别给出

$$(\Lambda_1-\Lambda_2)_x=\beta_1-\beta_2+\frac{1}{2}(\Lambda_1-\Lambda_2)(2\Lambda_0-\Lambda_1-\Lambda_2),$$

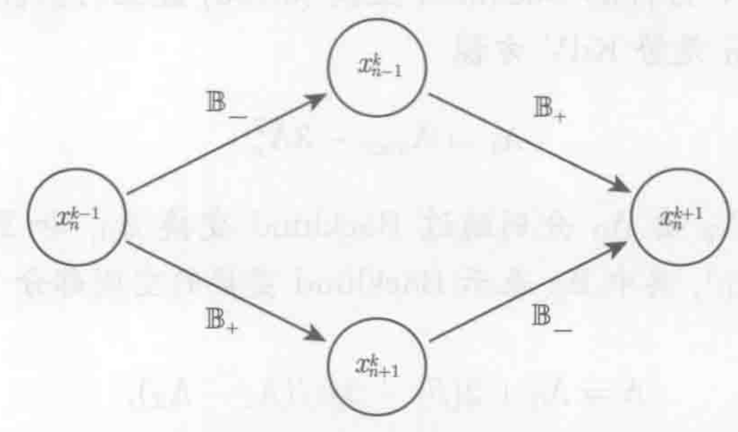
$$(\Lambda_1-\Lambda_2)_x=\beta_2-\beta_1+\frac{1}{2}(\Lambda_1-\Lambda_1)(\Lambda_1+\Lambda_2-2\Lambda).$$

将它们相减就得到定理 22 中的非线性叠加原理. 易证当Bäcklund关系$(6.159)_{1,2}$ 成立时, $\Lambda_{12}=\Lambda_{21}=\Lambda$ (Λ 由 (6.158) 式给出) 确实满足 Bäcklund 关系 $(6.159)_{3,4}$.

Wahlquist 和 Estabrook[377] 用可换性定理 (6.158) 构造了 KdV 方程的多孤立子解. Grammaticos 等[153] 最近发现 KdV 可换性定理的某种形式在数值分析中有重要应用. Brezinski[55] 提出的 ε 算法为

$$x_n^{k+1}=x_n^{k-1}+\frac{1}{x_{n+1}^k-x_{n-1}^k}, \tag{6.160}$$

其中 x_n 表示数列中的一项, x_n^k 表示它经 k 次迭代后的值. 这里, 初值是 x_n^1, 而 x_n^0 设为零. (6.160) 式作适当改变后恰为势 KdV 方程的非线性叠加原理 (6.158), 其中 Bäcklund 参数 β_1,β_2 取为满足 $\beta_1-\beta_2=1/2$. 算法 (6.160) 等价于用 Bianchi 图 6.3 表示的可换性定理. 这里, $\mathbb{B}^+$ 将下标加 1, 而 $\mathbb{B}^-$ 将下标减 1, 而上标对应于迭代的次数.



可换性定理的这个新特征表明 Bäcklund 变换及其非线性叠加原理在可积离散化中的重要性 (见 [45, 205, 229, 230, 272-274, 291, 325, 327, 331]).

6.4.4 mKdV 梯队的几何导出

我们已经知道 mKdV 方程可以通过平面曲线的特殊运动这一纯几何方法导出, 现在要将此结论推广到 mKdV 梯队.

定理 23 *设曲线 $C: y=\Lambda(x,t)$ 在 xy 平面上运动, 满足*

$$\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}=M^{n-1}\kappa_s, \tag{6.161}$$

其中 M 是 mKdV 积分微分算子

$$M:=\frac{\partial^2}{\partial s^2}+\kappa^2-\kappa_s\int_s^\infty \kappa\cdot \mathrm{d}s, \tag{6.162}$$

那么曲线 C 的曲率按 mKdV 梯队的第 n 个方程演化, 即

$$\kappa_t+M^n\kappa_s=0. \tag{6.163}$$

由条件 (6.161),

$$-\Lambda_t/\sqrt{1+\Lambda_x^2}=M^{n-1}\kappa_s, \tag{6.164}$$

因此由 $\Lambda_x=\tan\theta$ 得

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial s^2}+\kappa^2-\kappa_s\int_s^\infty \kappa\cdot\mathrm{d}s\right](\Lambda_t\cos\theta)=-M^n\kappa_s. \tag{6.165}$$

为了证明 (6.165) 式等价于 mKdV 梯队 (6.163), 我们引入反向变换 (6.137) 的推广, 它联系了圈孤立子方程和 mKdV 方程. 由 (6.164) 式得

$$\frac{\partial}{\partial t}(\tan\theta)+\frac{\partial}{\partial x}(\sec\theta\, M^{n-1}\kappa_s)=0, \tag{6.166}$$

从而

$$\frac{\partial}{\partial t}(\sec\theta)-\frac{\partial}{\partial x}\int_x^\infty \sin\theta\frac{\partial}{\partial x}(\sec\theta M^{n-1}\kappa_s)\,\mathrm{d}x=0. \tag{6.167}$$

在反向变换

$$\begin{aligned}\mathrm{d}x^* &=\sec\theta\,\mathrm{d}x+\left(\int_x^\infty \sin\theta\frac{\partial}{\partial x}(\sec\theta M^{n-1}\kappa_s)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}t,\\ \mathrm{d}t^* &=\mathrm{d}t\end{aligned} \tag{6.168}$$

下 $(\mathrm{d}x^*=\mathrm{d}s)$,

$$\left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_{x^*}=-\left(\int_x^\infty \Lambda_{xt}\sin\theta\, dx\right)\frac{\partial}{\partial x}+\left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_x, \tag{6.169}$$

利用 (6.169) 式, 方程 (6.165) 即可化为 mKdV 梯队 (6.163). 圈孤立子方程 (6.114) 是可积梯队 (6.166) 的第一个方程, 文献 [309] 中讨论了它的不变性.

反向变换在 $1+1$ 维孤立子理论中还有其他应用. 对 Caudrey-Dodd-Gibbon 和 Kaup-Kuperschmidt 可积梯队组合运用反向变换与规范变换可得到与 Dym 梯队类似的新的可积系统[303, 382].

在物理应用方面, Kadanoff[187] 发现带有表面张力的 Saffman-Taylor 问题中会出现某种形式的 Dym 方程. 此外, Camassa 和 Holm[67] 在研究色散浅水波方程组时导出了与 Dym 方程 (6.141) 有密切联系的方程

$$\mu_t = -(\partial_x - \partial_x^3)\frac{1}{\sqrt{\mu}}, \tag{6.170}$$

它表示一个有有趣几何性质的可积梯队的第一个方程[7, 8]. Dym 型方程 (6.170) 的另一个推广的几何将在下节讨论.

文献 [280] 中指出, 对某些 $2+1$ 维可积系统也可构造反向变换, 它建立了变形 Kadomtsev-Petviashvili (mKP) 梯队以及 Kadomtsev-Petviashvili (KP) 梯队同 $2+1$ 维 Dym 梯队的联系. 该文同时得到了 $2+1$ 维 Dym 梯队在反向型变换下的不变性, 而 Dmitrieva 和 Khlabystova[107] 得到了 $2+1$ 维 Dym 方程的多孤立子解.

练　　习

1. (a) 通过反向变换 $\mathcal{R}$ 建立守恒律 (6.125) 和 (6.126) 之间的联系.

(b) 证明 $\mathcal{R}^2 = \mathrm{id}$.

2. 证明非线性发展方程组 (6.133) 在反向变换 (6.135) 下不变.

3. 利用可换性定理构造 KdV 方程的双孤立子解.

4. 证明 (6.166) 式在反向变换

$$\begin{gathered}\mathrm{d}x' = \tan\theta\,\mathrm{d}x - \sec\theta\, M^{n-1}\kappa_s\,\mathrm{d}t, \quad \mathrm{d}t' = \mathrm{d}t, \\ \theta' = -\theta + \pi/2\end{gathered} \tag{6.171}$$

下不变.

5. (a) 用反向变换将方程 (6.170) 联系于以反向变量 $\tilde{x}, \tilde{t}$ 为自变量的可积方程[137]

$$\theta_{\tilde{t}} + \theta_{\tilde{x}\tilde{x}\tilde{x}} - \frac{1}{2}\theta_{\tilde{x}}^3 - \frac{3}{2}e^{2\theta}\theta_{\tilde{x}} = 0. \tag{6.172}$$

(b) 证明方程组

$$\phi_t + \phi_{xxx} + \frac{1}{2}\phi_x^3 + 6\Phi^2(\phi)\phi_x = 0, \tag{6.173}$$

$$\Phi'' + \Phi = 0 \tag{6.174}$$

通过变换

$$\theta_x = \phi_x - 2\Phi \tag{6.175}$$

同势 mKdV 方程 (6.110) 相联系.

6. 利用反向变换 (6.168) 证明演化 (6.164) 导出 mKdV 梯队 (6.163).

6.5 常曲率曲线的从法向运动和推广的 Dym 曲面

第 4 章中, 从几何观点来看, 曲线以 $\boldsymbol{v} = \kappa \boldsymbol{b}$ 为速度的从法向运动产生了 NLS 方程, 本节中将用此方法由常曲率曲线的纯从法向运动导出新的孤立子方程[339].

现在考虑纯从法向运动的特点. 设位置为 $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(\sigma, t)$ 的曲线 C 在空间运动, 其中时间 t 与参数 σ 互相独立, 那么在确定的时刻, C 的弧长为

$$s(\sigma, t) = \int_0^\sigma \sqrt{h(\sigma^*, t)}\,\mathrm{d}\sigma^* + s(0, t), \tag{6.176}$$

其中

$$h = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \sigma} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \sigma}. \tag{6.177}$$

当曲率 κ 和挠率 τ 非零时, Serret-Frenet 方程给出

$$\boxed{\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \sigma} \times \boldsymbol{t} = \boldsymbol{0}, \quad \frac{\partial \boldsymbol{b}}{\partial \sigma} \times \boldsymbol{n} = \boldsymbol{0},} \tag{6.178}$$

从而由 (6.178) 式, 纯从法向运动的假设

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial t} = \Xi \boldsymbol{b} \tag{6.179}$$

给出

$$\frac{\partial h}{\partial t} = 2\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \sigma} \cdot \frac{\partial^2 \boldsymbol{r}}{\partial \sigma \partial t} = 2\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \sigma} \cdot \left(\frac{\partial \Xi}{\partial \sigma}\boldsymbol{b} + \Xi \frac{\partial \boldsymbol{b}}{\partial \sigma}\right) = 0. \tag{6.180}$$

于是, $\partial(s - s(0,t))/\partial t = 0$, 即只有不可伸长曲线才可能作纯从法向运动.

如同前面对 NLS 方程的讨论一样, 我们限于没有反常约束 $\Omega_n = 0$ 时的几何, 从而存在包含 s 曲线和 b 曲线的单参数曲面族 Σ. 当时已经知道, 如果以 s 曲线和 b 曲线作为 Σ 上的坐标曲线, 那么曲面的度量为

$$\mathrm{I}_\Sigma = \mathrm{d}s^2 + g(s, b)\,\mathrm{d}b^2, \tag{6.181}$$

从而

在每个曲面 Σ 上, s 曲线是测地线, 而 b 曲线是平行曲线. 如果将变量 b 解释为时间, 那么 (6.182) 式给出了纯从法向运动的速度. 曲面 Σ 的 Gauss-Mainardi-Codazzi 方程组为

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial s}(g\tau) + g^{1/2}\frac{\partial \kappa}{\partial b} = 0, \\
&\frac{\partial \tau}{\partial b} = \frac{\partial}{\partial s}[g^{1/2}(\kappa + \operatorname{div}\boldsymbol{n})] + \kappa\frac{\partial g^{1/2}}{\partial s}, \\
&[\kappa(\kappa + \operatorname{div}\boldsymbol{n}) + \tau^2]g^{1/2} = \frac{\partial^2 g^{1/2}}{\partial s^2}.
\end{aligned}
\tag{6.183}
$$

在后两个方程中消去 $\kappa + \operatorname{div}\boldsymbol{n}$ 就得到 (参见 (4.144) 式)

$$
\frac{\partial \tau}{\partial b} = \frac{\partial}{\partial s}\left[\frac{1}{\kappa}\left(\frac{\partial^2 g^{1/2}}{\partial s^2} - \tau^2 g^{1/2}\right)\right] + \kappa\frac{\partial g^{1/2}}{\partial s}. \tag{6.184}
$$

6.5.1　常曲率曲线

如果限于具有常曲率 κ 的曲线的纯从法向运动, $(6.183)_1$ 式给出

$$
g = \alpha(b)\tau^{-1}. \tag{6.185}
$$

在 (6.184) 式中消去 g 并作标度变换 $\alpha^{-1/2}\partial/\partial b \to \partial/\partial b$ 得

$$
\boxed{\tau_b = \left[\frac{1}{\kappa}\left(\frac{1}{\tau^{1/2}}\right)_{ss} - \tau^{3/2} + \kappa\frac{1}{\tau^{1/2}}\right]_s}\,. \tag{6.186}
$$

下面将此称为*推广的 Dym 方程* (ED 方程)[339]. 对方程 (6.186) 作适当的标度变换并取极限, 可得到 Dym 方程

$$
\tau_b = \left(\frac{1}{\tau^{1/2}}\right)_{sss}. \tag{6.187}
$$

注意到是 ED 方程而不是 Dym 方程 (6.187) 有简单的几何导出, 它可从具有常曲率 κ 的不可伸长曲线以速度

$$
\boldsymbol{r}_b = \tau^{-1/2}\boldsymbol{b} \tag{6.188}
$$

作纯从法向运动产生. Dym 方程是孤立子方程, 并且它在反向变换下不变. 自然的问题是, 非线性发展方程 (6.186) 是否也有这些性质.

ED 方程 (6.186) 是孤立子方程可以从它同 m²KdV 方程之间的反向变换的联系得到. 注意到方程 (6.186) 具有守恒律

$$
(V^{-1})_b = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\kappa}\left(VV_{ss} - \frac{1}{2}V_s^2\right) - \frac{3}{2}V^{-2} + \kappa\frac{V^2}{2}\right]_s \tag{6.189}
$$

其中 $V=\tau^{-1/2}$ 表示从法向运动的速度. 应用反向变换

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}x &= \sqrt{2}\,V^{-1}\mathrm{d}s+\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\frac{1}{\kappa}\left(VV_{ss}-\frac{1}{2}V_s^2\right)-\frac{3}{2}V^{-2}+\kappa\frac{V^2}{2}\right]\mathrm{d}b,\\
\mathrm{d}t &= -\sqrt{2}\,\mathrm{d}b,
\end{aligned}
\tag{6.190}
$$

ED 方程给出速度 V 满足的发展方程

$$
V_t=\left\{\frac{V}{\kappa}\left[\left(\frac{V_x}{V}\right)_x-\frac{1}{2}\left(\frac{V_x}{V}\right)^2\right]-\frac{3}{4}V^{-1}+\frac{\kappa}{4}V^3\right\}_x.
\tag{6.191}
$$

以 $V=e^{\varphi}$ 代入就得到*m^2KdV 方程*[66, 137]

$$
\varphi_t=\varphi_{xxx}-\frac{1}{2}\varphi_x^3+\frac{3}{2}\varphi_x\cosh 2\varphi.
\tag{6.192}
$$

Calogero 和 Degasperis[66] 构造了它的自 Bäcklund 变换. 这里, 我们要对 ED 方程以及同它以反向变换相联系的 m²KdV 方程给出自 Bäcklund 变换, 然后用 Sym-Tafel 公式构造由常曲率曲线的从法向运动扫出的孤立子曲面. ED 方程属于由文献 [196] 给出的一大类在反向变换下不变的非线性发展方程.

在反向变换

$$
\begin{gathered}
\mathrm{d}s'=\tau\mathrm{d}s+\left[\frac{1}{\kappa}\left(\frac{1}{\tau^{1/2}}\right)_{ss}-\tau^{3/2}+\kappa\left(\frac{1}{\tau^{1/2}}\right)\right]\mathrm{d}b,\quad \mathrm{d}b'=\mathrm{d}b,\\
\tau'=\frac{1}{\tau}
\end{gathered}
\tag{6.193}
$$

下, (6.186) 式成为

$$
\tau'_{b'}=\left[\frac{1}{\kappa}\left(\frac{1}{\tau'^{1/2}}\right)_{s's'}-\kappa\tau'^{3/2}+\frac{1}{\tau'^{1/2}}\right]_{s'},
\tag{6.194}
$$

这给出了反向变换下的不变性. 不失一般性, 下面设 $\kappa=1$. 这时, ED 方程 (6.186) 为

$$
\tau_b=X_s,\quad X=\left(\frac{1}{\tau^{1/2}}\right)_{ss}-\tau^{3/2}+\frac{1}{\tau^{1/2}},
\tag{6.195}
$$

而 $\{\boldsymbol{t},\boldsymbol{n},\boldsymbol{b}\}$ 满足的 Serret-Frenet 方程以及时间演化为

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix}\boldsymbol{t}\\ \boldsymbol{n}\\ \boldsymbol{b}\end{pmatrix}_s &= \begin{pmatrix}0&1&0\\-1&0&\tau\\0&-\tau&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{t}\\ \boldsymbol{n}\\ \boldsymbol{b}\end{pmatrix},\\
\begin{pmatrix}\boldsymbol{t}\\ \boldsymbol{n}\\ \boldsymbol{b}\end{pmatrix}_b &= \begin{pmatrix}0&-\tau^{1/2}&-\dfrac{1}{2}\dfrac{\tau_s}{\tau^{3/2}}\\ \tau^{1/2}&0&X-\dfrac{1}{\tau^{1/2}}\\ \dfrac{1}{2}\dfrac{\tau_s}{\tau^{3/2}}&X+\dfrac{1}{\tau^{1/2}}&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{t}\\ \boldsymbol{n}\\ \boldsymbol{b}\end{pmatrix}.
\end{aligned}
\tag{6.196}
$$

从标量守恒律 (6.195) 可得到向量值的守恒律

$$(\tau \boldsymbol{b})_b = (X\boldsymbol{b} + \tau^{1/2}\boldsymbol{t})_s, \tag{6.197}$$

因此可引入向量值函数 $\boldsymbol{r}'$ 满足

$$\boldsymbol{r}'_s = \tau \boldsymbol{b}, \quad \boldsymbol{r}'_b = X\boldsymbol{b} + \tau^{1/2}\boldsymbol{t}. \tag{6.198}$$

在 $\kappa = 1$ 时的反向变换 (6.193), 即

$$\mathrm{d}s' = \tau \mathrm{d}s + X\mathrm{d}b, \quad \mathrm{d}b' = \mathrm{d}b \tag{6.199}$$

下, 它们成为

$$\boldsymbol{r}'_{s'} = \boldsymbol{b}, \quad \boldsymbol{r}'_{b'} = \tau'^{-1/2}\boldsymbol{t}. \tag{6.200}$$

可自然引入右手标准正交标架

$$\{\boldsymbol{t}', \boldsymbol{n}', \boldsymbol{b}'\} = \{\boldsymbol{b}, -\boldsymbol{n}, \boldsymbol{t}\}, \tag{6.201}$$

它满足带撇的 Serret-Frenet 方程 $(6.196)_1$, 相应的曲率和挠率分别为

$$\kappa' = 1, \quad \tau' = \frac{1}{\tau}. \tag{6.202}$$

于是, 单位向量 $\boldsymbol{t}', \boldsymbol{n}'$ 和 $\boldsymbol{b}'$ 分别是曲线 $\boldsymbol{r}'(s', t' = 常数)$ 的单位切向量、主法向量和从法向量. 进一步, 当曲线作纯从法向运动时, 随着 b' 的变化扫出的曲面同具有位置向量 $\boldsymbol{r}$ 的原来的 ED 曲面有相同的性质. 这在非线性层次上反映了ED 方程在反向变换 $(\tau, s, b) \to (\tau', s', b')$ 下的不变性.

值得注意的是, 方程 (6.198) 可以显式解出. 事实上, 不失一般性, 有

$$\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{r} + \boldsymbol{n}. \tag{6.203}$$

由于 $\boldsymbol{N} = -\boldsymbol{n}$, ED 曲面 Σ 和 Σ' 是平行的. 于是有如下的结果.

定理 24(对偶 ED 曲面)　*由方程组 (6.196) 解得的任一 ED 曲面 Σ, 联系着一个位置向量为 $\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{N}$ 的平行对偶 ED 曲面 Σ', 它由反向变换 (6.198), (6.199) 产生. 此反向变换使得由 (6.195) 式给出的 ED 方程保持不变. 在反向变换下, ED 曲面及其对偶曲面上对应点的坐标曲线的切向量互相交换, 即 $\boldsymbol{t}' = \boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{b}' = \boldsymbol{t}$.*

ED 曲面上的测地线 $b = 常数$ 以及对偶 ED 曲面上相应的测地线构成了 *Bertrand* 曲线对[380]. 事实上, 对 $b = 常数$, 反向关系 (6.199) 是经典的. 一般地, Bertrand 曲线满足

$$\alpha\kappa + \beta\tau = 1 \tag{6.204}$$

其中 α, β 是常数. 它们的共轭曲线 (对偶 Bertrand 曲线) 是一类偏移曲线[278], 它们被用于计算机辅助设计 (CAD) 和计算机辅助制造 (CAM) 中. Razzaboni 在 [293] 中指出, 存在单参数测地 Bertrand 曲线族的曲面具有 Bäcklund 变换, 从而是孤立子曲面. ED 曲面和下节中要讨论的推广的 sine-Gordon 曲面都是这类曲面.

由 ED 方程 (6.195) 的反向不变性, 对给定的种子解 $\tau(s, b)$, 带撇的对应方程的解为

$$\begin{aligned} \tau' &= \frac{1}{\tau(s,b)}, \\ s' &= s'(s,b), \quad b' = b, \end{aligned} \tag{6.205}$$

其中 s' 通过将种子解代入反向关系 (6.199) 并积分得.

现在引入 $\mathrm{m^2KdV}$ 方程中变量 x, t 的反向对应 x', t', 满足

$$\begin{aligned} \mathrm{d}x' &= \sqrt{2}\, V'^{-1}\mathrm{d}s' + \frac{1}{\sqrt{2}}\left[V'V'_{s's'} - \frac{1}{2}V'^2_{s'} - \frac{3}{2}V'^{-2} + \frac{V'^2}{2}\right]\mathrm{d}b', \\ \mathrm{d}t' &= -\sqrt{2}\,\mathrm{d}b', \end{aligned} \tag{6.206}$$

其中 $V' = \tau'^{-1/2}$, 那么

$$\mathrm{d}x' = \mathrm{d}x, \quad \mathrm{d}t' = \mathrm{d}t. \tag{6.207}$$

于是, ED 曲面及其对偶曲面上能取相同的坐标. 从 ED 曲面到它对偶曲面的对应由 $\mathrm{m^2KdV}$ 方程的简单离散对称 $\varphi \to \varphi' = -\varphi$ 得到.

6.5.2 推广的 Dym 曲面和 $su(2)$ 线性表示

ED 曲面的第一、第二基本形式可以从线性方程组 (6.196) 以及

$$\boldsymbol{r}_b = \frac{1}{\tau^{1/2}}\boldsymbol{b}, \quad \boldsymbol{N} = \frac{\boldsymbol{r}_s \times \boldsymbol{r}_b}{|\boldsymbol{r}_s \times \boldsymbol{r}_b|} = -\boldsymbol{n} \tag{6.208}$$

得到, 它们是

$$\begin{aligned} \mathrm{I} &= \ \mathrm{d}\boldsymbol{r}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} \ = \mathrm{d}s^2 + \frac{1}{\tau}\,\mathrm{d}b^2, \\ \mathrm{II} &= -\mathrm{d}\boldsymbol{r}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{N} = -\mathrm{d}s^2 + 2\tau^{1/2}\mathrm{d}s\,\mathrm{d}b + \left(\frac{X}{\tau^{1/2}} - \frac{1}{\tau}\right)\mathrm{d}b^2. \end{aligned} \tag{6.209}$$

由 Bonnet 定理, 在允许空间平移下, 一个曲面由它的基本形式唯一决定, 因此任一给出基本形式 (6.209) 的位置向量定义了一个 ED 曲面. 下面将讨论如何从 ED 方程的特征函数显式构造出位置向量. 注意到关系式 $\boldsymbol{N} = -\boldsymbol{n}$ 意味着线性方程组 (6.196) 是以 $\{\boldsymbol{t}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{N}\}$ 表示的 ED 曲面上的 Gauss-Weingarten 方程组.

考虑线性方程组

$$\Phi_s = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -\tau - \Lambda \\ \tau + \dfrac{1}{\Lambda} & 0 \end{pmatrix}\Phi,$$

$$\Phi_b = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \dfrac{1}{4}\left(\Lambda - \dfrac{1}{\Lambda}\right)\dfrac{\tau_s}{\tau^{3/2}} & -X + \dfrac{1}{2}\left(\Lambda - \dfrac{1}{\Lambda}\right)\tau^{1/2} + \dfrac{1}{2}(1-\Lambda^2)\dfrac{1}{\tau^{1/2}} \\ X + \dfrac{1}{2}\left(\Lambda - \dfrac{1}{\Lambda}\right)\tau^{1/2} - \dfrac{1}{2}\left(1 - \dfrac{1}{\Lambda^2}\right)\dfrac{1}{\tau^{1/2}} & -\dfrac{1}{4}\left(\Lambda - \dfrac{1}{\Lambda}\right)\dfrac{\tau_s}{\tau^{3/2}} \end{pmatrix}\Phi, \tag{6.210}$$

其中 Λ 是任意的 (复) 常数. 可以直接验证, 在 ED 方程 (6.195) 成立时上述方程组相容. 当 $\Lambda = \mathrm{i}$ 时, 方程组成为

$$\begin{aligned} &\Phi_s = [e_1 + \tau e_2]\Phi, \\ &\Phi_b = \left[-\tau^{1/2}e_1 + \left(X - \frac{1}{\tau^{1/2}}\right)e_2 - \frac{1}{2}\frac{\tau_s}{\tau^{3/2}}e_3\right]\Phi, \end{aligned} \tag{6.211}$$

其中反对称矩阵 e_i 为 (参见 2.2 节)

$$e_1 = \frac{1}{2\mathrm{i}}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \frac{1}{2\mathrm{i}}\begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \frac{1}{2\mathrm{i}}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{6.212}$$

我们已经知道它们满足 $so(3)$ 交换关系

$$[e_1, e_2] = e_3, \quad [e_2, e_3] = e_1, \quad [e_3, e_1] = e_2. \tag{6.213}$$

另一方面, Gauss-Weingarten 方程组 (6.196) 可以写为

$$\begin{aligned} &\Psi_s = [D_1 + \tau D_2]\Psi, \\ &\Psi_b = \left[-\tau^{1/2}D_1 + \left(X - \frac{1}{\tau^{1/2}}\right)D_2 - \frac{1}{2}\frac{\tau_s}{\tau^{3/2}}D_3\right]\Psi, \end{aligned} \tag{6.214}$$

其中

$$\Psi = \begin{pmatrix} \boldsymbol{t} \\ \boldsymbol{n} \\ \boldsymbol{b} \end{pmatrix}, \tag{6.215}$$

而反对称矩阵 D_i 定义为

$$D_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad D_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad D_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{6.216}$$

D_i 是 $so(3)$ 的生成元, 它们满足交换关系

$$[D_1, D_2] = D_3, \quad [D_2, D_3] = D_1, \quad [D_3, D_1] = D_2, \tag{6.217}$$

线性表示 (6.211) 和 (6.214) 之间的同构正是 Lie 代数 $so(3)$ 和 $su(2)$ 之间同构的结果. 于是, 线性表示 (6.210) 可以看作 ED 曲面的 Gauss-Weingarten 方程组 (6.196) 的 $su(2)$ 形式.

如果我们将参数 Λ 限制在复平面的单位圆周上, 可引入参数使得

$$\Lambda = \mathrm{i}e^{-\mathrm{i}\lambda}, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \tag{6.218}$$

从而线性表示 (6.210) 成为

$$\Phi_{,\mu} = g_\mu(\lambda)\Phi, \quad \mu = 1, 2, \tag{6.219}$$

这里 $_{,1} = \partial/\partial s$, $_{,2} = \partial/\partial b$. 由于 λ 是实的, 矩阵 g_μ 反对称, 所以可设特征函数 Φ 是 $SU(2)$ 中的一个元素, 即

$$\Phi^\dagger \Phi = \mathbb{1}. \tag{6.220}$$

于是, 由 Sym-Tafel 公式 (6.31) 给出的矩阵

$$\hat{r} = \Phi^{-1}\Phi_\lambda \tag{6.221}$$

的迹为零, 并可按生成元 e_i 分解为

$$\hat{r} = \hat{\boldsymbol{r}} \cdot \boldsymbol{e}, \quad \boldsymbol{e} = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix}. \tag{6.222}$$

这样, 向量值函数 $\hat{\boldsymbol{r}} = \hat{\boldsymbol{r}}(\lambda)$ 给出了 $\mathbb{R}^3$ 中单参数曲面族的参数化.

为了建立 ED 曲面和 $\hat{\boldsymbol{r}}$ 所表示的曲面之间的联系, 需要研究 $\hat{\boldsymbol{r}}$ 所表示的曲面的几何性质. 切向量 $\hat{\boldsymbol{r}}_{,\mu}$ 可以从分解

$$\hat{\boldsymbol{r}}_{,\mu} \cdot \boldsymbol{e} = \hat{r}_{,\mu} = \Phi^{-1} g_{\mu\lambda} \Phi \tag{6.223}$$

得到, 从而

$$\hat{\boldsymbol{r}}_{,\mu} \cdot \hat{\boldsymbol{r}}_{,\nu} = -2\,\mathrm{Tr}(\hat{r}_{,\mu}\hat{r}_{,\nu}) = -2\,\mathrm{Tr}(g_{\mu\lambda}g_{\nu\lambda}) \tag{6.224}$$

这里用到了

$$-2\,\mathrm{Tr}\,(e_i e_j) = \delta_{ij}. \tag{6.225}$$

所以, 位置向量 $\hat{\boldsymbol{r}}(\lambda)$ 的第一基本形式的单参数族为

$$\hat{\mathrm{I}}(\lambda) = -2\,\mathrm{Tr}\,(g_{\mu\lambda} g_{\nu\lambda})\,\mathrm{d}x^\mu\,\mathrm{d}x^\nu, \tag{6.226}$$

其中 $(x^1, x^2) = (s, b)$, 并用了 Einstein 求和约定.

直接可得第二基本形式的单参数族, 它们是 (参见 6.1 节)

$$\hat{\mathrm{II}}(\lambda) = -\frac{1}{\det^{1/2}[g_{1\lambda}, g_{2\lambda}]}\,\mathrm{Tr}\,([g_{1\lambda}, g_{2\lambda}](g_{\mu,\nu\lambda} + [g_{\mu\lambda}, g_\nu]))\,\mathrm{d}x^\mu\,\mathrm{d}x^\nu. \tag{6.227}$$

在 $\lambda = 0$ 时, 我们重新得到了基本形式 (6.209), 即

$$\hat{\mathrm{I}}(0) = \mathrm{I}, \quad \hat{\mathrm{II}}(0) = \mathrm{II}. \tag{6.228}$$

于是, 位置向量

$$\boldsymbol{r} = \hat{\boldsymbol{r}}(0) = -2\,\mathrm{Tr}\,(\Phi^{-1}\Phi_\lambda\big|_{\lambda=0}\,e) \tag{6.229}$$

生成了 ED 曲面.

6.5.3 CC-理想表示

cc 理想表示[122, 158] 对于分离 1+1 维孤立子方程之间的 Miura 型变换和反向型变换是很有用的[169−171,173,323,336,339]. 它将构造矩阵 Darboux 变换时需同时考虑 Lax 对的空间和时间部分这一问题转化为考虑一个矩阵 1 形式方程的不变性[173, 323, 336, 339]. cc 理想方法请参见附录 B.

ED 方程和 $\mathrm{m^2KdV}$ 方程的 cc 理想通过将线性表示 (6.210) 重新写为单一的矩阵 1 形式方程

$$\mathrm{d}\Phi = \mathcal{X}(\Lambda)\Phi = \sum_{i=1}^{5} X_i \xi^i \Phi \tag{6.230}$$

得到, 其中

$$X_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} 0 & -\Lambda \\ \Lambda^{-1} & 0 \end{pmatrix}, \quad X_3 = \begin{pmatrix} 0 & -\Lambda^{-1} \\ \Lambda & 0 \end{pmatrix},$$
$$X_4 = \begin{pmatrix} \Lambda - \Lambda^{-1} & 0 \\ 0 & -\Lambda + \Lambda^{-1} \end{pmatrix}, \quad X_5 = \begin{pmatrix} 0 & -\Lambda^2 \\ \Lambda^{-2} & 0 \end{pmatrix}, \tag{6.231}$$

而 1 形式 $\xi^i = \alpha^i\,\mathrm{d}s + \beta^i\,\mathrm{d}b$ 由 (6.210) 式按矩阵 X_i 展开得到, 这里的 X_i 可以看作圈代数 $sl(2) \otimes R(\Lambda, \Lambda^{-1})$ 的子代数的线性无关生成元[186]. 并非所有的交换子

$[X_i, X_j]$ 都可表示为生成元的线性组合, 我们有如下的不完全交换结果:

$$
\begin{aligned}
&[X_1, X_2] = X_4, && [X_2, X_4] = 2X_1 - 2X_5,\\
&[X_1, X_3] = -X_4, && [X_2, X_5] = X_4,\\
&[X_1, X_4] = -2X_2 + 2X_3, && [X_3, X_4] = ?,\\
&[X_1, X_5] = -[X_2, X_3], && [X_3, X_5] = ?,\\
& && [X_4, X_5] = ?.
\end{aligned}
\tag{6.232}
$$

由可积条件

$$0 = \mathrm{d}^2\Phi = (\mathrm{d}\mathcal{X} - \mathcal{X} \wedge \mathcal{X})\Phi \tag{6.233}$$

得到 cc 理想

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{d}\xi^1 = 2\xi^2\xi^4, && \xi^1\xi^5 = \xi^2\xi^3,\\
&\mathrm{d}\xi^2 = -2\xi^1\xi^4, && \xi^3\xi^4 = 0,\\
&\mathrm{d}\xi^3 = 2\xi^1\xi^4, && \xi^3\xi^5 = 0,\\
&\mathrm{d}\xi^4 = \xi^1\xi^2 - \xi^1\xi^3 + \xi^2\xi^5, && \xi^4\xi^5 = 0,\\
&\mathrm{d}\xi^5 = -2\xi^2\xi^4.
\end{aligned}
\tag{6.234}
$$

这里略去了微分形式之间的 "$\wedge$" 记号.

我们可以研究上述 cc 理想的积分流形不同的参数化. 如果令

$$\xi^2 = v\xi^1 + p\xi^3, \quad \xi^4 = u\xi^3, \quad \xi^5 = v\xi^3, \tag{6.235}$$

则 (6.234) 式的代数部分恒成立, 其中函数 u, v 和 p 待定. 因此, 独立的 1 形式数目, 即 cc 理想的亏格是 $g = 2$. 但是, 如果将 (6.235) 式代入 cc 理想的微分部分, 就得到 4 个 1 形式

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{d}(v^{1/2}\xi^3) = 0 \Rightarrow \mathrm{d}B = v^{1/2}\xi^3,\\
&\mathrm{d}(\xi^2 + \xi^3) = 0 \Rightarrow \mathrm{d}S = \xi^2 + \xi^3,\\
&\mathrm{d}(\xi^1 + \xi^5) = 0 \Rightarrow \mathrm{d}S' = \xi^1 + \xi^5,\\
&\mathrm{d}\left(v^{1/2}\xi^1 + \frac{1}{v^{1/2}}\xi^2 - \frac{u}{v^{1/2}}\xi^4\right) = 0 \Rightarrow \mathrm{d}y = v^{1/2}\xi^1 + \frac{1}{v^{1/2}}\xi^2 - \frac{u}{v^{1/2}}\xi^4.
\end{aligned}
\tag{6.236}
$$

S, B, S', y 中任一对可作为独立变量, 而其余的可作为势. 例如, 取 S 和 B 为独立变量, 那么 1 形式为

$$\xi^1 = \frac{\mathrm{d}S}{v} + q\,\mathrm{d}B, \quad \xi^2 = \mathrm{d}S - \frac{\mathrm{d}B}{v^{1/2}}, \tag{6.237}$$

而势 S' 和 y 由

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}S' &= \frac{\mathrm{d}S}{v} + (q + v^{1/2})\,\mathrm{d}B, \\
\mathrm{d}y &= 2\frac{\mathrm{d}S}{v^{1/2}} + \left(v^{1/2}q - \frac{1}{v} - w^2\right)\mathrm{d}B
\end{aligned}
\tag{6.238}
$$

定义, 这里为方便起见, 记 $w = u/v^{1/2}$, $q = -(p+1)/v^{3/2}$.

于是, cc 理想的微分部分给出

$$
\begin{gathered}
-\left(\frac{1}{v}\right)_B + q_S = 2w, \\
\left(\frac{1}{v^{1/2}}\right)_S = 2\frac{w}{v}, \quad w_S = -q - \frac{2}{v^{3/2}} + v^{1/2}.
\end{gathered}
\tag{6.239}
$$

后两个关系给出了 w 和 q 关于 v 的表达式

$$
w = -\frac{1}{2}(v^{1/2})_S, \quad q = \frac{1}{2}(v^{1/2})_{SS} + v^{1/2} - \frac{2}{v^{3/2}}, \tag{6.240}
$$

而 $(6.239)_1$ 式约化为三阶方程

$$
\left(\frac{1}{v}\right)_B = \frac{1}{2}(v^{1/2})_{SSS} + 2(v^{1/2})_S - 2\left(\frac{1}{v^{3/2}}\right)_S. \tag{6.241}
$$

用

$$
v = \frac{1}{\tau}, \quad S = \frac{s}{2}, \quad B = \frac{b}{4} \tag{6.242}
$$

代入, 那么 (6.241) 式恰好就是 ED 方程 (6.195).

我们也可以取 S' 和 B 为独立变量, 用类似的方法导出非线性方程. 由 $(6.238)_1$ 式, S' 同 (6.199) 式给出的反向变量 s' 的关系为

$$
S' = s'/2, \tag{6.243}
$$

这样就得到了同方程 (6.241) 以反向变换相联系的 ED 方程. 进一步, 势 y 可取为

$$
y = x/\sqrt{2}, \tag{6.244}
$$

这样独立变量 (y, B) 给出了 $\mathrm{m^2KdV}$ 方程 (6.192). 于是, cc 理想 (6.234) 包含了 ED 方程和与之反向相联系的 $\mathrm{m^2KdV}$ 方程. 下面, cc 理想将用于构造矩阵 Darboux 变换与相应的 Bäcklund 变换.

6.5.4 推广的 Dym 方程和 m^2KdV 方程的矩阵 Darboux 变换和 Bäcklund 变换

为了构造保持 cc 理想 (6.234) 的形式不变的变换, 需要给出线性表示 (6.230) 的代数特征. 容易验证生成元 $X_i, i=1,\cdots,5$ 在 $sl(2)\otimes R(\Lambda,\Lambda^{-1})$ 的子代数

$$\mathfrak{g}=\mathrm{span}\{X^n, Y^n; n\in\mathbb{Z}\},$$
$$X^n=\begin{pmatrix}\Lambda^n-\Lambda^{-n} & 0\\ 0 & -\Lambda^n+\Lambda^{-n}\end{pmatrix},\quad Y^n=\begin{pmatrix}0 & -\Lambda^{-n}\\ \Lambda^n & 0\end{pmatrix} \tag{6.245}$$

中. 当 $\mathcal{X}(\Lambda)$ 的迹为零时, $\mathfrak{g}$ 可以等价地表示为

$$\mathcal{X}(\Lambda)\in\mathfrak{g}\quad\Leftrightarrow\quad\mathcal{X}(\Lambda^{-1})=M\mathcal{X}(\Lambda)M^{-1},\quad M=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}. \tag{6.246}$$

于是成立下列结论.

引理 1 (ED-m^2KdV cc 理想的特征) 设 $\mathcal{X}(\Lambda)$ 是迹零的 2×2 矩阵值 1 形式构成的的单参数族, 那么线性方程

$$\mathrm{d}\Phi=\mathcal{X}(\Lambda)\Phi \tag{6.247}$$

同 ED-m^2KdV cc 理想的线性表示 (6.230) 相一致当且仅当 (6.247) 式相容并且

(i) $\mathcal{X}(\Lambda)$ 是 Λ 和 Λ^{-1} 的二次多项式,
(ii) $\mathcal{X}(\Lambda)\in\mathfrak{g}$,
(iii) $\mathcal{X}(\Lambda)$ 不包含生成元 X^2 和 Y^2.

此引理给出了 cc 理想的线性表示的典型性质, 它可以用来以纯代数方法构造矩阵 Darboux 变换. 下面给出的结果[339] 将其推广到 Darboux 矩阵的 cc 理想, 下一章将以此研究几何问题.

定理 25 (ED-m^2KdV cc 理想的矩阵 Darboux 变换) 设 $\phi=(\phi^1\ \phi^2)^{\mathrm{T}}$ 是 $\Lambda_0=-\mu$ 时 ED-m^2KdV cc 理想 (6.234) 的线性表示 (6.230) 的向量值解, 那么 (6.230) 式在矩阵 Darboux 变换

$$\begin{aligned}&\Phi\to\tilde{\Phi}=P(\Lambda)\Phi,\\ &\mathcal{X}(\Lambda)\to\tilde{\mathcal{X}}(\Lambda)=P(\Lambda)\mathcal{X}(\Lambda)P^{-1}(\Lambda)+\mathrm{d}P(\Lambda)P^{-1}(\Lambda)\end{aligned} \tag{6.248}$$

下保持不变, 这里 Darboux 矩阵 $P(\Lambda)$ 为

$$P(\Lambda)=\begin{pmatrix}A & B\\ \cdots\end{pmatrix}+\Lambda\begin{pmatrix}D & -C\\ \cdots\end{pmatrix}, \tag{6.249}$$

$$\frac{D}{A} = \frac{\mu^2 + \zeta^2}{\mu(1+\zeta^2)}, \quad \zeta = \frac{\phi^1}{\phi^2}, \tag{6.250}$$
$$AD = 1, \quad B = 0, \quad C = (D - \mu^{-1}A)\zeta.$$

证明　下面将看到, 函数 A, B, C, D 的特殊取法 (6.250) 由代数约束得出, 这保证了 (6.248) 式保持线性表示 (6.230) 的形式不变. 由对称性 (6.246) 得出, 如果 $\phi_1 = \phi$ 是对应于参数 $\Lambda_1 = \Lambda_0$ 的向量值特征函数, 那么 $\phi_2 = M\phi$ 是对应于参数 $\Lambda_2 = \Lambda_0^{-1}$ 的特征函数. 此外, 由恒等式

$$\Lambda P(\Lambda^{-1}) = MP(\Lambda)M^{-1}, \tag{6.251}$$

$P(\Lambda_1)\phi_1 = 0$ 可推出 $P(\Lambda_2)\phi_2 = 0$. 所以, 线性约束

$$P(\Lambda_i)\phi_i = 0 \tag{6.252}$$

将 $P(\Lambda)$ 中的未知函数减少 2 个. 条件 (6.252) 对于矩阵 Darboux 变换是标准的, 它保证了在 $\det P(\Lambda) =$ 常数 时变换保持多项式结构及 $\mathcal{X}(\Lambda)$ 的次数[173, 269, 270, 323, 336], 这是对 Darboux 矩阵 $P(\Lambda)$ 的又一个约束条件. 于是, 新的 1 形式 $\tilde{\mathcal{X}}(\Lambda)$ 满足引理 1 中的条件 (i), 而条件 (ii) 由对称性 (6.251) 得出. 在变换式

$$\tilde{\mathcal{X}}(\Lambda)P(\Lambda) = P(\Lambda)\mathcal{X}(\Lambda) + \mathrm{d}P(\Lambda) \tag{6.253}$$

中考虑三次项, 则条件 $B = 0$ 保证 $\tilde{\mathcal{X}}(\Lambda)$ 中不出现生成元 X^2 和 Y^2, 即条件 (iii) 成立. 最后, 行列式条件可化为 $AD =$ 常数. 定理证毕. □

推论 5 (ED 方程和 m^{2}KdV 方程的 Bäcklund 变换)　*ED 方程 (6.195)、它的对偶, 以及 m^{2}KdV 方程 (6.192) 的形式在 $(\tau, s, b, s', x) \to (\tilde{\tau}, \tilde{s}, \tilde{b}, \tilde{s}', \tilde{x})$ 下保持不变, 这里*

$$\tilde{\tau} = \frac{A^2}{D^2}\tau, \quad \begin{aligned} &\tilde{s} = s' + 2\arctan\zeta, \quad &&\tilde{b} = b, \\ &\tilde{s}' = s - 2\arctan(\zeta/\mu), \quad &&\tilde{x} = x. \end{aligned} \tag{6.254}$$

m^{2}KdV 方程的独立变量保持不变.

证明　由变换式 (6.253) 得到新的 1 形式 $\tilde{\xi}^i$ 的表达式, 它们是 ξ^k 的线性组合, 系数依赖于 ζ. 例如, Λ 和 Λ^{-1} 的三次项给出

$$\tilde{\xi}^3 = \frac{A}{D}\xi^3, \quad \tilde{\xi}^5 = \frac{D}{A}\xi^5, \tag{6.255}$$

用 (6.237) 式代入得

$$\tilde{\tau}^{1/2} = \frac{D}{A}\tau^{1/2}, \quad \mathrm{d}\tilde{B} = \mathrm{d}B \tag{6.256}$$

而 $\tilde{\xi}^4$ 的表达式用来决定 $\tilde{u}$. 于是

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\tilde{y} &= \tilde{v}^{1/2}\tilde{\xi}^1 + \frac{1}{\tilde{v}^{1/2}}\tilde{\xi}^2 - \frac{\tilde{u}}{\tilde{v}^{1/2}}\tilde{\xi}^4 \\ &= v^{1/2}\xi^1 + \frac{1}{v^{1/2}}\xi^2 - \frac{u}{v^{1/2}}\xi^4 = \mathrm{d}y,\end{aligned} \tag{6.257}$$

$$\begin{aligned}\tilde{\xi}^2 + \tilde{\xi}^3 &= \xi^1 + \xi^5 + \mathrm{d}[\arctan\zeta], \\ \tilde{\xi}^1 + \tilde{\xi}^5 &= \xi^2 + \xi^3 - \mathrm{d}[\arctan(\zeta/\mu)].\end{aligned} \tag{6.258}$$

最后两式由线性表示 (6.230) 给出的微分 $\mathrm{d}\zeta = \mathrm{d}(\phi^1/\phi^2)$ 得到. □

6.5.5 孤立子曲面

前面已经知道, 如果 $\Phi \in SU(2)$ 是 ED 方程的向量值特征函数, 那么

$$\boldsymbol{r} = -2\,\mathrm{Tr}\,(r\boldsymbol{e}), \quad r = \Phi^{-1}\Phi_\Lambda\big|_{\Lambda=\mathrm{i}} \tag{6.259}$$

给出一个ED 曲面, 因为 $\Lambda_\lambda|_{\lambda=0} = 1$. 但是, 为了计算方便, 只需假设 $\Phi^\dagger\Phi = f(\Lambda)\mathbb{1}$, 因为函数 $f(\Lambda)$ 在 r 中只产生同迹有关的项, 它对位置向量 $\boldsymbol{r}$ 没有影响. 所以, 由矩阵 Darboux 变换 (6.248) 给出的新的位置向量为

$$\tilde{\boldsymbol{r}} = -2\,\mathrm{Tr}\,(\tilde{r}\boldsymbol{e}), \quad \tilde{r} = r + \Phi^{-1}P^{-1}P_\Lambda\Phi. \tag{6.260}$$

从此以后, 对 Λ 的函数, 我们总假设它在 $\Lambda = \mathrm{i}$ 处取值. 利用 (6.249), (6.250) 式给出的 Darboux 矩阵 P,

$$P^{-1}P_\Lambda = \mathrm{i}\frac{\mu^2-1}{(\mu^2+1)(\zeta^2+1)}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}(\zeta^2-1) & \zeta \\ \zeta & -\frac{1}{2}(\zeta^2-1)\end{pmatrix}, \tag{6.261}$$

由此得到常距离性质: $\Delta\boldsymbol{r} = |\tilde{\boldsymbol{r}} - \boldsymbol{r}| =$ 常数 (参见 7.2 节).

最简单的 ED 曲面由螺旋线的从法向运动生成. 如果取种子解 $\tau = 1$, 那么线性表示 (6.210) 为

$$\begin{aligned}\Phi_x &= \frac{1}{2\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0 & -\Lambda-1 \\ \Lambda^{-1}+1 & 0\end{pmatrix}\Phi, \\ \Phi_t &= \frac{1}{4\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0 & \Lambda^{-1}+\Lambda^2 \\ -\Lambda-\Lambda^{-2} & 0\end{pmatrix}\Phi,\end{aligned} \tag{6.262}$$

这里取 $\mathrm{m^2KdV}$ 坐标

它的基本解是

$$\Phi = \begin{pmatrix} (\Lambda+1)e^{\alpha} & (\Lambda+1)e^{-\alpha} \\ -2\sqrt{2}\,ke^{\alpha} & 2\sqrt{2}\,ke^{-\alpha} \end{pmatrix}, \tag{6.264}$$

其中

$$\alpha = kx + \tilde{k}t, \quad \begin{aligned} k &= \frac{\mathrm{i}}{2\sqrt{2}}(\Lambda^{1/2}+\Lambda^{-1/2}), \\ \tilde{k} &= -\frac{\mathrm{i}}{4\sqrt{2}}(\Lambda^{3/2}+\Lambda^{-3/2}), \end{aligned} \tag{6.265}$$

从而种子柱面 Σ 的位置向量 (6.259) 为

$$\boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\cos\tilde{\alpha} \\ \frac{1}{2}\sin\tilde{\alpha} \\ t - \frac{1}{2}\tilde{\alpha} \end{pmatrix}, \quad \tilde{\alpha} = x + \frac{1}{2}t. \tag{6.266}$$

对实参数 $\Lambda_0 = -\mu$, 方程 (6.262) 的向量值解 $\phi = (\phi^1\ \phi^2)$ 给出

$$\zeta = \frac{\phi^1}{\phi^2} = \frac{\mu-1}{2\sqrt{2}\,c}\tanh\beta, \tag{6.267}$$

其中

$$\beta = cx + \tilde{c}t, \quad \begin{aligned} c &= \frac{1}{2\sqrt{2}}(\mu^{1/2}-\mu^{-1/2}), \\ \tilde{c} &= \frac{1}{4\sqrt{2}}(\mu^{3/2}-\mu^{-3/2}). \end{aligned} \tag{6.268}$$

代入 (6.260), (6.261) 式得到新的 ED 曲面 $\tilde{\Sigma}$, 它的位置向量为

$$\tilde{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{r} + \hat{c}\begin{pmatrix} \dfrac{-[(\mu-1)\cosh 2\beta - \mu - 1]\cos\tilde{\alpha} - \sqrt{2}\sqrt{\mu}\,\sinh 2\beta\,\sin\tilde{\alpha}}{(\mu+1)\cosh 2\beta - \mu + 1} \\ \dfrac{-[(\mu-1)\cosh 2\beta - \mu - 1]\sin\tilde{\alpha} + \sqrt{2}\sqrt{\mu}\,\sinh 2\beta\,\cos\tilde{\alpha}}{(\mu+1)\cosh 2\beta - \mu + 1} \\ \dfrac{\sqrt{2}\sqrt{\mu}\,\sinh 2\beta}{(\mu+1)\cosh 2\beta - \mu + 1} \end{pmatrix}, \tag{6.269}$$

$$\hat{c} = \frac{\mu^2-1}{\mu^2+1}.$$

用以生成曲面 $\tilde{\Sigma}$ 的常曲率曲线是 $b =$ 常数, 或等价地, $t =$ 常数.

对 $\mu > 0$, 生成曲线的演化可以解释为螺旋线上孤立子的匀速运动. 这由 ED

$$\tilde{\tau} = e^{-2\tilde{\varphi}}, \quad e^{\tilde{\varphi}} = \frac{\mu + \tanh^2 \beta}{\mu \tanh^2 \beta + 1}, \qquad (6.270)$$
$$\tilde{s} = s + 2 \arctan \zeta, \quad \tilde{b} = b$$

给出, 其中 ED 方程的解以 (6.263) 式给出的 s 和 b 为参数. 一个典型的生成曲线以及曲面 Σ 和 $\tilde{\Sigma}$ 见图 6.4. 由表达式

$$(\tilde{x}^1)^2 + (\tilde{x}^2)^2 = \frac{1}{4} + 8\mu^2 \frac{\mu^2 - 1}{(\mu^2+1)^2} \frac{\cosh 2\beta}{[(\mu+1)\cosh 2\beta - \mu + 1]^2} \qquad (6.271)$$

(其中 $\tilde{\boldsymbol{r}} = (\tilde{x}^1, \tilde{x}^2, \tilde{x}^3)^{\mathrm{T}}$) 可以看出, 当 $\mu > 1$ 时, 曲面 $\tilde{\Sigma}$ 限制在种子柱面 Σ 之外, 而当 $\mu < 1$ 时, 它在 Σ 之内.

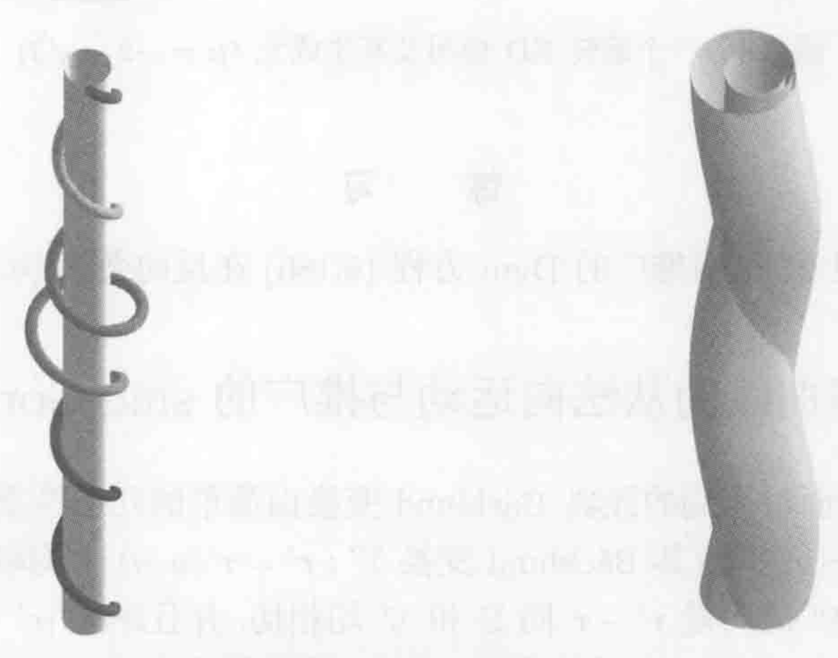


图 6.4 ED 曲面及其常曲率生成曲线 ($\mu = 2$)

另一方面, 对 $\mu < 0$, 解 (6.270) 对两个独立变量都是周期的. 事实上, 由位置向量 (6.269) 式得, 如果

$$\frac{t - \frac{1}{2}\tilde{\alpha}}{\beta} = 常数, \qquad (6.272)$$

那么 $\tilde{\Sigma}$ 是一个旋转曲面, 而当

$$\mu = -2 \pm \sqrt{3} \qquad (6.273)$$

时上述条件确实成立. 一个旋转 ED 曲面及其生成元见图 6.5. 同 $\mu > 0$ 的情形不同, 现在生成元同种子柱面 Σ 是相交的.

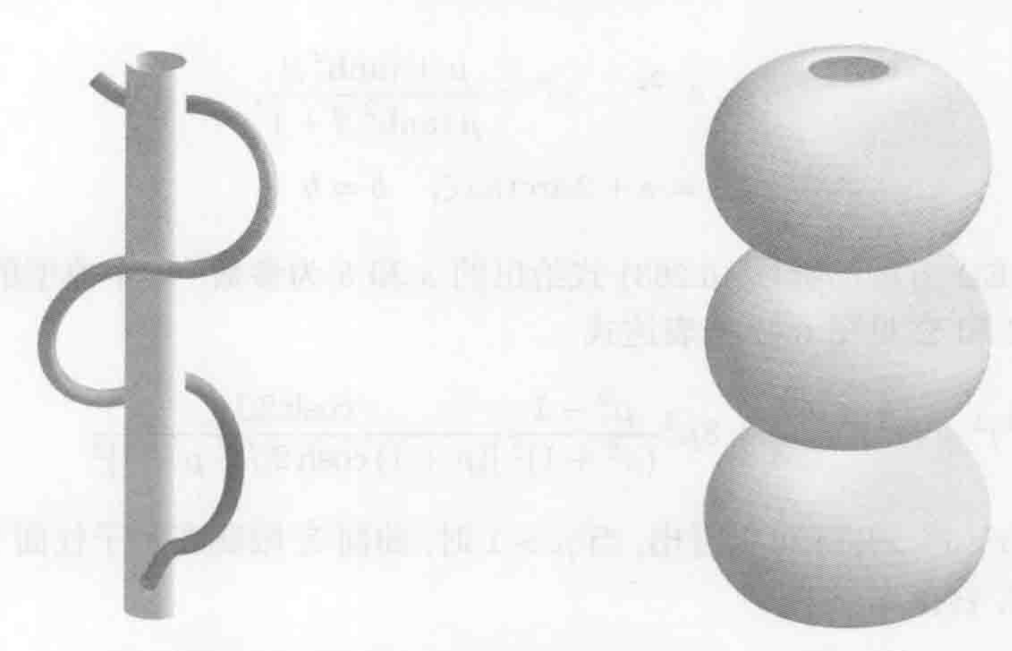


图 6.5　一个旋转 ED 曲面及其生成元 ($\mu = -2-\sqrt{3}$)

练　　习

1. 利用定理 21 证明推广的 Dym 方程 (6.186) 在反向变换 (6.193) 下不变.

6.6　常挠率曲线的从法向运动与推广的 sine-Gordon 方程组

构造伪球曲面时用到的经典 Bäcklund 变换由简单的几何性质所刻画, 如果伪球曲面 $\Sigma : \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u,v)$ 及其 Bäcklund 变换 $\Sigma' : \boldsymbol{r}' = \boldsymbol{r}'(u,v)$ 上均取渐近坐标, 则连接对应点 P 和 P' 的向量 $\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}$ 同 Σ 和 Σ' 均相切, 并且距离 $|\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}|$ 以及对应点的法向 $\boldsymbol{N}$ 和 $\boldsymbol{N}'$ 之间的夹角均为常数. 现在, 我们将看到, 对于常挠率曲线的纯从法向运动扫出的曲面, 它的 Bäcklund 变换也有如此简单的性质.[4]

6.6.1　推广的 sine-Gordon 方程组

对于具有常挠率 τ 的曲线的纯从法向运动扫出的曲面, Gauss-Mainardi-Codazzi 方程组 (6.183) 就是

$$\begin{gathered}(2g^{1/2}\tau)_s + \kappa_b = 0,\\ \left(\frac{(g^{1/2})_{ss} - \tau^2 g^{1/2}}{\kappa}\right)_s + \kappa (g^{1/2})_s = 0.\end{gathered} \tag{6.274}$$

令

$$q = -2g^{1/2}\tau, \quad \rho = \frac{q_{ss} - \tau^2 q}{\kappa}, \tag{6.275}$$

则有

$$\boxed{\begin{gathered} q_s = \kappa_b, \quad \rho_s + \kappa q_s = 0, \\ q_{ss} = \tau^2 q + \rho\kappa. \end{gathered}} \tag{6.276}$$

它有积分

$$q_s^2 + \rho^2 - \tau^2 q^2 = \tilde{c}, \qquad \tilde{c} = \tilde{c}(b). \tag{6.277}$$

若取 $\tilde{c} = 1$, 则可写出参数方程

$$q_s = \sin\sigma\cosh\xi, \quad \rho = \cos\sigma\cosh\xi, \quad \tau q = \sinh\xi, \tag{6.278}$$

从而方程组 (6.276) 成为

$$\begin{gathered} \xi_s = \tau\sin\sigma, \\ \sigma_{sb} - \tau(\cos\sigma\tanh\xi)_b = \sin\sigma\cosh\xi. \end{gathered} \tag{6.279}$$

我们将方程组 (6.279) 或等价的 (6.276) 式称为*推广的 sine-Gordon 方程组*[339], 在形式极限 $\tau = \xi = 0$ 下, 它变为经典的 sine-Gordon 方程. 这个方程组相应于具有曲率

$$\kappa = \sigma_s - \tau\cos\sigma\tanh\xi \tag{6.280}$$

的曲线以速度

$$\boldsymbol{r}_b = -\frac{q}{2\tau}\boldsymbol{b} \tag{6.281}$$

作纯从法向运动.

6.6.2 基本形式和 $su(2)$ 线性表示

由运动 (6.281) 扫出并联系于 $\tau = 1$ 时推广的 sine-Gordon 方程组的曲面有基本形式

$$\begin{gathered} \mathrm{I} = \mathrm{d}s^2 + \frac{1}{4}q^2\,\mathrm{d}b^2, \\ \mathrm{II} = -\kappa\,\mathrm{d}s^2 - q\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}b + \frac{1}{4}q\rho\,\mathrm{d}b^2, \end{gathered} \tag{6.282}$$

而 Gauss-Weingarten 方程组为

$$\begin{gathered} \begin{pmatrix} \boldsymbol{t} \\ \boldsymbol{n} \\ \boldsymbol{b} \end{pmatrix}_s = \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{t} \\ \boldsymbol{n} \\ \boldsymbol{b} \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} \boldsymbol{t} \\ \boldsymbol{n} \\ \boldsymbol{b} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & q & -q_s \\ -q & 0 & -\rho \\ & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{t} \\ \boldsymbol{n} \\ \boldsymbol{b} \end{pmatrix}. \end{gathered} \tag{6.283}$$

推广的 sine-Gordon 方程组的含参数的线性表示可以用 Estabrook 和 Wahlquist[123, 378] 提出的*延拓方法*产生. 延拓方法的基础是 Cartan 的微分形式计算[68], 它给出了寻找 1+1 维可积系统的 Lax 对的部分算法. 这里我们仅指出, 它给出了线性表示

$$\begin{aligned} \Phi_s &= \frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix} 0 & \kappa \\ -\kappa & 0 \end{pmatrix} + \mathrm{i}\lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right]\Phi, \\ \Phi_b &= \frac{1}{2(1+\lambda^2)}\left[\mathrm{i}\lambda \begin{pmatrix} -\rho & q_s \\ q_s & \rho \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & q \\ -q & 0 \end{pmatrix}\right]\Phi, \end{aligned} \tag{6.284}$$

此线性表示在推广的 sine-Gordon 方程组成立时是相容的. $\lambda = 1$ 时, 在对应

$$D_1 \simeq -e_2, \quad D_2 \simeq -e_3, \quad D_3 \simeq e_1 \tag{6.285}$$

下, $su(2)$ Lax 对 (6.284) 等价于 Gauss-Weingarten 方程 (6.283).

Lax 对 (6.284) 的 "空间部分" 构成以前讨论过的一类重要的 AKNS 可积系统 ——mKdV 梯队的散射问题, 该系统中的典型方程是

$$\theta_t = \theta_{sss} + \frac{1}{2}\theta_s^3. \tag{6.286}$$

角度 θ 就是与守恒律 $(6.276)_1$ 相联系的势, 即

$$\kappa = \theta_s, \quad q = \theta_b, \tag{6.287}$$

从而 mKdV 方程 (6.286) 是推广的 sine-Gordon 方程组

$$\left(\frac{\theta_{bss} - \theta_b}{\theta_s}\right)_s + \theta_s\theta_{bs} = 0 \tag{6.288}$$

的一个对称.

6.6.3 Bäcklund 变换

利用 Sym-Tafel 公式, 从线性表示 (6.284) 可以重新得到基本形式 (6.282). 因此, 在曲面层次上, 矩阵 Darboux 变换特别简单. 可直接验证下列定理.

定理 26 (Bäcklund 的经典变换的类似)　*Gauss-Weingarten 方程组* (6.283) *和推广的 sine-Gordon 方程* (6.288) *在变换*

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{r} \to \tilde{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{r} + \frac{2\mu}{1+\mu^2}(\cos\varphi\,\boldsymbol{t} - \sin\varphi\,\boldsymbol{n}), \\ &\theta \to \tilde{\theta} = 2\varphi - \theta \end{aligned} \tag{6.289}$$

下保持形式不变. 这里函数 φ 是相容的方程组

$$\begin{aligned}
&\varphi_s = \kappa + \mu \sin\varphi, \\
&\varphi_b = \frac{1}{1-\mu^2}(\mu q_s \cos\varphi - \mu\rho\sin\varphi + q)
\end{aligned} \tag{6.290}$$

的解, μ 是任意的 (Bäcklund) 参数. 连接曲面 Σ 和 $\tilde{\Sigma}$ 上对应点的向量 $\tilde{\boldsymbol{r}} - \boldsymbol{r}$ 同时落在 $(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{n})$ 平面和 $(\tilde{\boldsymbol{t}}, \tilde{\boldsymbol{n}})$ 平面上, 并且距离 $|\tilde{\boldsymbol{r}} - \boldsymbol{r}|$ 是常数, 从法向 $\boldsymbol{b}$ 和 $\tilde{\boldsymbol{b}}$ 之间的夹角也是常数, 且

$$\tilde{\boldsymbol{b}} \cdot \boldsymbol{b} = \frac{1-\mu^2}{1+\mu^2}. \tag{6.291}$$

令

$$\varphi = 2\arctan\left(\frac{\phi^1}{\phi^2}\right), \tag{6.292}$$

则相容的方程组 (6.290) 可以线性化, 这里 $\phi = (\phi^1\ \phi^2)^{\mathrm{T}}$ 是 (6.284) 式当 $\lambda = -\mathrm{i}\mu$ 时的向量值解. 对称性导致 $\tilde{\boldsymbol{r}} - \boldsymbol{r}$ 同 $\boldsymbol{b}$ 和 $\tilde{\boldsymbol{b}}$ 都正交, 而简单计算就可以得出关系 (6.291). 又注意到利用变换式 $(6.289)_2$ 可消去非线性 Lax 对 (6.290) 中的伪势 φ. 这样, 我们就得到了经典 Bäcklund 变换的类似结果. 特别地, Bäcklund 变换的空间部分为

$$\left(\frac{\tilde{\theta} - \theta}{2}\right)_s = \mu \sin\left(\frac{\tilde{\theta} + \theta}{2}\right), \tag{6.293}$$

它对整个 mKdV 梯队都成立.

将上述 Bäcklund 变换作用于直线 (退化曲面) 就生成最简单的 Hasimoto 曲面 (参见第 4 章). 如果取螺旋线生成的柱面作为种子曲面 Σ, 那么如同 ED 方程的情形一样, 新的曲面 $\tilde{\Sigma}$ 由孤立子沿螺旋线运动扫出.

6.6.4 Bianchi 变换的类似和对偶曲面

在第 1 章中我们已经看到, 伪球曲面的经典 Bäcklund 变换可以看作 Bianchi 的变换的推广, 而在 Bianchi 的变换中, 假设了伪球曲面 Σ 和它的变换 Σ' 在对应点的法向 $\boldsymbol{N}$ 和 $\boldsymbol{N}'$ 互相正交. 在由推广的 sine-Gordon 方程组决定的曲面上, 类似于 Biahchi 的假设是与两个曲面 Σ 和 Σ' 相联系的从法向量互相正交, 即

$$\boldsymbol{b}' \cdot \boldsymbol{b} = 0. \tag{6.294}$$

由 (6.291) 式, 可以在定理 26 给出的变换中取 $\mu = \pm 1$ 以满足此假设. 然而, 即使变换 (6.289) 和 $(6.290)_1$ 在形式上允许取 $\mu = \pm 1$, φ 的 b 演化 $(6.290)_2$ 无意义. 于是, 需要修改 $(6.290)_2$ 式以使得定理 26 在 $\mu = \pm 1$ 时仍成立, 这对于推广的 sine-Gordon 曲面的可积离散模型是十分重要的[328], 这时有方程组

$$\left(\frac{\theta' - \theta}{2}\right)_s = \epsilon \sin\left(\frac{\theta' + \theta}{2}\right), \quad \epsilon = \pm 1$$

$$\theta_{bs} = c\sin\left(\frac{\theta' + \theta}{2}\right) - \epsilon\theta_b\cos\left(\frac{\theta' + \theta}{2}\right), \tag{6.295}$$

下面将看到它与推广的 sine-Gordon 方程 (6.288) 等价. $(6.295)_1$ 式同 $\mu = \epsilon$ 时的 Bäcklund 关系 (6.293) 一致.

记 θ 和 θ' 是 (6.295) 式的解. $(6.295)_2$ 式对 s 求导并将 $(6.295)_1$ 式中的 θ'_s 代入得

$$\left(\frac{\theta_{bss} - \theta_b}{\theta_s}\right)^2 + \theta_{bs}^2 - \theta_b^2 = c^2, \tag{6.296}$$

这就是用 θ 表示的首次积分 (6.277). 另一方面, 对 $(6.295)_1$ 式求导得

$$\theta'_{bs} = c\sin\left(\frac{\theta' + \theta}{2}\right) + \epsilon\theta'_b\cos\left(\frac{\theta' + \theta}{2}\right). \tag{6.297}$$

于是, 方程组 (6.295) 在离散变换 $(\theta, \theta', \epsilon) \to (\theta', \theta, -\epsilon)$ 下不变. 所以, θ 和 θ' 都是推广的 sine-Gordon 方程 (6.288) 的解. 注意到在形为 $\theta \to \theta + f(s)$, $\theta' \to \theta' + f(s)$ 的变换下, 方程 $(6.295)_2$ 和 (6.297) 等价于方程组 (6.295).

反之, 对于满足首次积分 (6.296) 的推广的 sine-Gordon 方程的解 θ, 定义函数 φ 满足

$$\cos\varphi = \frac{c\rho - \epsilon q q_s}{c^2 + q^2}, \quad \sin\varphi = \frac{c q_s + \epsilon\rho q}{c^2 + q^2}, \tag{6.298}$$

则易证

$$\begin{aligned} \varphi_s &= \kappa + \epsilon\sin\varphi, \\ q_s &= c\sin\varphi - \epsilon q\cos\varphi. \end{aligned} \tag{6.299}$$

当

$$\theta' = 2\varphi - \theta \tag{6.300}$$

时这就是方程组 (6.295). 于是, θ' 是推广的 sine-Gordon 方程的另一个解. 可以直接验证下述定理.

定理 27 (Bianchi 的经典变换的类似) *设 θ 是满足首次积分 (6.296) 的推广的 sine-Gordon 方程 (6.288) 的解, $\Sigma : \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(s, b)$ 是对应的曲面, 那么对偶曲面的位置向量 $\boldsymbol{r}'$ 为*

$$\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{r} + \epsilon(\cos\varphi\,\boldsymbol{t} - \sin\varphi\,\boldsymbol{n}), \tag{6.301}$$

其中 φ 由 (6.298) 式定义. 推广的 sine-Gordon 方程的对应解 θ' 是

$$\theta' = 2\varphi - \theta, \tag{6.302}$$

从法向量 $\boldsymbol{b}'$ 满足

从而

$$b' \cdot b = 0. \tag{6.304}$$

于是我们知道, 如果 b 演化 $(6.290)_2$ 式改为显式 (6.298), 则定理 27 与 $\mu = \pm 1$ 时的定理 26 相一致. 剩下的关系式 $(6.290)_1$ 是恒等式.

练　习

1. 证明推广的 sine-Gordon 方程组的变形 (6.288) 在 Bäcklund 变换

$$\theta \to \theta' = 2\varphi - \theta$$

下不变, 这里 φ 由 (6.298) 式给出.

第 7 章　Bäcklund 变换与 Darboux 矩阵的联系

1882 年, Darboux 对现在所称的一维 Schrödinger 方程引入了著名的变换[92]. 作为 1878 年得到的 Moutard 变换[264] 的特殊情形, Darboux 的变换可以从线性的 Schrödinger 方程的一个种子势函数生成新的解.

很久以后, 1955 年, 牛津的数学家 Crum[91] 研究了经典 Darboux 变换的谱的性质. 又过了二十年, Wadati 等[375] 用他们所称的 Crum 变换, 不但能给出典型的 1+1 维孤立子方程的 Bäcklund 变换, 还能给出它们的守恒律. 经典 Darboux 变换在孤立子理论中的作用在 Calogero 和 Degasperis 关于谱变换的专著[65] 的附录中有详细介绍.

Zakharov 和 Shabat[395] 最早将 Darboux 矩阵方法联系于穿衣方法, 并在书[393] 中作了介绍. 对于 Darboux 矩阵方法作出重要工作的有 Matveev 和 Salle (详见他们的专著[251]) 以及 Neugebauer 和 Meinel 的专著[270]. Levi 等[232, 233] 将 Bäcklund 变换、经典 Darboux 变换与穿衣方法联系起来, 其中 Darboux 矩阵方法起了关键的作用. 最近, Cieśliński 给出了将 Darboux 矩阵方法用于非等谱问题的漂亮结果[82]. 谷超豪等最近出版了一本关于 Darboux 变换及其几何应用的专著[155].

本章从几何观点讨论矩阵 Darboux 变换和 Bäcklund 变换的重要联系.

7.1　伪球曲面和非线性 Schrödinger 曲面的联系

我们已经知道如何从孤立子方程线性表示的形式不变性来导出 Bäcklund 变换. 从几何观点来看, Gauss-Mainardi-Codazzi 方程组中包含的孤立子方程的 Bäcklund 变换由相应线性的 Gauss-Weingarten 方程组的形式不变性得到. 这个由线性表示的形式不变性产生孤立子方程的形式不变性的性质反映在矩阵 Darboux 变换中. 我们将看到, 伪球曲面和 NLS 曲面的自 Bäcklund 变换实质就是矩阵 Darboux 变换. 下节中, 将曲面的 Bäcklund 变换和矩阵 Darboux 变换之间的联系推广到 AKNS 系统中在几何上有重要应用的特殊情形.

7.1.1　伪球曲面

为建立伪球曲面的经典 Bäcklund 变换 (1.52) 和矩阵 Darboux 变换的联系, 需要用到 Sym-Tafel 关系 (6.22). 我们已经知道, 在 Sym-Tafel 关系中, 孤立子曲面的

伪球曲面标准的 AKNS 表示由 (2.32) 式给出, 如果取 $\rho = 1$ 并略去 "~", 则有

$$\begin{aligned} \Phi_u &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \mathrm{i}\lambda & \omega_u \\ -\omega_u & -\mathrm{i}\lambda \end{pmatrix}\Phi = g_1\Phi, \\ \Phi_v &= \frac{\mathrm{i}}{2\lambda}\begin{pmatrix} -\cos\omega & \sin\omega \\ \sin\omega & \cos\omega \end{pmatrix}\Phi = g_2\Phi, \end{aligned} \tag{7.1}$$

它的相容性条件是 sine-Gordon 方程

$$\omega_{uv} = \sin\omega. \tag{7.2}$$

由 (6.32) 式得到基本形式

$$\begin{aligned} \mathrm{I} &= \mathrm{d}u^2 + 2\lambda^{-2}\cos\omega\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v + \lambda^{-4}\,\mathrm{d}v^2, \\ \mathrm{II} &= 2\lambda^{-1}\sin\omega\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v, \end{aligned} \tag{7.3}$$

这决定了具有 Gauss曲率

$$\mathcal{K} = -\lambda^2 \tag{7.4}$$

的伪球曲面.

对于具有 Gauss 曲率 $\mathcal{K} = -1$ 的伪球曲面, $\rho = 1$ 时的基本形式 (1.24) 可以通过标度变换

$$u|_{\mathcal{K}=-1} = \lambda u, \quad v|_{\mathcal{K}=-1} = \lambda^{-1}v, \quad \boldsymbol{r}|_{\mathcal{K}=-1} = \lambda\boldsymbol{r} \tag{7.5}$$

得到. 利用这些关系以及 (1.52) 式, 作用在具有基本形式 (7.3) 的伪球曲面上的经典 Bäcklund 变换为

$$\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{r} + 2\frac{\mu}{\lambda^2+\mu^2}\left[\frac{\sin(\omega-\varphi)}{\sin\omega}\boldsymbol{r}_u + \lambda^2\frac{\sin\varphi}{\sin\omega}\boldsymbol{r}_v\right], \tag{7.6}$$

其中由 (1.36), (1.37) 式, "旋转角" φ 是相容的方程组

$$\varphi_u = \omega_u + \mu\sin\varphi, \quad \varphi_v = \mu^{-1}\sin(\varphi-\omega) \tag{7.7}$$

的解, $\mu = \beta\lambda$.

下面考虑矩阵 $\{e_1, e_2, e_3\}$, 其中

$$e_i = \frac{\sigma_i}{2\mathrm{i}} \tag{7.8}$$

在 2.2 节中引入. 这组向量关于 $su(2)$ 内积

标准正交, 即

$$g(e_i, e_j) = \delta_{ij}. \tag{7.10}$$

由 $su(2)$ 和 $so(3)$ 之间的同构 (参见附录 A), 这组 2×2 矩阵 $\{e_i\}$ 对应于 $\mathbb{R}^3$ 中的标准正交向量 $\{\boldsymbol{e}_i\}$.

由 (6.19) 式,

$$r_{,i} = \Phi^{-1} g_{i,\lambda} \Phi, \quad i = 1, 2, \tag{7.11}$$

其中 $r = \boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{e} = x^1(u,v)e_1 + x^2(u,v)e_2 + x^3(u,v)e_3$ 是位置矩阵. 将 (7.1) 式给出的 g_i 代入 (7.11) 式得

$$r_u = -t_3, \quad r_v = \lambda^{-2}(\sin\omega\, t_1 - \cos\omega\, t_3), \tag{7.12}$$

这里 "运动" 标准正交标架 $\{t_i\}$ 定义为

$$t_i = \Phi^{-1} e_i \Phi. \tag{7.13}$$

如果写成

$$t_i = \boldsymbol{t}_i \cdot \boldsymbol{e}, \quad \boldsymbol{e} = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix}, \tag{7.14}$$

则由 $su(2)$-$so(3)$ 同构得 $\{\boldsymbol{t}_1, \boldsymbol{t}_2, \boldsymbol{t}_3\}$ 构成了 $\mathbb{R}^3$ 的标准正交基. 由 1.2 节中关于 $\{\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}\}$ 的标准正交关系 (1.28) 以及 (7.12) 式,

$$\boldsymbol{A} = -\boldsymbol{t}_3, \quad \boldsymbol{B} = \boldsymbol{t}_1, \quad \boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} = -\boldsymbol{t}_3 \times \boldsymbol{t}_1 = -\boldsymbol{t}_2. \tag{7.15}$$

前面给出了特征函数 Φ 的简单几何解释. (7.13) 式表明, 标准正交标架 $\{\boldsymbol{t}_i\}$ 同固定的标架 $\{\boldsymbol{e}_i\}$ 之间通过旋转

$$\boldsymbol{t}_i = {\Phi^{(3)}}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{e}_i \tag{7.16}$$

相联系, 其中 $\Phi^{(3)}$ 是 $so(3)$ 线性表示的 $SO(3)$ 特征函数.

Bäcklund 变换 (7.6) 的矩阵形式为

$$r' = r + 2\frac{\mu}{\lambda^2 + \mu^2}(\sin\varphi\, t_1 - \cos\varphi\, t_3). \tag{7.17}$$

利用 (7.13) 式和 Sym-Tafel 公式, Bäcklund 变换可以重写为

$$\begin{aligned} r' &= r - \frac{\mathrm{i}\mu}{\lambda^2 + \mu^2}\Phi^{-1} Q_0 \Phi \\ &= \Phi^{-1}\Phi_\lambda + \Phi^{-1} Q^{-1} \Phi - \frac{\lambda}{\lambda^2 + \mu^2}\mathbb{1} \end{aligned} \tag{7.18}$$

其中

$$Q_0 = \begin{pmatrix} -\cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}, \quad Q = \lambda\mathbb{1} + \mathrm{i}\mu Q_0, \quad p = \frac{1}{\sqrt{\lambda^2+\mu^2}}. \tag{7.19}$$

将 Sym-Tafel 关系 $r' = \Phi'^{-1}\Phi'_\lambda$ 代入 (7.18) 式并积分得

$$\Phi' = pQ_1Q\Phi, \tag{7.20}$$

其中 $Q_1(u,v) \in SU(2)$ 是不依赖于 λ 的任意矩阵. 适当选取 Q_1 时, (7.20) 式使得 sine-Gordon 方程的线性表示的形式不变. 将 (7.20) 式给出的 Φ' 代入带撇的线性表示 (7.1) 给出

$$g_i'P = Pg_i + P_{,i}, \quad i = 1, 2, \tag{7.21}$$

其中 $P = Q_1Q$. 由于 sine-Gordon 方程的解 ω 和 ω' 与 λ 无关, (7.21) 式可按 λ 的幂次分别写出. 特别地, 对 $i = 1$, λ^2 的系数给出了交换子

$$[\sigma_3, Q_1] = 0, \tag{7.22}$$

而对 $i = 2$, 由 $\omega' = 2\varphi - \omega$ 得, λ^{-1} 的系数给出

$$Q_1 = \mathbb{1}. \tag{7.23}$$

于是, 与 λ 有关的规范变换 (7.20) 成为

$$\Phi \to \Phi' = p(\lambda\mathbb{1} + \mathrm{i}\mu Q_0)\Phi, \tag{7.24}$$

其中因子 $p(\lambda)$ 是为了保证 $\det\Phi' = 1$ 而使得带撇的 Sym-Tafel 公式成立. $p = p(\lambda)$ 仅作为一个归一化因子, 并不出现在 (7.21) 式中.

规范变换 (7.24) 中 $\Phi \to \Phi'$ 反映了矩阵 *Darboux* 变换的特征 [82,231−233,251,269] [270,319,393,395]. 规范矩阵 P 称为*Darboux* 矩阵, 这个名称的合理性源于变换 (7.24) 可以看作经典 Darboux 变换的矩阵推广.

为了在 7.2 节中讨论一般理论, 这里引入矩阵 Q_0 的另一种表示方式, 它依赖于旋转角 φ. 为此, 注意到方程组 (7.7) 可以通过变量代换

$$\varphi = 2\arctan\xi \tag{7.25}$$

变为一对相容的 Riccati 方程组, 于是, 旋转角满足的方程 (7.7) 可以线性化. 事实上, ξ 可以写为

其中 $\phi=(\phi_1\ \phi_2)^{\mathrm{T}}$ 是带参数 $\lambda=-\mathrm{i}\mu$ 的 Lax 对 (7.1) 的解.

如果用 ξ 表示, 则有

$$Q_0=\frac{1}{\xi^2+1}\begin{pmatrix}\xi^2-1 & 2\xi\\ 2\xi & -(\xi^2-1)\end{pmatrix}. \tag{7.27}$$

再利用 (7.26) 式得到[1]

$$Q_0=\Psi\sigma_3\Psi^{-1},\quad \Psi=\begin{pmatrix}\phi_1 & -\phi_2\\ \phi_2 & \phi_1\end{pmatrix}. \tag{7.28}$$

于是, 我们得到了一个重要事实, 即伪球曲面的经典 Bäcklund 变换可以完全用 $su(2)$ 线性表示的特征函数表示为

$$r'=r-\frac{\mathrm{i}\mu}{\lambda^2+\mu^2}\Phi^{-1}\Psi\sigma_3\Psi^{-1}\Phi, \tag{7.29}$$

这里用到了 (7.18) 式.

7.1.2 NLS 曲面

第 4 章中, 通过以 s 为参数的曲线 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s,t)$ 以速度

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{r}_t=\kappa\boldsymbol{b} \tag{7.30}$$

随时间演化导出了 NLS 方程. 曲线运动扫出的 NLS 孤立子曲面的第一、第二基本形式由 (4.26) 式和 (4.28) 式给出, 如果同 4.3 节中一样作替换 $t\leftrightarrow b$, 则有

$$\mathrm{I}=\mathrm{d}s^2+\kappa^2\,\mathrm{d}b^2, \tag{7.31}$$

$$\mathrm{II}=-\kappa\,\mathrm{d}s^2+2\kappa\tau\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}b+(\kappa_{ss}-\kappa\tau^2)\,\mathrm{d}b^2. \tag{7.32}$$

利用 Hasimoto 变换

$$q=\kappa e^{\mathrm{i}\int\tau\,\mathrm{d}s}, \tag{7.33}$$

相应的 Gauss-Mainardi-Codazzi 方程组成为 NLS 方程

$$\mathrm{i}q_b+q_{ss}+\frac{1}{2}|q|^2q=0. \tag{7.34}$$

4.3 节中, 在 $|\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}|$ 为常值的约束下, 要求基本形式 (7.31) 和 (7.32) 在形为 $\boldsymbol{r}'=\boldsymbol{r}+\alpha\boldsymbol{t}+\beta\boldsymbol{n}+\gamma\boldsymbol{b}$ 的位置向量变换下保持不变, 由此构造了 NLS 曲面的 Bäcklund 变换. 如果 $\Sigma:\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s,b)$ 是种子 NLS 曲面, 那么第二个 NLS 曲面的位置向量为[2]

[1] 需要注意的是, Ψ 本身并不是矩阵值特征函数. Ψ 的重要性见 7.2 节.

$$\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{r} + 2\frac{\Im(\lambda_0)}{|\lambda_0|^2}\left(\frac{|\tilde{\xi}|^2-1}{|\tilde{\xi}|^2+1}\boldsymbol{t} + \frac{2\Re(\tilde{\xi})}{|\tilde{\xi}|^2+1}\boldsymbol{n} + \frac{2\Im(\tilde{\xi})}{|\tilde{\xi}|^2+1}\boldsymbol{b}\right), \tag{7.35}$$

其中

$$\tilde{\xi} = \xi e^{-\mathrm{i}\int \tau \mathrm{d}s}, \quad \xi = \frac{\phi_1}{\phi_2}, \tag{7.36}$$

而特征函数 $\Phi|_{\lambda=\lambda_0} = (\phi_1\ \phi_2)^{\mathrm{T}}$ 满足 $\lambda=\lambda_0$ 时 NLS 方程的标准表示 (参见 (4.167) 式)

$$\begin{aligned} \Phi_s &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \mathrm{i}\lambda & q \\ -\bar{q} & -\mathrm{i}\lambda \end{pmatrix}\Phi = g_1\Phi, \\ \Phi_b &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \mathrm{i}\left(\frac{1}{2}|q|^2-\lambda^2\right) & \mathrm{i}q_s - \lambda q \\ \mathrm{i}\bar{q}_s + \lambda\bar{q} & -\mathrm{i}\left(\frac{1}{2}|q|^2-\lambda^2\right) \end{pmatrix}\Phi = g_2\Phi. \end{aligned} \tag{7.37}$$

我们已经知道, 可以取 $\lambda=0$ 时的特征函数从线性表示 (7.37) 得到基本形式 (7.31) 和 (7.32), 由此可从位置向量 $\boldsymbol{r}'$ 得到 $su(2)$ 表示 r'.

由 (6.19) 式, 具有基本形式 (7.31) 和 (7.32) 的 NLS 曲面的切向量 $\boldsymbol{r}_s$ 和 $\boldsymbol{r}_b$ 所相应的 $su(2)$ 矩阵 (取 $\lambda=0$) 为

$$\begin{aligned} r_s &= \Phi^{-1}g_{1,\lambda}\Phi = -t_3, \\ r_b &= \Phi^{-1}g_{2,\lambda}\Phi = \Re(q)t_2 + \Im(q)t_1, \end{aligned} \tag{7.38}$$

其中矩阵 t_i 仍定义为

$$t_i = \Phi^{-1}e_i\Phi, \tag{7.39}$$

且 (7.38) 式中它在 $\lambda=0$ 取值.

由关系式[3] $r_s = \mathfrak{t}$ 和 $r_b = \kappa\mathfrak{b}$ 得到单位切向量和单位从法向的 $su(2)$ 形式为

$$\mathfrak{t} = -t_3, \quad \mathfrak{b} = \cos\left(\int\tau\,\mathrm{d}s\right)t_2 + \sin\left(\int\tau\,\mathrm{d}s\right)t_1, \tag{7.40}$$

而主法向量为

$$\mathfrak{n} = \sin\left(\int\tau ds\right)t_2 - \cos\left(\int\tau ds\right)t_1. \tag{7.41}$$

容易验证 (7.40) 和 (7.41) 式给出的 $(\mathfrak{t},\mathfrak{n},\mathfrak{b})$ 关于内积 (7.9) 和通常的矩阵交换构成右手的标准正交标架. 将 $\mathfrak{t},\mathfrak{n},\mathfrak{b}$ 代入 $su(2)$ 形式的 Bäcklund 变换 (7.35), 得到

$$r' = r - 2\frac{\Im(\lambda_0)}{|\lambda_0|^2}\left(\frac{2\Re(\xi)}{|\xi|^2+1}t_1 - \frac{2\Im(\xi)}{|\xi|^2+1}t_2 + \frac{|\xi|^2-1}{|\xi|^2+1}t_3\right). \tag{7.42}$$

[3]这里用哥特体表示单位向量 $\mathfrak{t},\mathfrak{n},\mathfrak{b}$ 的 $su(2)$ 对应.

对于与线性表示 (7.37) 相联系的 NLS 曲面, 还需要得到 $\lambda \neq 0$ 时 $su(2)$ 形式的 Bäcklund 变换. 为此, 注意到这个线性表示可以通过将 Lie 点对称应用到 $(7.37)_{\lambda=0}$ 上得到. NLS 方程在变量代换 (参见 4.2 节)

$$s \to s^* = s + 2\lambda b, \quad b \to b^* = b, \quad q \to q^* = q e^{\mathrm{i}\lambda(s+\lambda b)} \tag{7.43}$$

下不变, 其中 λ 是一个实常数. 这个不变性加上规范变换

$$\Phi^* = G\Phi|_{\lambda=0}, \quad G = \begin{pmatrix} e^{\frac{1}{2}\mathrm{i}\lambda(s+\lambda b)} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{1}{2}\mathrm{i}\lambda(s+\lambda b)} \end{pmatrix} \tag{7.44}$$

恰好生成带星号的 (7.37) 式, 即

$$\begin{aligned} \Phi^*_{s^*} &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \mathrm{i}\lambda & q^* \\ -\bar{q}^* & -\mathrm{i}\lambda \end{pmatrix}\Phi^* = g_1^*\Phi^*, \\ \Phi^*_{b^*} &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \mathrm{i}\left(\frac{1}{2}|q^*|^2 - \lambda^2\right) & \mathrm{i}q^*_{s^*} - \lambda q^* \\ \mathrm{i}\bar{q}^*_{s^*} + \lambda\bar{q}^* & -\mathrm{i}\left(\frac{1}{2}|q^*|^2 - \lambda^2\right) \end{pmatrix}\Phi^* = g_2^*\Phi^*. \end{aligned} \tag{7.45}$$

容易验证 $\phi^* = G\Phi|_{\lambda=\lambda_0}$ 是 $\lambda \to \lambda_0^* = \lambda + \lambda_0$ 时方程组 (7.45) 的解.

从不带星号的变量到带星号的变量的变换只是相当于改变同一个曲面上的坐标系, 即 $\boldsymbol{r}^*(s^*, b^*) = \boldsymbol{r}(s, b)$. 通过引入参数 λ, 新的速度条件 (4.81), 即

$$\boldsymbol{v}^* = \boldsymbol{r}_{b^*} = \kappa\boldsymbol{b} - 2\lambda\boldsymbol{t}, \tag{7.46}$$

在沿 s^* 参数曲线的切向有常值分量. 需要强调的是, s 参数曲线和 s^* 参数曲线是相同的. 于是, 标准正交标架 $\{\boldsymbol{t}, \boldsymbol{n}, \boldsymbol{b}\}$ 在变换 (7.43) 下保持不变.

考虑带星号的 (7.39) 式, 即

$$t_i^* = \Phi^{*-1} e_i \Phi^* = \Phi^{-1}|_{\lambda=0}\, G^{-1} e_i G\, \Phi|_{\lambda=0}, \tag{7.47}$$

标准正交标架 $\{t_i\}$ 和 $\{t_i^*\}$ 由

$$\begin{aligned} t_1^* &= \sin z\, t_2 + \cos z\, t_1, \\ t_2^* &= \cos z\, t_2 - \sin z\, t_1, \\ t_3^* &= t_3 \end{aligned} \tag{7.48}$$

相联系, 其中 $z = \lambda(s + \lambda b)$. 于是, Bäcklund 变换 (7.42) 成为

$$r' = r - 2\frac{\Im(\lambda_0^*)}{\cdots}\left(\frac{2\Re(\xi^*)}{\cdots}t_1^* - \frac{2\Im(\xi^*)}{\cdots}t_2^* + \frac{|\xi^*|^2 - 1}{\cdots}t_3^*\right), \tag{7.49}$$

其中 $\xi^* = e^{iz}\xi$, 并设 λ 是实的.

引入矩阵

$$\Psi = \begin{pmatrix} \phi_1^* & -\bar{\phi}_2^* \\ \phi_2^* & \bar{\phi}_1^* \end{pmatrix}, \tag{7.50}$$

NLS 曲面的 Bäcklund 变换 (7.49) 可以更紧凑地写为

$$r' = r + \frac{i\Im(\lambda_0^*)}{|\lambda - \lambda_0^*|^2}\Phi^{*-1}\Psi\sigma_3\Psi^{-1}\Phi^*, \tag{7.51}$$

它同伪球曲面的 Bäcklund 变换 (7.29) 非常相像. 事实上, 如果 Ψ 是实的并且 λ_0^* 是纯虚的, 则 (7.29) 式和 (7.51) 式的形式相同. 下节中将看到, 对整个满足 $r = -\bar{q}$ 的 AKNS 梯队相应的曲面, Bäcklund 变换均有 (7.51) 式的形式, 而 (7.29) 式是 $\bar{q} = q$ 时的约化形式.

由上面的讨论, (7.45) 式的特征函数 Φ^* 的 Bäcklund 变换是 (7.24) 式的"复化". 同 (7.28) 式中一样, 记

$$Q_0 = \Psi\sigma_3\Psi^{-1}, \tag{7.52}$$

其中 Ψ 由 (7.50) 式给出, 则 (7.51) 式和 Sym-Tafel 公式给出

$$\begin{aligned} r' &= r + \frac{i\Im(\lambda_0^*)}{|\lambda - \lambda_0^*|^2}\Phi^{*-1}Q_0\Phi^* \\ &= \Phi^{*-1}\Phi_\lambda^* + \Phi^{*-1}[(\lambda - \Re(\lambda_0^*))\mathbb{1} - i\Im(\lambda_0^*)Q_0]^{-1}\Phi^* - \frac{\lambda - \Re(\lambda_0^*)}{|\lambda - \lambda_0^*|^2}\mathbb{1} \\ &= (pQ\Phi^*)^{-1}(pQ\Phi^*)_\lambda, \end{aligned} \tag{7.53}$$

其中

$$Q = (\lambda - \Re(\lambda_0^*))\mathbb{1} - i\Im(\lambda_0^*)Q_0, \quad p = \frac{1}{|\lambda - \lambda_0^*|}. \tag{7.54}$$

同 (7.20) 式类似, 将 Sym-Tafel 关系 $r' = \Phi^{*\prime-1}\Phi_\lambda^{*\prime}$ 代入 (7.53) 式并积分得

$$\Phi^{*\prime} = pQ_1Q\Phi^*. \tag{7.55}$$

再将 (7.55) 式给出的 $\Phi^{*\prime}$ 代入带撇的线性表示 (7.45) 得到与 (7.21) 式类似的

$$g_i^{*\prime}P = Pg_i^* + P_{,i}, \quad i = 1, 2, \tag{7.56}$$

其中 $P = Q_1Q$. 由 (7.56) 式看到, 同伪球曲面情形一样, $Q_1 = \mathbb{1}$. 于是, 对 NLS 曲面, 在特征函数层次上 Bäcklund 变换的作用可以表示为矩阵 Darboux 变换

至此, 伪球曲面和 NLS 曲面上的 Bäcklund 变换可以解释为作用在 $su(2)$ 表示下的特征函数上的矩阵 Darboux 变换. 下节中, 要给出一组代数条件, 它对于满足 $r=-\bar{q}$ 的 AKNS 梯队唯一确定了基本矩阵 Darboux 变换. 这些条件给出了具有特殊形式 (7.24) 和 (7.57) 的解.

练　习

1. 设两个 $su(2)$ 矩阵 S 和 T 相似:

$$T=\Phi^{-1}S\Phi,\quad \Phi\in SU(2).$$

证明由

$$S=\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{e},\quad T=\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{e}$$

给出的向量 $\boldsymbol{S}$ 和 $\boldsymbol{T}$ 通过旋转

$$\boldsymbol{T}=\Phi^{(3)^{\mathrm{T}}}\boldsymbol{S}$$

相联系 (参见附录 A), 其中旋转矩阵为

$$\Phi_{ik}^{(3)}=-2\,\mathrm{Tr}\,(\Phi^{-1}e_i\Phi e_k)\in SO(3).$$

2. (a) 证明 NLS 方程 (7.34) 在变换

$$s\to s-2cb,\quad b\to b,\quad q\to qe^{-\mathrm{i}c(s-cb)}$$

下保持不变, 其中 c 是实常数.

(b) 验证 NLS 线性表示 (7.37) 在前面的变量代换加上规范变换

$$\Phi\to\begin{pmatrix} e^{-\frac{1}{2}\mathrm{i}c(s-cb)} & 0\\ 0 & e^{\frac{1}{2}\mathrm{i}c(s-cb)}\end{pmatrix}\Phi$$

和参数变换 $\lambda\to\lambda+c$ 下保持不变.

7.2 AKNS 系统的 Darboux 矩阵, 诱导 Bäcklund 变换以及常距离性质

我们已经知道伪球曲面和 NLS 曲面的 Bäcklund 变换诱导了它们的线性表示在

$$\begin{aligned}\Phi\to\Phi'&=pP(\lambda)\Phi\\&=p(\lambda\mathbb{1}+P_0)\Phi\end{aligned}$$

下的规范不变性, 其中

$$Q_0 = \Psi\sigma_3\Psi^{-1}, \quad \Psi = \begin{pmatrix} \phi_1 & -\bar{\phi}_2 \\ \phi_2 & \bar{\phi}_1 \end{pmatrix}, \quad p = \frac{1}{|\lambda - \lambda_0|}, \tag{7.59}$$

$\Phi, \Phi|_{\lambda=\lambda_0} = (\phi_1\ \phi_2)^{\mathrm{T}}$ 是 AKNS 散射问题

$$\Phi_s = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \mathrm{i}\lambda & q \\ -\bar{q} & -\mathrm{i}\lambda \end{pmatrix}\Phi \tag{7.60}$$

分别取参数 λ, λ_0 时的解. 在伪球曲面情形, $q = \omega_s$, ϕ 是实的, 而 λ_0 是纯虚的. 变换矩阵 P 的形式由代数约束确定, 这些代数约束将由下面的定理 28 给出, 它们同整个满足 $r = -\bar{q}$ 的 AKNS 梯队的矩阵 Darboux 变换的构造相一致. 用 Sym-Tafel 公式可以将矩阵 Darboux 变换变为相关的 AKNS 曲面上的 Bäcklund 变换.

7.2.1 基本矩阵 Darboux 变换

变换矩阵 P 的构造由下列定理给出[269, 270]:

定理 28 (基本矩阵 Darboux 变换) 考虑线性的 2×2 矩阵方程

$$\Phi_s = g(\lambda)\Phi, \qquad \det\Phi = \text{非零常数}, \tag{7.61}$$

其中矩阵 $g(\lambda) \in sl(2)$ 的元素为 (复) 参数 λ 的 n 次多项式. 记 $\phi_{[1]}$ 和 $\phi_{[2]}$ 为对应于参数 $\lambda_1 \neq \lambda_2$ 的方程组 (7.61) 的两个已知向量值"特征函数", P_0 是与 λ 无关的 2×2 矩阵, $P(\lambda) = \lambda\mathbb{1} + P_0$ 是 2×2 矩阵, 它们由线性代数方程组

$$\begin{aligned} P(\lambda_1)\phi_{[1]} &= (\lambda_1\mathbb{1} + P_0)\phi_{[1]} = 0, \\ P(\lambda_2)\phi_{[2]} &= (\lambda_2\mathbb{1} + P_0)\phi_{[2]} = 0 \end{aligned} \tag{7.62}$$

唯一确定. 那么, 变换

$$\begin{aligned} \Phi \to\ \Phi' &= P(\lambda)\Phi, \\ g(\lambda) \to g'(\lambda) &= P(\lambda)g(\lambda)P^{-1}(\lambda) + P_s(\lambda)P^{-1}(\lambda) \end{aligned} \tag{7.63}$$

满足

(i) $g'(\lambda) \in sl(2)$,

(ii) (7.61) 式的多项式结构保持不变.

证明 (i) 由于 $g \in sl(2) \Leftrightarrow \mathrm{Tr}\,(g) = 0$, 有

$$\mathrm{Tr}\,(g) = \mathrm{Tr}\,(\Phi_s\Phi^{-1}) = [\ln(\det\Phi)]_s = 0. \tag{7.64}$$

因此, $\det\Phi =$ 常数. 下面不妨设 $\det\Phi = 1$.

现在,

$$\mathrm{Tr}\,(g') = \mathrm{Tr}\,(\Phi'_s \Phi'^{-1}) = [\ln(\det \Phi')]_s = [\ln(\det P)]_s, \tag{7.65}$$

其中

$$\det P(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) = 常数. \tag{7.66}$$

所以, $\mathrm{Tr}\,(g') = 0$, 从而 $g'(\lambda) \in sl(2)$.

(ii) 如果 $\Phi(\lambda)$ 是线性方程 (7.61) 的基本解, 则存在常向量 v_1 和 v_2 使得

$$\phi_{[i]} = \Phi(\lambda_i) v_i, \quad i = 1, 2, \tag{7.67}$$

其中 $\phi_{[i]}$ 是对应于参数 λ_i 的 (7.61) 式的特征函数, 它通过 (7.62) 式决定矩阵 P. 现在,

$$\Phi'(\lambda_i) v_i = P(\lambda_i)\Phi(\lambda_i) v_i = P(\lambda_i)\phi_{[i]} = 0, \tag{7.68}$$

由此得

$$\Phi'_s(\lambda_i) v_i = [\Phi'(\lambda_i) v_i]_s = 0, \tag{7.69}$$

从而 (参见练习 4)

$$\Phi'_s(\lambda_i)\hat{\Phi}'(\lambda_i) = 0, \tag{7.70}$$

其中 $\hat{\Phi}'$ 是 Φ' 的伴随矩阵, 满足 $\Phi'\hat{\Phi}' = \det \Phi' \,\mathbb{1}$. 另一方面,

$$\Phi'_s \hat{\Phi}' = P g \hat{P} + P_s \hat{P} \tag{7.71}$$

是 λ 的 $n+2$ 次多项式, 满足 $\Phi'_s(\lambda)\hat{\Phi}'(\lambda)\Big|_{\lambda=\lambda_i} = 0$, 从而有分解

$$\Phi'_s \hat{\Phi}' = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) g'(\lambda) = \det P\, g', \tag{7.72}$$

所以

$$\Phi'_s \Phi'^{-1} = \frac{\Phi'_s \hat{\Phi}'}{\det \Phi'} = g' \tag{7.73}$$

是矩阵值的 λ 的 n 次多项式. □

需要注意的是, 定理 28 给出的矩阵 Darboux 变换可以同与 λ 无关的规范变换

$$\Phi' \to \Phi'' = P_1 \Phi', \qquad \frac{\partial P_1}{\partial \lambda} = 0, \quad \det P_1 = 常数 \tag{7.74}$$

相复合. 这样的矩阵 P_1 在 NLS 特征函数梯队的矩阵 Darboux 变换中将起决定性的作用.

定理 28 容易推广到 $g(\lambda)$ 是 Laurent 多项式 (即 λ 和 λ^{-1} 的多项式) 的情形, 并可将变换矩阵 P 推广为 λ 的任意 N 次多项式. 这时, P 由 $2N$ 个特征函数确定, 这些特征函数定义了 P 在 $\lambda = \lambda_i, i = 1, \cdots, 2N$ 处的核. 这类矩阵 Darboux 变换将给出 AKNS 梯队的多孤立子解[270]. 在取特殊参数 λ_i 时可给出呼吸子解及其相应的曲面 (参见 1.4 节).

7.2.2 $su(2)$ 约束下的不变性

从欧氏几何的观点来看, 定理 19 中感兴趣的情形是在线性方程

$$\Phi_s = g(\lambda)\Phi \tag{7.75}$$

中取实的 λ 并且 $g(\lambda) \in su(2)$. 不过, 常常需要放松此要求, 而仅仅要求

$$g(\lambda)|_{\lambda=\bar{\lambda}} \in su(2). \tag{7.76}$$

如果 $g(\lambda)$ 是 λ 的 Laurent 多项式, 则它有形式

$$g(\lambda) = \sum_{i=-m}^{n} \lambda^i g_i, \quad g_i \in su(2). \tag{7.77}$$

一般情况下, 矩阵 Darboux 变换 (7.63) 不保持条件 (7.76). 不过, 由条件 (7.76) 容易看出, 存在常值矩阵 C 使得

$$\Phi(\bar{\lambda}) = A\overline{\Phi(\lambda)}C, \qquad \mathrm{i}A = \sigma_2. \tag{7.78}$$

反之, 由线性矩阵方程 (7.75) 上的约束 (7.78) 可推出条件 (7.77).

如果 ϕ 是带复参数 λ_0 的方程 (7.75) 的向量值解, 则定理 28 中的参数和特征函数可自然取为

$$\begin{aligned} \phi_{[1]} &= \phi, & \lambda_1 &= \lambda_0, \\ \phi_{[2]} &= A\bar{\phi}, & \lambda_2 &= \bar{\lambda}_0. \end{aligned} \tag{7.79}$$

于是, 代数方程组 $P(\lambda_i)\phi_{[i]} = 0$ 的解是

$$P(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)\mathbb{1} + (\bar{\lambda}_0 - \lambda_0)\frac{A\bar{\phi}\phi^{\mathrm{T}}A}{\bar{\phi}^{\mathrm{T}}\phi}. \tag{7.80}$$

引入矩阵

$$Q_0 = \Psi\sigma_3\Psi^{-1}, \quad \Psi = (\phi_{[1]}\ \phi_{[2]}) = \begin{pmatrix} \phi_1 & -\bar{\phi}_2 \\ \phi_2 & \bar{\phi}_1 \end{pmatrix}, \tag{7.81}$$

则有表示

$$P(\lambda) = (\lambda - \Re(\lambda_0))\mathbb{1} - \mathrm{i}\Im(\lambda_0)Q_0. \tag{7.82}$$

这正是伪球曲面和 NLS 曲面的变换矩阵 P 的形式. 需要注意的是, 虽然 Ψ 本身不是矩阵值特征函数, 但它的各列分别是 $\lambda = \lambda_1$ 和 $\lambda = \lambda_2$ 时的向量值特征函数.

还需要证明的是, 由 (7.82) 式给出的矩阵 Darboux 变换保持约束 (7.78). 这里我们需要恒等式

$$P(\bar{\lambda}) = -A\overline{P(\lambda)}A \tag{7.83}$$

它由 (7.80) 式直接可得. 由上式以及 (7.78) 式得

$$\Phi'(\bar{\lambda}) = P(\bar{\lambda})\Phi(\bar{\lambda}) = [-A\overline{P(\lambda)}A][A\overline{\phi(\lambda)}C] = A\overline{\Phi'(\lambda)}C, \tag{7.84}$$

从而 Φ' 满足带撇的 (7.78) 式, 所以 $g'(\lambda)$ 有我们所需要的形式.

在最简单的情形, 将矩阵 Darboux 变换 $P(\lambda) = \lambda\mathbb{1} + P_0$ 作用在

$$\Phi_s = g(\lambda)\Phi = (g_1\lambda + g_0)\Phi \tag{7.85}$$

上, 则

$$g'(\lambda)P(\lambda) = P(\lambda)g(\lambda) + P_s(\lambda) \tag{7.86}$$

中 λ^2 和 λ 的系数给出变换

$$g_0' = g_0 + [P_0, g_1], \quad g_1' = g_1. \tag{7.87}$$

于是, 可以合理假设 g_1 是常值的, 且 g_0 在 g_1 的换位运算的像中, 即 g_0 具有形式 $[\cdot, g_1]$. 特别地, AKNS 散射问题

$$\Phi_s = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \mathrm{i}\lambda & q \\ -\bar{q} & -\mathrm{i}\lambda \end{pmatrix}\Phi \tag{7.88}$$

满足这些基本要求.

7.2.3 满足 $r = -\bar{q}$ 的 AKNS 梯队及其基本 Bäcklund 变换

回到 6.1 节讨论过的与 NLS 梯队相联系的满足 $r = -\bar{q}$ 的 AKNS 梯队, 即 (参见 (6.43) 式)

$$\begin{pmatrix} q \\ -\bar{q} \end{pmatrix}_{t_N} = (-1)^{N+1}\mathrm{i}L^N \begin{pmatrix} q \\ \bar{q} \end{pmatrix}, \tag{7.89}$$

其中

$$L = \mathrm{i}\begin{pmatrix} -\partial_s - \frac{1}{2}q\partial_s^{-1}\bar{q} & \frac{1}{2}q\partial_s^{-1}q \\ -\frac{1}{2}\bar{q}\partial_s^{-1}\bar{q} & \partial_s + \frac{1}{2}\bar{q}\partial_s^{-1}q \end{pmatrix} \tag{7.90}$$

是 NLS 递推算子. 在 6.1 节中, 通过散射问题 (7.88) 和伴随的时间演化

$$\Phi_{t_N} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \mathrm{i}A(\lambda) & B(\lambda) \\ -\bar{B}(\lambda) & -\mathrm{i}A(\lambda) \end{pmatrix}\Phi \tag{7.91}$$

的相容性导出了 NLS 梯队, 这里 A 和 B 是 λ 的 N 次多项式, $A_N = (-1)^{N+1}$. 需要注意的是, A, B 由相容性条件决定, 因此保持 NLS 散射问题 (7.88) 和时间演化 (7.91) 的任何变换是 NLS 梯队的不变量.

对于由 (7.82) 式给出的 $P(\lambda)$, 我们已经建立了保持 (7.88) 式的基本矩阵 Darboux 变换 (7.63). 除了 A_N 可选择外, 时间演化 (7.91) 决定了最一般的形为 (7.75) 且满足约束 (7.83) 的线性矩阵方程. 可以证明, A_N 在矩阵 Darboux 变换下保持形式不变, 即 $A'_N = A_N$. 此结论及 NLS 梯队的不变性表示为下列定理.

定理 29 (NLS 梯队的基本矩阵 Darboux 变换)　矩阵 Darboux 变换 (7.63), (7.82) 保持 NLS 梯队的线性表示 (7.88), (7.91) 的形式不变. NLS 梯队的诱导变换是

$$q \to q' = q - 4\Im(\lambda_0)\frac{\phi_1\bar{\phi}_2}{\phi_1\bar{\phi}_1 + \phi_2\bar{\phi}_2}, \tag{7.92}$$

其中 $\phi = (\phi_1\ \phi_2)^{\mathrm{T}}$ 是带参数 λ_0 的线性表示的向量值解.

证明　仅需证明 (7.92) 式. 由 $(7.87)_1$ 式,

$$q' = q - 2\mathrm{i}\,(P_0)_{12}\,, \tag{7.93}$$

由此即得 (7.92) 式. □

下面要导出用 q 和 q' 表示的 NLS 梯队的显式自 Bäcklund 变换. 注意到由 (7.92) 式给出的 q' 只依赖于 q 和比值

$$\xi = \frac{\phi_1}{\phi_2}, \tag{7.94}$$

即

$$q' = q - 4\Im(\lambda_0)\frac{\xi}{\xi\bar{\xi}+1}. \tag{7.95}$$

另一方面, ξ 满足 Riccati 方程

$$\xi_s = \frac{q}{2} + \mathrm{i}\lambda_0\xi + \frac{\bar{q}}{2}\xi^2, \tag{7.96}$$

而从 (7.95) 式可得

$$\xi = -\frac{q'-q}{2\Im(\lambda_0) \mp \sqrt{4\Im(\lambda_0)^2 - |q'-q|^2}}. \tag{7.97}$$

将它代入 (7.96) 式中就得到

$$q'_s - q_s = \mathrm{i}\Re(\lambda_0)(q'-q) \pm \frac{q'+q}{2}\sqrt{4\Im(\lambda_0)^2 - |q'-q|^2}. \tag{7.98}$$

这是与 NLS 梯队的基本矩阵 Darboux 变换相联系的自 Bäcklund 变换的空间部分, 它对梯队中的任一方程都成立. 然而, Bäcklund 变换的时间演化部分同具体的方程有关. 例如, 对 $x \to s$ 的 NLS 方程

$$\mathrm{i}q_h + q_{ss} + \frac{1}{2}|q|^2q = 0, \quad h = t_2 \tag{7.99}$$

的时间演化 (6.58), 有 Riccati 方程

$$\xi_b = \frac{1}{2}(\mathrm{i}q_s - \lambda_0 q) + \mathrm{i}\left(\frac{1}{2}|q|^2 - \lambda_0^2\right)\xi - \frac{1}{2}(\mathrm{i}\bar{q}_s + \lambda_0\bar{q})\xi^2, \tag{7.100}$$

而将 (7.97) 式给出的 ξ 代入后, 有

$$\begin{aligned} q_b' - q_b = &-\Re(\lambda_0)(q_s' - q_s) + \mathrm{i}\frac{q' - q}{4}(|q'|^2 + |q|^2) \\ &\pm \mathrm{i}\frac{q_s' + q_s}{2}\sqrt{4\Im(\lambda_0)^2 - |q' - q|^2}. \end{aligned} \tag{7.101}$$

可直接验证 (7.98) 式和 (7.101) 式相容当且仅当 q 满足 NLS 方程 (7.99), 这来源于 Riccati 方程 (7.96) 和 (7.100) 可以看作 NLS 方程的非线性 Lax 对这一事实. 相容性保证 q' 也是 NLS 方程的一个解, 从而方程组 (7.98), (7.101) 构成一个强自 Bäcklund 变换.

我们已经知道, 当 N 是奇数且 q 是实函数时, NLS 梯队 (7.89) 约化为 mKdV 梯队. 这时, 取 $\lambda_0 = -\mathrm{i}\mu$ 为纯虚数且取 ϕ 为实的. 变换 (7.92) 给出, 矩阵 Darboux 变换保持这个实约化. mKdV 梯队可以表示为更紧凑的守恒律形式

$$q_{t_N} = [R(q)]_s, \tag{7.102}$$

其中 $R(q)$ 是 q 及其 s 导数的多项式. 如果记

$$q = \omega_s, \tag{7.103}$$

则演化方程 (7.102) 可以积分而得到势 mKdV 梯队

$$\omega_{t_N} = R(\omega_s). \tag{7.104}$$

自 Bäcklund 变换的空间部分

$$(\omega' - \omega)_{ss} = \pm\frac{(\omega' + \omega)_s}{2}\sqrt{4\mu^2 - (\omega' - \omega)_s^2} \tag{7.105}$$

也可以积分而得到

$$\left(\frac{\omega' - \omega}{2}\right)_s = \pm\mu\sin\left(\frac{\omega' + \omega}{2}\right). \tag{7.106}$$

这里, 略去了与时间有关的 "积分常数".

(7.106) 式给出了势 mKdV 梯队的自 Bäcklund 变换的空间形式, 它同 sine-Gordon 方程的经典 Bäcklund 变换中的一个方程相同, 因为 sine-Gordon 方程是势 mKdV 梯队中第一个 "双曲" 方程. 在 2.4 节中已经知道势 mKdV 方程可以来源于用 sine-Gordon 方程描述的伪球曲面的相容运动.

7.2.4 常距离性质

下面分析基本矩阵 Darboux 变换的几何意义. 考虑相容的线性方程组

$$\Phi_{,\nu} = g_\nu(\lambda)\Phi, \quad \nu = 1, 2, \tag{7.107}$$

其中矩阵 $g_\nu \in su(2)$ 是实参数 λ 的 Laurent 多项式. 如果取 $\det \Phi = 1$, 则如定理 19, 此 Lax 对通过 Sym-Tafel 公式

$$r = \Phi^{-1}\Phi_\lambda \tag{7.108}$$

同 $\mathbb{R}^3$ 中的曲面 Σ 相联系. 规范化矩阵 Darboux 变换

$$\Phi' = \frac{1}{|\lambda - \lambda_0|} P(\lambda)\Phi = p(\lambda)P(\lambda)\Phi \tag{7.109}$$

保持 Lax 对 (7.107) 的形式不变, 因此保持曲面 Σ 的第一、第二基本形式的结构不变, 这里 $P(\lambda)$ 由 (7.82) 式给出, 且

$$\det P = p^{-2} = (\lambda - \lambda_0)(\lambda - \bar{\lambda}_0). \tag{7.110}$$

新曲面 Σ' 的位置矩阵为

$$r' = \Phi'^{-1}\Phi'_\lambda = \Phi^{-1}\Phi_\lambda + p^{-1}p_\lambda \mathbb{1} + \Phi^{-1}P^{-1}P_\lambda\Phi. \tag{7.111}$$

将 p 和 P 代入后, 我们得到联系曲面 Σ 和 Σ' 的 Bäcklund 变换

$$r' = r + \mathrm{i}\frac{\Im(\lambda_0)}{|\lambda - \lambda_0|^2}\Phi^{-1}\Psi\sigma_3\Psi^{-1}\Phi. \tag{7.112}$$

Σ' 的位置向量 $\boldsymbol{r}' = x^{1'}\boldsymbol{e}_1 + x^{2'}\boldsymbol{e}_2 + x^{3'}\boldsymbol{e}_3$ 的分量为

$$x^{j'} = \mathrm{i}\,\mathrm{Tr}\,(\Phi'_\lambda\sigma_j\Phi'^{-1}). \tag{7.113}$$

用标准正交基

$$t_i = \boldsymbol{t}_i \cdot \boldsymbol{e} = \Phi^{-1}e_i\Phi \tag{7.114}$$

表示时, Bäcklund 变换为

$$\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{r} - 2\frac{\Im(\lambda_0)}{|\lambda - \lambda_0|^2}\left(\frac{2\Re(\xi)}{|\xi|^2+1}\boldsymbol{t}_1 - \frac{2\Im(\xi)}{|\xi|^2+1}\boldsymbol{t}_2 + \frac{|\xi|^2-1}{|\xi|^2+1}\boldsymbol{t}_3\right). \tag{7.115}$$

一个重要的性质是, 距离向量 $\boldsymbol{r}' - \boldsymbol{r}$ 的长度是常数, 即

$$|\boldsymbol{r}' - \boldsymbol{r}| = 2\frac{|\Im(\lambda_0)|}{|\lambda - \lambda_0|^2}. \tag{7.116}$$

这个结论包含于下列定理中[354]

定理 30 (常距离性质) 对 Lax 对 (7.107), 与基本矩阵 Darboux 变换相联系的 Bäcklund 变换 (7.112) 使得曲面 Σ 和 Σ' 上对应点之间的距离为常数.

需要强调的是, 常距离性质对于同 (7.107) 形式的 Lax 对相联系的任何曲面都成立, 而不仅限于同满足 $r=-\bar{q}$ 的 AKNS 梯队相联系的曲面. Bäcklund 变换 (7.115) 是第 4 章中用几何方法对 NLS 方程所得结果的推广.

练 习

1. 证明

$$\det P(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2),$$

其中矩阵 $P(\lambda)=\lambda\mathbb{1}+P_0$ 由线性代数方程组 (7.62) 确定.

2. 设 $\Phi(\lambda)$ 是线性方程组 (7.61) 的基本解, 证明存在常向量 v_i, $i=1,2$ 使得

$$\phi_{[i]}=\Phi(\lambda_i)v_i,\qquad i=1,2,$$

其中 $\phi_{[i]}$ 是参数取 λ_i 的方程 (7.61) 的特征函数.

3. 矩阵 $B\in\mathbb{R}^{m,m}$ 的伴随矩阵定义为

$$\hat{B}_{ij}=(-1)^{i+j}\det\begin{pmatrix} B_{11} & \cdots & B_{1i-1} & B_{1i+1} & \cdots & B_{1m}\\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots\\ B_{j-11} & \cdots & B_{j-1i-1} & B_{j-1i+1} & \cdots & B_{j-1m}\\ B_{j+11} & \cdots & B_{j+1i-1} & B_{j+1i+1} & \cdots & B_{j+1m}\\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots\\ B_{m1} & \cdots & B_{mi-1} & B_{mi+1} & \cdots & B_{mm}\end{pmatrix}.$$

证明

$$B\hat{B}=\det B\,\mathbb{1}.$$

4. 设 $A,B\in\mathbb{R}^{m,m}$, $v\in\mathbb{R}^m$, 证明

$$\left.\begin{aligned} Av=0\\ Bv=0\end{aligned}\right\}\Rightarrow A\hat{B}=0.$$

5. 证明条件 (7.77) 等价于

$$g(\bar{\lambda})=-A\overline{g(\lambda)}A,\quad \mathrm{i}A=\sigma_2,$$

也等价于 (7.78) 式, 并验证恒等式

$$P(\bar{\lambda})=-A\overline{P(\lambda)}A.$$

7.3 Darboux 变换的重复作用及一般的可换性定理

本节中, 我们要说明, 矩阵 Darboux 变换可以以纯代数的方法重复作用, 而 N 次基本矩阵 Darboux 变换的作用可以解释为 N 个基本矩阵 Darboux 变换的非线性叠加对种子解的作用. 这个事实用于从种子解 q 出发以 N 个 Bäcklund 变换 $q_1^{(1)},\cdots,q_N^{(1)}$ 以及对应的 Bäcklund 参数 $\lambda_1,\cdots,\lambda_N$ 作出新解 $q^{(N)}$, 即

$$q^{(N)} = q^{(N)}[q, q_i^{(1)}, \lambda_i]. \tag{7.117}$$

$N=2$ 时, 这个叠加原理在此最简单的情形给出了满足 $r=-\bar{q}$ 的 AKNS 梯队的可换性定理. 如果 q 是实的, 则它约化为 sine-Gordon 方程的经典可换性定理. 从几何观点来看, 在曲面层次上, 矩阵 Darboux 变换的重复作用生成一系列曲面, 而相邻两个曲面具有常距离性质.

7.3.1 矩阵 Darboux 变换的重复作用

这里我们仅限于同几何有关的情形 (参见 7.2.2 小节)

$$\Phi_s = g(\lambda)\Phi, \quad g(\lambda)\in su(2), \tag{7.118}$$

设它具有基本矩阵 Darboux 变换

$$\Phi \to \Phi^1 = P^1(\lambda)\Phi, \tag{7.119}$$

其中 $P^1 = \lambda\mathbb{1} + P_0^1$ 满足

$$P^1(\lambda_1)\phi_1 = 0, \quad P^1(\bar{\lambda}_1)A\bar{\phi}_1 = 0. \tag{7.120}$$

这里上标 ^{1} 表示 Darboux 变换 (7.119) 由带参数 λ_1 的特征函数 ϕ_1 生成. 再次应用矩阵 Darboux 变换需要知道带参数 λ_2 的

$$\Phi_s^1 = g^1(\lambda)\Phi^1 \tag{7.121}$$

产生的向量值解 ϕ_{12}, 其中 g^1 由 g 经 Darboux 变换 (7.119) 作用得到. 于是, 第二个 Darboux 矩阵需满足

$$P^{12}(\lambda_2)\phi_{12} = 0, \quad P^{12}(\bar{\lambda}_2)A\bar{\phi}_{12} = 0, \tag{7.122}$$

它定义了对应的变换

$$L \to L^{12} = P^{12}(\lambda)L^1 = P^{12}(\lambda)P^1(\lambda)L \tag{7.123}$$

对于 $\lambda_2 \neq \lambda_1, \bar{\lambda}_1$, Darboux 矩阵 $P^1(\lambda_2)$ 是非退化的, 即

$$\det P^1(\lambda_2) = (\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_2 - \bar{\lambda}_1) \neq 0, \tag{7.124}$$

从而如果 $\Phi(\lambda_2)$ 是种子方程 (7.118) 的基本解, $P^1(\lambda_2)\Phi(\lambda_2)$ 就是方程 (7.121) 的基本解. 于是, ϕ_{12} 可以看作特征函数 ϕ_2 的像:

$$\phi_{12} = P^1(\lambda_2)\phi_2, \tag{7.125}$$

而由 (7.120) 式和 (7.122) 式, Darboux 矩阵

$$P(\lambda) = P^{12}(\lambda)P^1(\lambda) \tag{7.126}$$

满足

$$P(\lambda_i)\phi_i = 0, \quad P(\bar{\lambda}_i)A\bar{\phi}_i = 0, \qquad i = 1, 2. \tag{7.127}$$

另一方面, $P(\lambda)$ 具有形式

$$P(\lambda) = \lambda^2 + \lambda P_1 + P_0, \tag{7.128}$$

因此 (7.127) 式唯一地决定了 $P(\lambda)$. 考虑到由 ϕ_2 也可以生成形为 (7.119), (7.120) 的矩阵 Darboux 变换

$$\Phi \to \Phi^2 = P^2(\lambda)\Phi, \tag{7.129}$$

两个基本 Darboux 变换的复合导致了作用在同一个种子解上的两个基本矩阵 Darboux 变换的非线性叠加.

上述结果容易推广如下:

定理 31 (矩阵 Darboux 变换的重复作用) 将矩阵 Darboux 变换 (7.63) 重复作用 N 次, 其中分别取参数 $\lambda_1, \cdots, \lambda_N$, 则得到矩阵 Darboux 变换

$$\begin{aligned} \Phi \to \quad \Phi^{(N)} \quad &= P(\lambda)\Phi, \\ g(\lambda) \to g^{(N)}(\lambda) &= P(\lambda)g(\lambda)P^{-1}(\lambda) + P_s(\lambda)P^{-1}(\lambda), \end{aligned} \tag{7.130}$$

其中 Darboux 矩阵

$$P(\lambda) = \lambda^N + \sum_{i=0}^{N-1} \lambda^i P_i \tag{7.131}$$

由线性代数方程组

$$P(\lambda_i)\phi_i = 0, \quad P(\bar{\lambda}_i)A\bar{\phi}_i = 0 \tag{7.132}$$

的解决定. 基本矩阵 Darboux 变换互相可交换, 即矩阵 Darboux 变换的复合同它们作用的次序无关.

证明 重复作用 N 次基本 Darboux 变换所得的 Darboux 矩阵是

$$P(\lambda) = P^{1\cdots N}(\lambda)\cdots P^{12}(\lambda)P^{1}(\lambda), \tag{7.133}$$

这里用到了定义

$$P^{1\cdots i}(\lambda_i)\phi_{1\cdots i} = 0, \quad P^{1\cdots i}(\bar{\lambda}_i)A\bar{\phi}_{1\cdots i} = 0. \tag{7.134}$$

特征函数 $\phi_{1\cdots i+1}$ 可以看作特征函数 ϕ_{i+1} 在 i 个基本矩阵 Darboux 变换下的像, 即

$$\phi_{1\cdots i+1} = P^{1\cdots i}(\lambda_{i+1})\cdots P^{1}(\lambda_{i+1})\phi_{i+1}. \tag{7.135}$$

Darboux 矩阵 $P(\lambda)$ 有 (7.131) 的形式, 并满足条件 (7.132) 式. (7.132) 式关于 $1,\cdots,N$ 对称, 从而基本矩阵 Darboux 变换的作用次序不影响结果. 此外, 由于 $P(\lambda)$ 和 $-A\overline{P(\bar{\lambda})}A$ 都满足定义式 (7.131), (7.132), 故 $P(\lambda) = -A\overline{P(\bar{\lambda})}A$, 即满足条件 $g(\lambda) \in sl(2)$.[4] □

重复作用矩阵 Darboux 变换于形为 (7.107) 的 Lax 对, 相当于将 Bäcklund 变换重复作用于相关的孤立子曲面. 原则上讲, 首先需要将矩阵 Darboux 变换规范化, 使之满足 $\Phi^{(N)} \in SU(2)$, 然后应用 Sym-Tafel 公式. 然而, 我们有兴趣的仅是将新的位置

$$r^{(N)} = \boldsymbol{r}^{(N)} \cdot \boldsymbol{e} \tag{7.136}$$

按 Pauli 矩阵进行分解, 而它们的迹为零, 因此可以按

$$Q|^{\mathrm{nt}} = Q - \frac{1}{2}\operatorname{Tr}(Q)\mathbb{1} \tag{7.137}$$

取矩阵 Q 的迹零部分. 于是, 新的位置矩阵 $r^{(N)}$ 为

$$r^{(N)} = r + \Phi^{-1}P^{-1}P_{\lambda}\Phi\big|^{\mathrm{nt}}. \tag{7.138}$$

$r^{(N)} - r$ 可以写为满足常距离条件的一些矩阵之和, 即

$$r^{(N)} - r = \sum_{i=1}^{N} s_i, \quad -2\operatorname{Tr}(s_i^2) = 4\frac{[\Im(\lambda_i)]^2}{|\lambda - \lambda_i|^4}, \tag{7.139}$$

因为在递推过程

$$\Sigma^{(0)} \to \Sigma^{(1)} \to \cdots \to \Sigma^{(N)} \tag{7.140}$$

的每一步中, 新曲面 $\Sigma^{(i)}$ 和旧曲面 $\Sigma^{(i-1)}$ 之间有常距离性质. 于是, 可以认为, 曲面 $\Sigma^{(1)},\cdots,\Sigma^{(N)}$ 由满足

$$|\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_{i-1}| = 2\frac{|\Im(\lambda_i)|}{|\lambda - \lambda_i|^2} \tag{7.141}$$

的多边形 $[\boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{r}_1, \cdots, \boldsymbol{r}_N]$ 的顶点 $\boldsymbol{r}_i$ 所生成, 其中初始点 $\boldsymbol{r}_0$ 在种子曲面 $\Sigma^{(0)}$ 上, 而 $\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_{i-1}$ 在作适当的旋转.

矩阵 s_i 可以按曲面 $\Sigma^{(i)}$ 的矩阵 Darboux 变换

$$\Phi^{(i)} = P^{1\cdots i}(\lambda) \cdots P^1(\lambda)\Phi, \quad \Phi^{(0)} = \Phi \tag{7.142}$$

写出. 于是, 变换 (7.138) 成为

$$r^{(N)} = r + \Phi^{-1} \left[\sum_{i=1}^{N} \left(P^{1\cdots N} \cdots P^1\right)^{-1} P^{1\cdots N} \cdots P^{1\cdots i+1} P_\lambda^{1\cdots i} P^{1\cdots i-1} \cdots P^1 \right] \Phi \Bigg|^{\mathrm{nt}}, \tag{7.143}$$

由此可得

$$s_i = \left[\Phi^{(i-1)}\right]^{-1} \left[P^{1\cdots i}\right]^{-1} \Phi^{(i-1)} \Big|^{\mathrm{nt}}. \tag{7.144}$$

Sym 对一类推广的 AKNS 散射问题讨论了上述分解[354]. 需要强调的是, 分解公式 (7.139), (7.144) 对下面讨论的一大类问题都成立.

如果 Lax 对是常值参数 λ 及其逆 λ^{-1} 的多项式, Darboux 矩阵的一般形式为

$$\tilde{P}(\lambda) = \sum_{i=0}^{N} \lambda^i \tilde{P}_i. \tag{7.145}$$

如果 $\tilde{P}_N$ 非退化,[5] 那么上述 Darboux 矩阵可以分解为一个规范矩阵和一个标准形式的 Darboux 矩阵的乘积, 即

$$\tilde{P}(\lambda) = P_N P(\lambda) = P_N \left(\lambda^N + \sum_{i=0}^{N-1} \lambda^i P_i \right). \tag{7.146}$$

虽然非线性方程的解同规范矩阵 P_N 有关, 但曲面的几何同它无关, 这是因为

$$\tilde{r}^{(N)} = r + \Phi^{-1} \tilde{P}^{-1} \tilde{P}_\lambda \Phi \Big|^{\mathrm{nt}} = r + \Phi^{-1} P^{-1} P_\lambda \Phi \Big|^{\mathrm{nt}} = r^{(N)}. \tag{7.147}$$

7.3.2 一般的可换性定理

Darboux 变换的重复作用对于所有特征函数 $\phi_1, \cdots, \phi_N$ 对称这一事实可导出相应于 Bäcklund 变换的 Bianchi 图可交换的结论. 我们要回到满足 $r = -\bar{q}$ 的 AKNS 梯队, 并建立一般的可换性定理, Bianchi 对 sine-Gordon 方程给出的经典可换性定理是它的特例.

容易看到类似于 (7.93) 式的变换是

$$q^{(N)} = q - 2\mathrm{i}(P_{N-1})_{12}. \tag{7.148}$$

线性代数方程组 (7.132), 即

$$\begin{pmatrix} \xi_1 & 1 & \cdots & \lambda_1^{N-1}\xi_1 & \lambda_1^{N-1} \\ -1 & \bar{\xi}_1 & \cdots & -\bar{\lambda}_1^{N-1} & \bar{\lambda}_1^{N-1}\bar{\xi}_1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \xi_N & 1 & \cdots & \lambda_N^{N-1}\xi_N & \lambda_N^{N-1} \\ -1 & \bar{\xi}_N & \cdots & -\bar{\lambda}_N^{N-1} & \bar{\lambda}_N^{N-1}\bar{\xi}_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (P_0)_{11} \\ (P_0)_{12} \\ \vdots \\ (P_{N-1})_{11} \\ (P_{N-1})_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda_1^N\xi_1 \\ \bar{\lambda}_1^N \\ \vdots \\ -\lambda_N^N\xi_N \\ \bar{\lambda}_N^N \end{pmatrix}, \tag{7.149}$$

$$\begin{pmatrix} \xi_1 & 1 & \cdots & \lambda_1^{N-1}\xi_1 & \lambda_1^{N-1} \\ -1 & \bar{\xi}_1 & \cdots & -\bar{\lambda}_1^{N-1} & \bar{\lambda}_1^{N-1}\bar{\xi}_1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \xi_N & 1 & \cdots & \lambda_N^{N-1}\xi_N & \lambda_N^{N-1} \\ -1 & \bar{\xi}_N & \cdots & -\bar{\lambda}_N^{N-1} & \bar{\lambda}_N^{N-1}\bar{\xi}_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (P_0)_{21} \\ (P_0)_{22} \\ \vdots \\ (P_{N-1})_{21} \\ (P_{N-1})_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda_1^N \\ -\bar{\lambda}_1^N\bar{\xi}_1 \\ \vdots \\ -\lambda_N^N \\ -\bar{\lambda}_N^N\bar{\xi}_N \end{pmatrix} \tag{7.150}$$

的解可以由 Cramer 法则得到, 这里 $\xi_i = \phi_i^1/\phi_i^2$. 于是

$$(P_{N-1})_{12} = \frac{\begin{vmatrix} \xi_1 & 1 & \cdots & \lambda_1^{N-1}\xi_1 & -\lambda_1^N\xi_1 \\ -1 & \bar{\xi}_1 & \cdots & -\bar{\lambda}_1^{N-1} & \bar{\lambda}_1^N \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \xi_N & 1 & \cdots & \lambda_N^{N-1}\xi_N & -\lambda_N^N\xi_N \\ -1 & \bar{\xi}_N & \cdots & -\bar{\lambda}_N^{N-1} & \bar{\lambda}_N^N \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \xi_1 & 1 & \cdots & \lambda_1^{N-1}\xi_1 & \lambda_1^{N-1} \\ -1 & \bar{\xi}_1 & \cdots & -\bar{\lambda}_1^{N-1} & \bar{\lambda}_1^{N-1}\bar{\xi}_1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \xi_N & 1 & \cdots & \lambda_N^{N-1}\xi_N & \lambda_N^{N-1} \\ -1 & \bar{\xi}_N & \cdots & -\bar{\lambda}_N^{N-1} & \bar{\lambda}_N^{N-1}\bar{\xi}_N \end{vmatrix}}. \tag{7.151}$$

对 $N = 1$, AKNS 梯队的新解为

$$q_1^{(1)} = q - 4\Im(\lambda_1)\frac{\xi_1}{1 + |\xi_1|^2}, \tag{7.152}$$

它同 (7.92) 式相同. 目前 $q^{(1)}$ 上的下标 $_1$ 是多余的, 不过它在后面有用. 在有两个特征函数时, 新解为

其中

$$\begin{aligned} Q =& (\lambda_1 - \bar{\lambda}_1)(\lambda_2 - \bar{\lambda}_2)(\lambda_1 + \bar{\lambda}_1 - \lambda_2 - \bar{\lambda}_2)(\bar{\xi}_1 - \bar{\xi}_2)\xi_1\xi_2 \\ & +(\lambda_1 - \bar{\lambda}_1)(\lambda_1 - \bar{\lambda}_2)(\bar{\lambda}_1 - \bar{\lambda}_2)(1 + |\xi_2|^2)\xi_1 \\ & -(\lambda_2 - \bar{\lambda}_2)(\lambda_2 - \bar{\lambda}_1)(\bar{\lambda}_1 - \bar{\lambda}_2)(1 + |\xi_1|^2)\xi_2, \\ R =& (\lambda_1 - \bar{\lambda}_1)(\lambda_2 - \bar{\lambda}_2)|\xi_1 - \xi_2|^2 \\ & -|\lambda_1 - \lambda_2|^2(1 + |\xi_1|^2)(1 + |\xi_2|^2). \end{aligned} \tag{7.154}$$

注意到 $\lambda_2 = 0$ 时 $q^{(2)} = q_1^{(1)}$. 一般地, $q^{(N)}$ 可以写为

$$q^{(N)} = q^{(N)}[q, \xi_1, \cdots, \xi_N, \lambda_1, \cdots, \lambda_N]. \tag{7.155}$$

注意到每个特征函数 ϕ_i 生成一个新解

$$q_i^{(1)} = q - 4\Im(\lambda_i)\frac{\xi_i}{1 + |\xi_i|^2}, \tag{7.156}$$

由此可解出特征函数

$$\xi_i = -\frac{q_i^{(1)} - q}{2\Im(\lambda_i) \mp \sqrt{4\Im(\lambda_i)^2 - |q_i^{(1)} - q|^2}}, \tag{7.157}$$

从而我们重新得到了*非线性叠加原理*

$$q^{(N)} = q^{(N)}[q, q_i^{(1)}, \lambda_i]. \tag{7.158}$$

这就是下述定理.

定理 32 (AKNS 梯队的叠加原理) *对满足 $r = -\bar{q}$ 的 AKNS 梯队, 高次矩阵 Darboux 变换 (7.130)–(7.132) 有一个显式的非线性叠加原理, 它将一个新解用种子解 q 和 N 个 Bäcklund 变换 $q_1^{(1)}, \cdots, q_N^{(1)}$ 来表示, 这里的 $q_1^{(1)}, \cdots, q_N^{(1)}$ 由带参数 $\lambda_1, \cdots, \lambda_N$ 的 Bäcklund 变换 (7.98) 及其时间部分 (7.101) 生成.*

当 $N = 2$ 时, 上述叠加原理是 sine-Gordon 方程经典可换性定理的推广. 为说明这一点, 考虑 $\omega = \int q\,\mathrm{d}s$ 所满足的势 mKdV 梯队 (7.104). 我们并不直接积分叠加公式 (7.158) 以得到显式的关于 ω 的叠加原理, 而是利用 sine-Gordon 方程是 mKdV 梯队的第一个 “负” 方程这一事实. 考虑下列 “v 演化”

$$\Phi_v = \frac{\mathrm{i}}{2\lambda}S(\omega)\Phi, \quad S(\omega) = \begin{pmatrix} -\cos\omega & \sin\omega \\ \sin\omega & \cos\omega \end{pmatrix} \tag{7.159}$$

的变换性质. 对 $S(\omega)$ 作用高阶矩阵 Darboux 变换得到

由定义, 矩阵 P_0 有分解

$$P_0 = P_0^{1\cdots N} \cdots P_0^1. \tag{7.161}$$

根据 (7.19) 式, 每一矩阵 $P^{1\cdots i}$ 具有结构

$$P^{1\cdots i} \sim S(\varphi_{1\cdots i}), \quad \varphi_{1\cdots i} = 2\arctan \xi_{1\cdots i}, \cdot \tag{7.162}$$

从而

$$S(\omega_i^{(1)}) = S(\varphi_i) S(\omega) S^{-1}(\varphi_i), \qquad i = 1, 2, \tag{7.163}$$

$$S(\omega^{(2)}) = \tilde{S}(\chi) S(\omega) \tilde{S}^{-1}(\chi), \tag{7.164}$$

其中

$$\tilde{S}(\chi) = \begin{pmatrix} \cos\chi & \sin\chi \\ -\sin\chi & \cos\chi \end{pmatrix}, \quad \chi = \varphi_{12} - \varphi_1. \tag{7.165}$$

由此计算得

$$\omega_i^{(1)} = 2\varphi_i - \omega, \quad \omega^{(2)} = \omega + 2\chi. \tag{7.166}$$

如果记

$$\chi = 2\arctan \xi. \tag{7.167}$$

则有等价的

$$\xi_i = \tan\left(\frac{\omega_i^{(1)} + \omega}{4}\right), \quad \xi = \tan\left(\frac{\omega^{(2)} - \omega}{4}\right). \tag{7.168}$$

在此变量代换下, P_0 成为

$$P_0 \sim \tilde{S}(\chi) = \frac{1}{1+\xi^2} \begin{pmatrix} 1-\xi^2 & 2\xi \\ -2\xi & 1-\xi^2 \end{pmatrix}. \tag{7.169}$$

同线性方程组 (7.149), (7.150) 相比较得

$$\xi = \left(\frac{\mu_2 + \mu_1}{\mu_2 - \mu_1}\right) \frac{\xi_2 - \xi_1}{1 + \xi_1 \xi_2}, \tag{7.170}$$

其中 $\lambda_i = -\mathrm{i}\mu_i$. 结合 (7.168) 式和 (7.170) 式就得到 sine-Gordon 方程的经典可换性定理

$$\tan\left(\frac{\omega^{(2)} - \omega}{4}\right) = \frac{\mu_2 + \mu_1}{\mu_2 - \mu_1} \tan\left(\frac{\omega_2^{(1)} - \omega_1^{(1)}}{4}\right). \tag{7.171}$$

练　　习

1. 证明对实特征函数 ξ_1, ξ_2 和纯虚参数 $\lambda_i = -\mathrm{i}\mu_i$, 在 Darboux 矩阵

$$P(\lambda) = \lambda^2 + \lambda P_1 + P_0$$

中,

$$P_0 \sim \frac{1}{1+\xi^2}\begin{pmatrix} 1-\xi^2 & 2\xi \\ -2\xi & 1-\xi^2 \end{pmatrix}, \quad \xi = \left(\frac{\mu_2+\mu_1}{\mu_2-\mu_1}\right)\frac{\xi_2-\xi_1}{1+\xi_1\xi_2}.$$

第 8 章 Bianchi 方程组和 Ernst 方程组, 它们的 Bäcklund 变换和可换性定理

本章中将用 Bäcklund-Darboux 变换生成描述柱对称引力场的 Einstein 方程的显式解. 孤立子理论与广义相对论的这个重要联系是 1978 年发现的, 当时 Maison[241] 对静态柱对称 Einstein 方程构造了一个 Lax 对, 而 Belinsky 和 Zakharov[27] 用反散射方法得到了这些约化的引力场方程的单孤立子型解. 同年, Harrison[157] 用 Wahlquist-Estabrook 的方法得到了广义相对论中 Ernst 方程的 Bäcklund 变换[121, 217]. 1979 年, Neugebauer[267] 独立地给出了 Ernst 方程的 Bäcklund 变换. 由此, 可以从 "种子解" 出发递推生成多参数解. Bäcklund 变换在广义相对论中的应用有很多研究[172, 221]. 特别地, Cosgrove[88] 建立了群论方法和孤立子理论方法之间的重要联系, 它可以给出 Einstein 方程的新的静态柱对称解.

这里, 将介绍第 1 章中讨论过的经典微分几何中的 Bianchi 方程组与广义相对论中的 Ernst 方程的对比, 我们将看到, Harrison 变换[157] 是早在 1890 年发现的 Bianchi 曲面经典 Bäcklund 变换[33] 的 "椭圆" 对应, 而 Neugebauer 变换[267] 是 Ernst 方程已知的自 Bäcklund 变换的构造基础, 例如, Harrison 变换可以分解为两个 Neugebauer 变换. 这使得可以用 Neugebauer 的基本 Bäcklund 变换构造 Ernst 方程的矩阵 Darboux 变换. 进而对 Ernst 方程及其对偶方程建立了一个基本的可换性定理, 由此可以以递推方法生成一系列解. 它的向量形式[81] 同 Bianchi 曲面的单位法向量满足的可换性定理相联系.

8.1 Bianchi 曲面和 Sym-Tafel 公式的应用

上一章中已经知道, 如果一类曲面通过 Sym-Tafel 公式同多项式形式的 $su(2)$ Lax 对相联系, 并且具有基本矩阵 Darboux 变换, 那么位置向量 $\boldsymbol{r}$ 到它的 Bäcklund 变换 $\boldsymbol{r}'$ 的距离是常数. 为了证明常距离性质, Lax 对 (7.107) 中的矩阵 $g_\nu(\lambda)$ 设为参数 λ 的 Laurent 多项式. 然而, 我们可以将向量 $\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}$ 的长度当作为谱参数 λ 和 λ_0 的函数, 这个看法在研究 "非等谱" (即含有非常数参数) Lax 对的矩阵 Darboux 变换时是很重要的. 我们将看到, 这时 Bianchi 曲面的 Bäcklund 变换 (1.187) 不再具有常距离性质, 不过 $|\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}|$ 可以完全用非常值的 Bäcklund 参数表示. 这个性质

Sym-Tafel 公式.

1.6 节中, 对于由

$$
\boxed{\begin{gathered}
\omega_{uv}+\frac{1}{2}\left(\frac{\rho_u}{\rho}\frac{b}{a}\sin\omega\right)_u+\frac{1}{2}\left(\frac{\rho_v}{\rho}\frac{a}{b}\sin\omega\right)_v-ab\sin\omega=0,\\
a_v+\frac{1}{2}\frac{\rho_v}{\rho}a-\frac{1}{2}\frac{\rho_u}{\rho}b\cos\omega=0,\\
b_u+\frac{1}{2}\frac{\rho_u}{\rho}b-\frac{1}{2}\frac{\rho_v}{\rho}a\cos\omega=0,\\
\rho_{uv}=0
\end{gathered}} \tag{8.1}
$$

确定的 Bianchi 曲面的 Bäcklund 变换的推导得出了 Gauss-Weingarten 方程的非等谱推广, 即

$$
\begin{aligned}
\Phi_u&=\frac{\mathrm{i}}{2}\left[\lambda a\left(\sin\frac{\omega}{2}\sigma_1+\cos\frac{\omega}{2}\sigma_3\right)+\frac{1}{2}\left(\omega_u+\frac{a}{b}\frac{\rho_v}{\rho}\sin\omega\right)\sigma_2\right]\Phi,\\
\Phi_v&=\frac{\mathrm{i}}{2}\left[\frac{1}{\lambda}b\left(\sin\frac{\omega}{2}\sigma_1-\cos\frac{\omega}{2}\sigma_3\right)-\frac{1}{2}\left(\omega_v+\frac{b}{a}\frac{\rho_u}{\rho}\sin\omega\right)\sigma_2\right]\Phi,
\end{aligned} \tag{8.2}
$$

其中 “谱参数” λ 由

$$
\lambda=\pm\sqrt{\frac{K-V(v)}{K+U(u)}},\qquad \rho=U(u)+V(v) \tag{8.3}
$$

给出, K 是任意实常数. 在取极限 $K\to\infty$ 或等价的 $\lambda=\pm1$ 时, 线性方程组 (8.2) 恰好是形为 (1.156) 的 Gauss-Weingarten 方程组的 $su(2)$ 形式. 方程组 (8.1) 由 Bianchi 在讨论共轭网的等距形变时建立[34, 89], 在那里, K 等同于形变参数. 从纯几何考虑, Bianchi 给出方程组 (8.1) 在变换

$$
a\to\lambda a,\quad b\to\lambda^{-1}b,\quad \rho\to\frac{(\lambda-\lambda^{-1})^2}{\rho} \tag{8.4}
$$

下的不变性, 这个不变性导致了伪球曲面的 Lie 变换的推广 (参见 1.2 节). 对一般的 Bianchi 方程组, $su(2)$ 形式的 Gauss-Weingarten 方程允许 Lie 点对称这一性质被 Levi 和 Sym[234] 用于决定可积约束 $\rho_{uv}=0$. 对广义相对论中的 Ernst 方程, 变换 (8.4) 构成一个 Neugebauer 变换 (参见 (8.78) 式), 这将在 8.6 节中予以讨论.

一个自然的问题是, 是否可以从线性表示 (8.2) 得到 Bianchi 曲面的基本形式. 如果我们将 $K=K(k)$ 看作常数 k 的函数, 而以 k 作为 Sym-Tafel 公式中的参数, 则同 (8.2) 相联系的位置矩阵是

而对应的第一基本形式是

$$\mathrm{I} = -2\lambda_k^2 \operatorname{Tr}(g_{\mu,\lambda} g_{\nu,\lambda})\,\mathrm{d}x^\mu\,\mathrm{d}x^\nu. \tag{8.6}$$

计算得

$$\mathrm{I} = \lambda_k^2 (a^2\,\mathrm{d}u^2 + 2\lambda^{-2} ab\cos\omega\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v + \lambda^{-4} b^2\,\mathrm{d}v^2). \tag{8.7}$$

现在,

$$\lambda_k = \frac{\rho}{2\lambda}\frac{K_k}{(K+U)^2}, \tag{8.8}$$

如果取

$$K = -\frac{1}{2k}, \tag{8.9}$$

则有

$$\lambda_k = \frac{\rho}{\lambda}\frac{1}{(1-2kU)^2}. \tag{8.10}$$

在 $k=0$ 时 $\lambda = \pm 1$, 第一基本形式 (8.7) 约化为 Bianchi 曲面的第一基本形式 (参见 $(1.126)_1$ 式)

$$\mathrm{I} = \rho^2 (a^2\,\mathrm{d}u^2 + 2ab\cos\omega\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v + b^2\,\mathrm{d}v^2). \tag{8.11}$$

类似地,

$$\mathrm{II} = -\frac{\lambda_k}{\det^{1/2}[g_{1,\lambda}, g_{2,\lambda}]} \operatorname{Tr}([g_{1,\lambda}, g_{2,\lambda}](g_{\mu,\nu,\lambda} + [g_{\mu,\lambda}, g_\mu]))\,\mathrm{d}x^\mu\,\mathrm{d}x^\nu \tag{8.12}$$

在 $\lambda = 1$ 时同 Bianchi 曲面的第二基本形式 $(1.126)_2$ 一致.

8.2 非等谱线性表示的矩阵 Darboux 变换

本节中, 将要对一大类非等谱 Lax 对给出它们的矩阵 Darboux 变换. 首先我们回忆 Bianchi 曲面的 Bäcklund 变换. 如果 $\boldsymbol{r}$ 是 Bianchi 曲面的位置向量, $\phi = (\phi^1\ \phi^2)^{\mathrm{T}}$ 是带参数 $\lambda_0 = \mathrm{i}\mu(k_0)$ 的线性表示 (8.2) 的解, 那么第二个 Bianchi 曲面 Σ' 为

$$\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{r} + 2\frac{\mu}{1+\mu^2}\frac{1}{\sin\omega}\left[\sin\left(\theta - \frac{\omega}{2}\right)\frac{\boldsymbol{r}_u}{a} - \sin\left(\theta + \frac{\omega}{2}\right)\frac{\boldsymbol{r}_v}{b}\right], \tag{8.13}$$

其中

$$\theta = 2\arctan\frac{\phi^1}{\phi^2}, \tag{8.14}$$

μ 是实的, 并定义于某一 (u,v) 区域中. 曲面 Σ 和 Σ' 上对应点的距离

是坐标 u, v 的函数. 利用 (8.10) 式, 它可改写为

$$|\boldsymbol{r}' - \boldsymbol{r}| = 2|\lambda_k| \left. \frac{|\Im(\lambda_0)|}{|\lambda - \lambda_0|^2} \right|_{\lambda=1}, \tag{8.16}$$

所以, 虽然 $|\boldsymbol{r}' - \boldsymbol{r}|$ 不是常数, 但是它可以用单参数函数 $\lambda = \lambda(k)$ 表示.

下面要确定一大类非等谱 Lax 对, 对于它们, 推广的基本矩阵 Darboux 变换具有形为 (8.16) 的距离性质. 注意到相容的方程组

$$\lambda_u = \frac{1}{2}(\lambda^3 - \lambda)\frac{\rho_u}{\rho}, \quad \lambda_v = \frac{1}{2}(\lambda - \lambda^{-1})\frac{\rho_v}{\rho} \tag{8.17}$$

确定参数 λ, 而 (8.9) 式中的 K 成为积分常数. 所以, λ 满足 Laurent 多项式方程. 这一事实表明, 如果参数 λ 通过一组适当次数的 Laurent 多项式构成的相容的微分方程组来定义, 那么非等谱线性表示可能存在矩阵 Darboux 变换. 下列定理将给出这个结论.

定理 33 (推广的基本矩阵 Darboux 变换) 考虑线性的 2×2 矩阵方程

$$\Phi_u = g(\lambda)\Phi, \quad \det\Phi = \text{非零常数}, \tag{8.18}$$

其中矩阵 $g(\lambda)$ 的元素是关于复"参数" λ 为 n 次、关于 λ^{-1} 为 m 次的多项式. 设标量方程

$$\lambda_u = f(\lambda) \tag{8.19}$$

中的函数 $f(\lambda)$ 是关于 λ 为 $n+2$ 次、关于 λ^{-1} 为 m 次的多项式. 设 $\phi_{[1]}$ 和 $\phi_{[2]}$ 是对应于参数 $\lambda_1 \neq \lambda_2$ 的方程 (8.18) 的向量值"特征函数",

$$P(\lambda) = \lambda P_1 + P_0, \quad \det P_1 = 1 \tag{8.20}$$

满足线性代数方程组

$$P(\lambda_1)\phi_{[1]} = 0, \quad P(\lambda_2)\phi_{[2]} = 0, \tag{8.21}$$

其中 P_0, P_1 是与 λ 无关的 2×2 矩阵. 那么, 变换

$$\begin{aligned} \Phi \quad &\to \quad \Phi' = p(\lambda)P(\lambda)\Phi, \\ g(\lambda) &\to \quad g'(\lambda) = P(\lambda)g(\lambda)P^{-1}(\lambda) + \frac{dP(\lambda)}{du}P^{-1}(\lambda) + \frac{dp(\lambda)}{du}p^{-1}(\lambda) \end{aligned} \tag{8.22}$$

满足

(i) $g'(\lambda) \in sl(2)$,

(ii) (8.18) 式的多项式结构保持不变,

证明 (i) 同定理 28 的证明, 由

$$\operatorname{Tr}(g') = \operatorname{Tr}\left(\frac{\mathrm{d}(pP)}{\mathrm{d}u}P^{-1}p^{-1}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}[\ln\det(pP)] = 0 \tag{8.23}$$

即得 $g' \in sl(2)$.

(ii) 根据定理 28 的证明, 容易看到 $g'(\lambda)$ 的前两项是 λ 的 Laurent 多项式. 剩下的项

$$\frac{\mathrm{d}p(\lambda)}{\mathrm{d}u}p^{-1}(\lambda) = -\frac{1}{2}\frac{f(\lambda)-f(\lambda_1)}{\lambda-\lambda_1} - \frac{1}{2}\frac{f(\lambda)-f(\lambda_2)}{\lambda-\lambda_2} \tag{8.24}$$

在零点 λ_1 和 λ_2 处正则, 因为 $f(\lambda)$ 是 λ 的 Laurent 多项式. 所以只需要证明 $g'(\lambda)$ 和 $g(\lambda)$ 有相同的次数. 显然 $g'(\lambda)$ 关于 λ^{-1} 是 m 次的. 另一方面, 将变换 $(8.22)_2$ 写为

$$g'(\lambda)P(\lambda) = P(\lambda)g(\lambda) + \frac{\mathrm{d}P(\lambda)}{\mathrm{d}u} + \frac{\mathrm{d}p(\lambda)}{\mathrm{d}u}p^{-1}(\lambda)P(\lambda), \tag{8.25}$$

容易看到 (8.25) 式中 λ^{n+2} 的系数消去了, 从而 $g'(\lambda)$ 确实是 λ 的 n 次多项式. □

8.3 $su(2)$ 约束的不变性和距离性质

现在回到有几何意义的情形

$$g(\lambda)|_{\lambda=\bar{\lambda}} \in su(2), \quad f(\lambda)|_{\lambda=\bar{\lambda}} \text{ 是实的.} \tag{8.26}$$

同 7.2 节中一样, 如果取 ϕ 为带参数 λ_0 的方程组 (8.18) 的解,

$$\begin{aligned} \phi_{[1]} &= \phi, & \lambda_1 &= \lambda_0, \\ \phi_{[2]} &= A\bar{\phi}, & \lambda_2 &= \bar{\lambda}_0, \end{aligned} \tag{8.27}$$

其中 $\mathrm{i}A = \sigma_2$, 那么约束 $(8.26)_1$ 在推广的矩阵 Darboux 变换下保持不变. 对 Bianchi 方程组 (8.1), 可以验证 (8.2) 式中的矩阵和 (8.17) 中的函数分别满足定理 33 中的条件和几何约束 (8.26). 进一步, 适当选取矩阵值函数 P_1, 可以使得线性表示 (8.2) 的特殊结构得到保持. 事实上, 可以以纯代数方式选取这样的 P_1. 这里, 我们不涉及其细节, 下一小节对广义相对论中的 Ernst 方程有类似的结果. 需要说明的是, 函数 $f(\lambda)$ 在推广的矩阵 Darboux 变换下是不变的, 这给出了关于 Bianchi 曲面的已知结果, 即 ρ 和 Gauss 曲率 $\mathcal{K}$ 在 Bäcklund 变换下保持不变.

由于 Sym-Tafel 公式 (8.5) 仅同参数 k 的微分有关, 在曲面层次上的 Bäcklund 变换除了因子 λ_k 外, 同等谱 Lax 对 (7.115) 的相同, 即

$$x' = x - 2\lambda_k\frac{\Im(\lambda_0)}{\cdots}\left(\frac{2\Re(\xi)}{\cdots}t_1 - \frac{2\Im(\xi)}{\cdots}t_2 + \frac{|\xi|^2-1}{\cdots}t_3\right) \tag{8.28}$$

像以前一样, 标准正交标架 $\{\boldsymbol{t}_1, \boldsymbol{t}_2, \boldsymbol{t}_3\}$ 定义为

$$\boldsymbol{t}_i \cdot \boldsymbol{e} = \Phi^{-1} e_i \Phi, \tag{8.29}$$

而 $\xi = \phi^1/\phi^2$. 所以, 距离向量 $\boldsymbol{r}' - \boldsymbol{r}$ 的长度为

$$|\boldsymbol{r}' - \boldsymbol{r}| = 2|\lambda_k| \frac{|\Im(\lambda_0)|}{|\lambda - \lambda_0|^2}, \tag{8.30}$$

它同 Bianchi 曲面相应的量 (8.16) 一致.

8.4 广义相对论中的 Ernst 方程

下面要考虑经典微分几何中的 Bianchi 方程组和 Ernst 给出的 Einstein 理论中的一个重要方程的联系. 在 1.6 节中, 我们已经知道具有全曲率 $\mathcal{K} = -1/\rho^2$ 并满足 $\rho_{uv} = 0$ 的 Bianchi 曲面的单位法向量 $\boldsymbol{N}$ 满足向量方程

$$(\rho \boldsymbol{N} \times \boldsymbol{N}_u)_v + (\rho \boldsymbol{N} \times \boldsymbol{N}_v)_u = 0, \tag{8.31}$$

并且由此方程的解可以重新构造出曲面. 我们也知道, 通过令

$$\boldsymbol{N} = \frac{1}{|\mathcal{E}|^2 + 1} \begin{pmatrix} \mathcal{E} + \bar{\mathcal{E}} \\ -\mathrm{i}(\mathcal{E} - \bar{\mathcal{E}}) \\ |\mathcal{E}|^2 - 1 \end{pmatrix}, \quad N = \boldsymbol{N} \cdot \boldsymbol{\sigma} \tag{8.32}$$

可以得到另一种形式的方程

$$\mathcal{E}_{uv} + \frac{1}{2}\frac{\rho_v}{\rho}\mathcal{E}_u + \frac{1}{2}\frac{\rho_u}{\rho}\mathcal{E}_v = \frac{\mathcal{E}_u \mathcal{E}_v \bar{\mathcal{E}}}{|\mathcal{E}|^2 + 1}, \quad \rho_{uv} = 0, \tag{8.33}$$

并满足

$$(\rho N N_u)_v + (\rho N N_v)_u = 0, \quad N^2 = \mathbb{1}, \quad N^\dagger = N. \tag{8.34}$$

在上式中, 我们不考虑退化情形 $N = \pm\mathbb{1}$, 从而可设 N 的迹为零.

在 Sym 的方法中, 对每一个单 Lie 代数, 可以有一个相应的标准二维子流形 (曲面). 本书中, 我们限于 $su(2)$ Lie 代数, 而以 $\mathbb{R}^3$ 作为曲面的外围空间. 然而, 注意到 Lie 代数 $sl(2) \cong o(2,1)$, 在孤立子理论中它对应于嵌入于三维 Minkowski 空间 $\mathbb{M}^3$ 中的曲面. 我们在这里仅仅说明 $\mathbb{M}^3$ 中存在 Bianchi 型的 “椭圆” 曲面 $(\mathcal{K} > 0)$[358], 它可表示为复方程 (8.33) 的椭圆类比, 即

$$\xi_{z\bar{z}} + \frac{1}{2}\frac{\rho_{\bar{z}}}{\rho}\xi_z + \frac{1}{2}\frac{\rho_z}{\rho}\xi_{\bar{z}} - 2\frac{\xi_z \xi_{\bar{z}} \bar{\xi}}{\cdots}, \quad \rho_{z\bar{z}} = 0 \tag{8.35}$$

像欧氏空间中一样, ξ 和 ρ 分别是复的和实的, 而 z 和 $\bar{z}$ 是一对复共轭变量.

上述方程是广义相对论中的一个著名方程, 它给出真空 Einstein 方程的一类特殊解, ξ 是引力势. 如果引入*Ernst* 势

$$\mathcal{E} = \frac{1-\xi}{1+\xi}, \tag{8.36}$$

就得到著名的*Ernst 方程*[121]

$$\boxed{\mathcal{E}_{z\bar{z}} + \frac{1}{2}\frac{\rho_{\bar{z}}}{\rho}\mathcal{E}_z + \frac{1}{2}\frac{\rho_z}{\rho}\mathcal{E}_{\bar{z}} = \frac{\mathcal{E}_z\mathcal{E}_{\bar{z}}}{\Re(\mathcal{E})}, \quad \rho_{z\bar{z}} = 0.} \tag{8.37}$$

8.4.1 线性表示

Ernst 方程也可以通过同 $O(2,1)$ Lie 群相联系的主手场方程的非等谱推广产生. 设满足条件

$$S^2 = -\mathbb{1}, \quad \mathrm{Tr}\, S = 0 \tag{8.38}$$

的实 2×2 矩阵 S 由

$$S = \frac{1}{\mathcal{E}+\bar{\mathcal{E}}}\begin{pmatrix} \mathrm{i}(\mathcal{E}-\bar{\mathcal{E}}) & -2\mathcal{E}\bar{\mathcal{E}} \\ 2 & -\mathrm{i}(\mathcal{E}-\bar{\mathcal{E}}) \end{pmatrix} \tag{8.39}$$

给出, 则 Ernst 方程有矩阵形式

$$(\rho S S_z)_{\bar{z}} + (\rho S S_{\bar{z}})_z = 0. \tag{8.40}$$

对应的线性表示是 (参见 [220, 393])

$$\Psi_z = \frac{1}{2}(1-\lambda)SS_z\Psi, \quad \Psi_{\bar{z}} = \frac{1}{2}(1-\lambda^{-1})SS_{\bar{z}}\Psi, \tag{8.41}$$

其中非常值参数 λ 为

$$\lambda = \pm\sqrt{\frac{k-\mathrm{i}\bar{Z}(\bar{z})}{k+\mathrm{i}Z(z)}} = \bar{\lambda}^{-1}, \quad \rho = Z(z) + \bar{Z}(\bar{z}). \tag{8.42}$$

容易验证, 对 (8.41) 式交叉求导就得到矩阵方程 (8.40).

Lax 对 (8.41) 是在文献中用到的 Ernst 方程的多个线性表示中的一个, 其他一些重要的线性表示分别由 Belinsky 和 Zakharov[27], Harrison[157], Hauser 和 Ernst[159], Kinnersley 和 Chitre[199] 以及 Maison[241] 给出. Cosgrove[88] 和 Kramer[216] 给出了这些线性表示以及它们之间规范等价性的综述. 这里, 我们集中考虑 Neugebauer 在文献 [267] 给出的形式, 由它得到多项式形式的 Ernst 方程. 如果设

$$S = t^{-1}\begin{pmatrix} -\mathrm{i} & 0 \\ \cdots \end{pmatrix} t \tag{8.43}$$

则约束 (8.38) 恒成立. 当取

$$\phi = \begin{pmatrix} \mathrm{i} & \mathcal{E} \\ -\mathrm{i} & \bar{\mathcal{E}} \end{pmatrix} \tag{8.44}$$

时, 就得到 (8.39) 式. 如果取 $\Psi|_{\lambda=1} = \mathbb{1}$, 则以 ϕ 作规范变换

$$\Phi = \phi\Psi \tag{8.45}$$

后, 有 $\Phi|_{\lambda=1} = \phi$. 显然 ϕ 是变换后的 Lax 对

$$\begin{aligned}\Phi_z &= \left[\begin{pmatrix} \dfrac{\mathcal{E}_z}{\mathcal{E}+\bar{\mathcal{E}}} & 0 \\ 0 & \dfrac{\bar{\mathcal{E}}_z}{\mathcal{E}+\bar{\mathcal{E}}} \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{\mathcal{E}_z}{\mathcal{E}+\bar{\mathcal{E}}} \\ \dfrac{\bar{\mathcal{E}}_z}{\mathcal{E}+\bar{\mathcal{E}}} & 0 \end{pmatrix}\right]\Phi, \\ \Phi_{\bar{z}} &= \left[\begin{pmatrix} \dfrac{\mathcal{E}_{\bar{z}}}{\mathcal{E}+\bar{\mathcal{E}}} & 0 \\ 0 & \dfrac{\bar{\mathcal{E}}_{\bar{z}}}{\mathcal{E}+\bar{\mathcal{E}}} \end{pmatrix} + \frac{1}{\lambda} \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{\mathcal{E}_{\bar{z}}}{\mathcal{E}+\bar{\mathcal{E}}} \\ \dfrac{\bar{\mathcal{E}}_{\bar{z}}}{\mathcal{E}+\bar{\mathcal{E}}} & 0 \end{pmatrix}\right]\Phi\end{aligned} \tag{8.46}$$

在 $\lambda = 1$ 时的解. 所以, 用特征函数 Φ 可显式表示 Ernst 势 $\mathcal{E}$. 由于 Darboux 变换作用在特征函数上, 这个结果对直接构造变换后的 Ernst 势是关键的.

8.4.2　对偶 "Ernst 方程"

首先研究线性表示 (8.46) 的代数结构. 同 Bianchi 曲面的情形一样, 参数 λ 满足方程组

$$\lambda_z = \frac{1}{2}(\lambda^3 - \lambda)C, \quad \lambda_{\bar{z}} = \frac{1}{2}(\lambda - \lambda^{-1})C^*, \tag{8.47}$$

其中

$$C = \frac{\rho_z}{\rho}, \quad C^* = \frac{\rho_{\bar{z}}}{\rho}. \tag{8.48}$$

于是, (8.46) 式具有形式

$$\begin{aligned}\Phi_z &= \left[\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{pmatrix}\right]\Phi, \\ \Phi_{\bar{z}} &= \left[\begin{pmatrix} B^* & 0 \\ 0 & A^* \end{pmatrix} + \frac{1}{\lambda} \begin{pmatrix} 0 & B^* \\ A^* & 0 \end{pmatrix}\right]\Phi,\end{aligned} \tag{8.49}$$

其中 λ 满足方程组 (8.47). 我们自然要考虑形为 (8.47), (8.49) 的 Lax 对, 其中

$$
\begin{aligned}
A_{\bar{z}}+AA^*-AB^*+\frac{1}{2}C^*A+\frac{1}{2}CB^*=0,\\
B_{\bar{z}}+BB^*-A^*B+\frac{1}{2}C^*B+\frac{1}{2}CA^*=0,\\
A^*_z+AA^*-A^*B+\frac{1}{2}CA^*+\frac{1}{2}C^*B=0,\\
B^*_z+BB^*-AB^*+\frac{1}{2}CB^*+\frac{1}{2}C^*A=0,\\
C_{\bar{z}}+CC^*=0,\\
C^*_z+CC^*=0,
\end{aligned}
\tag{8.50}
$$

由此得

$$
\begin{aligned}
A_{\bar{z}}+AA^*=B^*_z+BB^*,\\
A^*_z+AA^*=B_{\bar{z}}+BB^*,\\
C_{\bar{z}}=C^*_z.
\end{aligned}
\tag{8.51}
$$

上式保证存在函数 $\mathcal{F},\mathcal{F}^*$ 和 ρ 满足线性方程组

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{F}_z=A(\mathcal{F}+\mathcal{F}^*), \qquad \mathcal{F}_{\bar{z}}=B^*(\mathcal{F}+\mathcal{F}^*),\\
&\mathcal{F}^*_z=B(\mathcal{F}+\mathcal{F}^*), \qquad \mathcal{F}^*_{\bar{z}}=A^*(\mathcal{F}+\mathcal{F}^*),\\
&\rho_z=C\rho, \qquad \rho_{\bar{z}}=C^*\rho,
\end{aligned}
\tag{8.52}
$$

这样, A,B,C,A^*,B^*,C^* 就可用 $\mathcal{F},\mathcal{F}^*,\rho$ 表示出来. 方程组 (8.50) 成为

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}_{z\bar{z}}+\frac{1}{2}\frac{\rho_{\bar{z}}}{\rho}\mathcal{F}_z+\frac{1}{2}\frac{\rho_z}{\rho}\mathcal{F}_{\bar{z}}=2\frac{\mathcal{F}_z\mathcal{F}_{\bar{z}}}{\mathcal{F}+\mathcal{F}^*},\\
\mathcal{F}^*_{z\bar{z}}+\frac{1}{2}\frac{\rho_{\bar{z}}}{\rho}\mathcal{F}^*_z+\frac{1}{2}\frac{\rho_z}{\rho}\mathcal{F}^*_{\bar{z}}=2\frac{\mathcal{F}^*_z\mathcal{F}^*_{\bar{z}}}{\mathcal{F}+\mathcal{F}^*}
\end{aligned}
\tag{8.53}
$$

以及调和条件

$$
\rho_{z\bar{z}}=0. \tag{8.54}
$$

在

$$
A^*=\bar{A}, \quad B^*=\bar{B}, \quad C^*=\bar{C} \tag{8.55}
$$

的特殊情形, 可不妨设

$$
\mathcal{F}^*=\bar{\mathcal{F}}, \quad \bar{\rho}=\rho. \tag{8.56}
$$

如果将 $\mathcal{F}$ 等同于 Ernst 势 $\mathcal{E}$, 则重新得到了 Ernst 方程 (8.37). 于是, Ernst 方程包

Ernst 型方程组 (8.53), (8.54) 的另一种特殊情形为

$$\bar{\mathcal{F}} = \mathcal{F}, \quad \bar{\mathcal{F}}^* = \mathcal{F}^*, \quad \bar{\rho} = \rho, \tag{8.57}$$

下面可以看到, 它直接联系于时空度量. 易证代换

$$\begin{aligned} \hat{A} &= -B + \frac{1}{2}C, & \hat{A}^* &= -A^* + \frac{1}{2}C^*, \\ \hat{B} &= -A + \frac{1}{2}C, & \hat{B}^* &= -B^* + \frac{1}{2}C^*, \\ \hat{C} &= C, & \hat{C}^* &= \ \ C^* \end{aligned} \tag{8.58}$$

保持 (8.50) 式的形式. 如果 $A, \cdots, C^*$ 同 Ernst 方程相联系, 即它们满足约束 (8.55), 那么这对应于特殊情形

$$\hat{B}^* = \bar{\hat{A}}, \quad \hat{A}^* = \bar{\hat{B}}, \quad \hat{C}^* = \bar{\hat{C}}. \tag{8.59}$$

这样, $\hat{A}, \hat{A}^*, \hat{B}, \hat{B}^*$ 可以按 (8.52) 式用两个实函数 $\mathcal{F}, \mathcal{F}^*$ 表示. 所以, Ernst 方程 (8.37) 和实值的 "对偶 *Ernst 方程*" (8.53) 可以互相对应. 注意到对偶 Ernst 方程可以通过将复共轭改为星号运算从 Ernst 方程形式地得到. 用 Ernst 势 $\mathcal{E}$ 和 $\mathcal{F}, \mathcal{F}^*$ 代入线性变换 (8.58), 就得到下列定理[217]:

定理 34 *Ernst 方程 (8.37) 的解和 (实值的) 对偶 Ernst 方程 (8.53) 的解通过接触变换*

$$(\mathfrak{S}) \qquad \mathcal{F} = \frac{\rho}{f} + \omega, \quad \mathcal{F}^* = \frac{\rho}{f} - \omega \tag{8.60}$$

相联系, 其中 $f = \Re(\mathcal{E})$, 而实势 ω 由相容的方程组

$$\omega_z = \mathrm{i}\rho \frac{[\Im(\mathcal{E})]_z}{\Re(\mathcal{E})^2}, \quad \omega_{\bar{z}} = -\mathrm{i}\rho \frac{[\Im(\mathcal{E})]_{\bar{z}}}{\Re(\mathcal{E})^2} \tag{8.61}$$

所定义.

方程组 (8.50) 还有一个重要性质, 它具有 "守恒律"

$$(ABC^{-1})_{\bar{z}} = (A^*B^*C^{*-1})_z. \tag{8.62}$$

对 Ernst 方程, 这意味着存在实势 γ 满足

$$\gamma_z = \frac{1}{4}\frac{\rho}{\rho_z}\frac{\mathcal{E}_z\bar{\mathcal{E}}_z}{\Re(\mathcal{E})^2}, \quad \gamma_{\bar{z}} = \frac{1}{4}\frac{\rho}{\rho_{\bar{z}}}\frac{\mathcal{E}_{\bar{z}}\bar{\mathcal{E}}_{\bar{z}}}{\Re(\mathcal{E})^2}. \tag{8.63}$$

需要强调的是, 这些关系可以利用 (8.58) 式用 $\mathcal{F}$ 和 $\mathcal{F}^*$ 表示出来. 现在定义四维伪 Riemannian 度量[236]

$$ds^2 = \frac{1}{f}(e^{2\gamma} dz d\bar{z} + \rho^2 d\phi^2) - f(dt - \omega d\phi)^2 \tag{8.64}$$

那么当 Ernst 方程和 Frobenius 方程组 (8.63) 成立时, 有真空 Einstein 方程

$$R_{ij} = 0, \tag{8.65}$$

这里 R_{ij} 是通常的 Ricci 张量[117]. 度量 (8.64) 的主要特点是它是分块对角的, 并且不依赖于坐标 t 和 φ. 用广义相对论的语言来说, 时空度量 (8.64) 允许两个互相交换的分别为类时和类空的 Killing 向量 ∂_t 和 ∂_φ, 并且它们是超曲面正交的[221]. 从物理角度来看, t 和 φ 可以看作为时间坐标和角坐标. 于是, 对偶 Ernst 方程和 Ernst 方程一样, 描写了真空中的静态柱对称引力场[121].

8.5 Ehlers 变换和 Matzner-Misner 变换

Kramer-Neugebauer 变换 (8.60), (8.61) 在构造 Ernst 方程及其对偶方程的解时起了关键的作用. 这是因为存在两个 Möbius 变换联系 Ernst 方程及其对偶方程. 显然矩阵方程 (8.40) 在相似变换

$$S \to \mathcal{C}^{-1} S \mathcal{C} \tag{8.66}$$

下保持不变, 这里 $\mathcal{C}$ 是任意的常值实矩阵. 这个不变性由 Möbius 变换

$$(\mathfrak{E}) \qquad \mathcal{E} \to \frac{\alpha\mathcal{E} + \mathrm{i}\beta}{\mathrm{i}\gamma\mathcal{E} + \delta}, \qquad \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R} \tag{8.67}$$

表现出来, 这个变换称为*Ehlers 变换*[115]. 另一方面, 对偶 Ernst 方程也可以用矩阵

$$F = \frac{1}{\mathcal{F} + \mathcal{F}^*} \begin{pmatrix} \mathcal{F} - \mathcal{F}^* & 2\mathcal{F}\mathcal{F}^* \\ 2 & \mathcal{F}^* - \mathcal{F} \end{pmatrix} \tag{8.68}$$

写为

$$(\rho F F_z)_{\bar{z}} + (\rho F F_{\bar{z}})_z = 0. \tag{8.69}$$

这时, 相应的 Möbius 变换是

$$(\mathfrak{M}) \qquad \mathcal{F} \to \frac{a\mathcal{F} + b}{c\mathcal{F} + d}, \qquad \mathcal{F}^* \to \frac{a\mathcal{F}^* - b}{-c\mathcal{F}^* + d}, \tag{8.70}$$

其中 $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ 是常数. *Matzner-Misner* 变换[252] (8.70) 直接作用在度量系数 f, ω, ρ 上, 并可加上一个坐标 t 和 φ 的线性变换. 所以, 作用在对偶 Ernst 方程上的 Möbius 变换由 Killing 向量 ∂_t 和 ∂_φ 的平凡线性叠加得到.

变换 $\mathfrak{S}, \mathfrak{E}, \mathfrak{M}$ 可以如下应用. 给定对偶 Ernst 方程的一个解 $(\mathcal{F}, \mathcal{F}^*)$ (或等价

换 $\mathfrak{M}$, 然后用 Kramer-Neugebauer 变换的逆 $\mathfrak{S}^{-1}$ 将对偶 Ernst 方程的一个解变为 Ernst 方程的解, 再应用 Ehlers 变换 $\mathfrak{E}$, 最后用 Kramer-Neugebauer 变换 $\mathfrak{S}$ 产生对偶 Ernst 方程的又一个新解. 这样得到复合的*Geroch 变换* $\mathfrak{G}$

$$(\mathfrak{G}) \qquad (\mathcal{F}, \mathcal{F}^*) \rightarrow (\mathfrak{S} \circ \mathfrak{E} \circ \mathfrak{S}^{-1} \circ \mathfrak{M})(\mathcal{F}, \mathcal{F}^*). \tag{8.71}$$

在 Geroch 在两篇重要文章中指出[149], 原则上可以反复应用 Geroch 变换 (8.71)

$$\cdots \circ \mathfrak{G} \circ \mathfrak{G} \circ \mathfrak{G} \circ \mathfrak{G} \tag{8.72}$$

生成 (对偶) Ernst 方程包含任意多个参数的解. 事实上, 在每步递推时变换 $\mathfrak{G}$ 的参数都可取为互不相等. Geroch 猜想可以将它作用在平坦时空上产生任何静态柱对称时空. 随后 Hauser 和 Ernst[160] 在一定的约束下证明了这一猜想. 不过, 实际上, 复合 Geroch 变换 (8.72) 的显式表示是相当困难的, 需要引入称为*Kinnersley-Chitre 势*的一个无限系列[197, 198]. 这些势用于证明这些 Geroch 变换形成一个无限维 Banach Lie 群[341]. 这个群的一个重要子集构成有限*Hoenselaers-Kinnersley-Xanthopoulos (HKX) 变换*[168]. 通过一个显式解, 用这些 HKX 变换证明了一个猜想, 即存在引力的自旋–自旋排斥[104].

8.6 Neugebauer 变换和 Harrison Bäcklund 变换

1978 年, Harrison[157] 基于 Maison[241] 的工作, 用 Wahlquist-Estabrook 方法[123, 378] 构造了 Ernst 方程的自 Bäcklund 变换. 这个 Bäcklund 变换是 Bianchi 曲面经典 Bäcklund 变换的 "椭圆" 等价物.

1979 年, Neugebauer[267] 独立地导出了一个 Bäcklund 变换, 它成为构造 Ernst 方程的 Bäcklund 变换的基本元素. 例如, Harrison 变换可以分解为两个 Neugebauer 变换, 而 Belinsky 和 Zakharov [27] 用于生成 Ernst 方程多孤立子解的 Darboux 变换也可用 Neugebauer 变换来表示. 所以, 我们自然使用 Neugebauer 的基本 Bäcklund 变换来构造广义相对论中的 Ernst 方程的矩阵 Darboux 型变换.

考虑耦合 Ernst 型方程组 (8.53), (8.54) 所相应的线性系统 (8.49) 的向量值解 ϕ. 易证比值

$$q = -\frac{\phi^2}{\phi^1}, \qquad \phi = \begin{pmatrix} \phi^1 \\ \phi^2 \end{pmatrix} \tag{8.73}$$

满足 Riccati 方程

$$q_z = (\lambda q^2 - q)A + (q - \lambda)B, \tag{8.74}$$

其中 λ 是方程组 (8.47) 的解, 即满足

$$\lambda_z = \frac{1}{2}(\lambda^3 - \lambda)C, \quad \lambda_{\bar{z}} = \frac{1}{2}(\lambda - \lambda^{-1})C^*. \tag{8.75}$$

分别对应于 Ernst 和对偶 Ernst 情形, 即 $\mathcal{F} = \mathcal{E}, \mathcal{F}^* = \bar{\mathcal{E}}$ (*Ernst* 图像) 和 $\bar{\mathcal{F}} = \mathcal{F}, \bar{\mathcal{F}}^* = \mathcal{F}^*$ (度量图像), 可以加上下列相容的约束:

$$\begin{aligned} &\text{Ernst 图像:} \qquad \bar{q} = 1/q, \qquad \bar{\lambda} = 1/\lambda, \\ &\text{度量图像:} \qquad \bar{q} = q, \qquad \bar{\lambda} = 1/\lambda. \end{aligned} \tag{8.76}$$

现在, 对六元组 $\Omega = (A, A^*, B, B^*, C, C^*)$ 的 Neugebauer Bäcklund 变换可以用一对伪势 $\beta = (q, \lambda)$ 完全表示出来[123, 378]. 下面, 变换后所得量上面的上标 $^{(i)}$ 表示由 $\beta_i = (q_i, \lambda_i)$ 产生.

定理 35 (Neugebauer Bäcklund 变换 $\Im$) *设 $\Omega = (A, A^*, B, B^*, C, C^*)$ 是多项式形式的 Ernst 型方程组 (8.50) 的解, $\beta = (q, \lambda), \beta_1 = (q_1, \lambda_1)$ 是对应的相容方程组 (8.74), (8.75) 的解. 那么, Ernst 型方程组的第二个解和相应的 Riccati 方程组的解为*

$$(\Im)\begin{cases} A^{(1)} = \lambda_1 q_1 A, & B^{(1)} = \dfrac{\lambda_1}{q_1}B, \qquad C^{(1)} = \lambda_1^2 C, \\ A^{*(1)} = \dfrac{1}{q_1\lambda_1}A^*, & B^{*(1)} = \dfrac{q_1}{\lambda_1}B^*, \qquad C^{*(1)} = \dfrac{1}{\lambda_1^2}C^*, \\ q^{(1)} = \dfrac{q}{q_1}, & \lambda^{(1)} = \dfrac{\lambda}{\lambda_1}. \end{cases} \tag{8.77}$$

Ernst 图像和度量图像在 $\Im$ 作用下均保持不变.

这个定理可以直接验证. 特别地, 如果加上约束 (8.76), 那么新解 $\Omega^{(1)}$ 分别满足 "实条件" (8.55) 和 (8.59). 所以, Neugebauer 变换将 Ernst 方程或对偶 Ernst 方程的解变为自己的解. 注意 Neugebauer 变换改变了由 $(8.52)_{5,6}$ 式定义的调和函数 ρ. 事实上, 有

$$\rho^{(1)} = \hat{c}\frac{(\lambda_1 - \lambda_1^{-1})^2}{\rho}, \tag{8.78}$$

其中 $\hat{c}$ 是任意常数. 这等价于作了 Bianchi 变换 (8.4). 然而, 守恒律 (8.62) 中的 ABC^{-1} 和 $A^*B^*C^{*-1}$ 是不变的, 因此度量函数 γ 在 $\Im$ 作用下不变.

当 $\lambda_1 = 1$ 时, Riccati 方程组 (8.74) 的解为

$$\mathcal{F}^* - \kappa$$

其中 $\kappa \in \mathbb{C}$ 是任意的积分常数. 这时从变换 (8.77), 即

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_z^{(1)} &= q_1 \frac{\mathcal{F}^{(1)} + \mathcal{F}^{*(1)}}{\mathcal{F} + \mathcal{F}^*} \mathcal{F}_z, \qquad \mathcal{F}_z^{*(1)} = \frac{1}{q_1} \frac{\mathcal{F}^{(1)} + \mathcal{F}^{*(1)}}{\mathcal{F} + \mathcal{F}^*} \mathcal{F}_z^*, \\ \mathcal{F}_{\bar z}^{(1)} &= q_1 \frac{\mathcal{F}^{(1)} + \mathcal{F}^{*(1)}}{\mathcal{F} + \mathcal{F}^*} \mathcal{F}_{\bar z}, \qquad \mathcal{F}_{\bar z}^{*(1)} = \frac{1}{q_1} \frac{\mathcal{F}^{(1)} + \mathcal{F}^{*(1)}}{\mathcal{F} + \mathcal{F}^*} \mathcal{F}_{\bar z}^*\end{aligned} \tag{8.80}$$

中可以显式解出新的势 $\mathcal{F}^{(1)}$ 和 $\mathcal{F}^{*(1)}$. 容易验证

$$\mathcal{F}^{(1)} = \frac{a\mathcal{F} + b}{c\mathcal{F} + d}, \quad \mathcal{F}^{*(1)} = \frac{a\mathcal{F}^* - b}{-c\mathcal{F}^* + d}, \quad d = c\kappa, \tag{8.81}$$

它就是一般的 Ernst 型方程组 (8.53) 的 Möbius 变换. 所以, 对于 Ernst 方程及其对偶方程, Neugebauer 变换 $\mathfrak{I}$ 表示 Ehlers 变换 (8.67) 和 Matzner-Misner 变换 (8.70) 的推广.

Neugebauer 变换的第二个应用是在解空间上的平凡作用. 如果 $\beta_2 = (q_2, \lambda_2)$ 是 Ω 对应的另一个解, 那么由定理 35,

$$q_2^{(1)} = \frac{q_2}{q_1}, \quad \lambda_2^{(1)} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \tag{8.82}$$

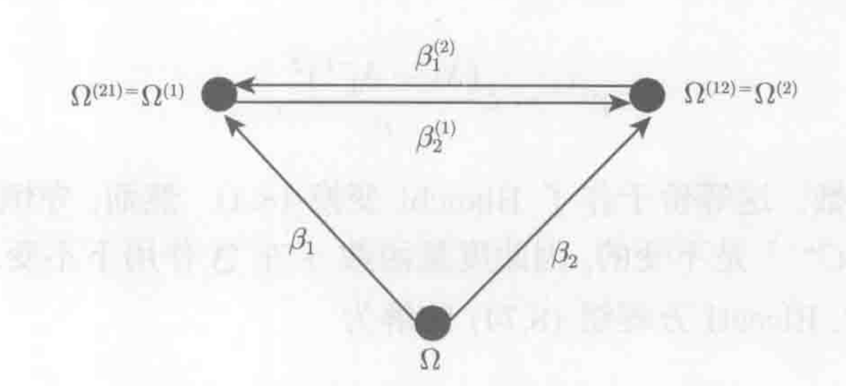
就是 $\Omega^{(1)}$ 对应的解. 可以将这个解用于第二次的 Neugebauer 变换中, 得到

$$\begin{aligned} q^{(12)} &= \frac{q^{(1)}}{q_2^{(1)}} = \frac{q}{q_2} =: q^{(2)}, \\ \lambda^{(12)} &= \frac{\lambda^{(1)}}{\lambda_2^{(1)}} = \frac{\lambda}{\lambda_2} =: \lambda^{(2)}. \end{aligned} \tag{8.83}$$

如果将定理 35 中的 β_1 换为 β_2, 则可直接得到 $\Omega^{(12)}$. 结果, Neugebauer 变换互相并不交换, 因此它们的次序是至关重要的. 复合规律

$$\begin{aligned} \mathfrak{I}(\beta_2^{(1)}) \circ \mathfrak{I}(\beta_1) &= \mathfrak{I}(\beta_2), \\ \mathfrak{I}(\beta_1^{(2)}) \circ \mathfrak{I}(\beta_2) &= \mathfrak{I}(\beta_1) \end{aligned} \tag{8.84}$$

见图 8.1.



如果用 Kramer-Neugebauer 变换 $\mathfrak{S}$ 连接相邻两个变换 $\mathfrak{I}$, 就可以重复进行 Neugebauer 变换. 为此, 需要知道在 $\mathfrak{S}$ 作用下 $\beta=(q,\lambda)$ 是如何变换的. 这由下面的定理给出.

定理 36 (Kramer-Neugebauer 变换 $\mathfrak{S}$) 设 $\Omega=(A,A^*,B,B^*,C,C^*)$ 是多项式形式的 Ernst 型方程组 (8.50) 的解, $\beta=(q,\lambda)$ 是对应的相容方程组 (8.74), (8.75) 的解. 那么, Ernst 型方程组的第二个解 $\hat{\Omega},\hat{\beta}$ 和相应的 Riccati 方程组的解为

$$(\mathfrak{S})\begin{cases}\hat{A}=-B+\dfrac{1}{2}C, & \hat{A}^*=-A^*+\dfrac{1}{2}C^*, \quad \hat{C}=C,\\ \hat{B}=-A+\dfrac{1}{2}C, & \hat{B}^*=-B^*+\dfrac{1}{2}C^*, \quad \hat{C}^*=C^*,\\ \hat{q}=\dfrac{q-\lambda}{\lambda q-1}, & \hat{\lambda}=\lambda.\end{cases} \tag{8.85}$$

变换 $\mathfrak{S}$ 是对合的, 即它满足 $\mathfrak{S}^2=\mathrm{id}$. 特别地, Ernst 图像映为度量图像, 反之亦然.

注意 Kramer-Neugebauer 变换交换实约束 (8.76), 调和函数 ρ 保持不变, 而

$$\begin{aligned}\hat{A}\hat{B}\hat{C}^{-1}&=ABC^{-1}-\frac{1}{2}(A+B)+\frac{1}{4}C\\&=\gamma_z-\frac{1}{2}\frac{\mathcal{F}_z+\mathcal{F}_z^*}{\mathcal{F}+\mathcal{F}^*}+\frac{1}{4}\frac{\rho_z}{\rho}.\end{aligned} \tag{8.86}$$

对 $\hat{A}^*\hat{B}^*\hat{C}^{*-1}$ 有类似的表达式, 由此得到, 类似于 (8.63) 式的带 "ˆ" 的方程的解在略去一个无关紧要的相加常数后为

$$\hat{\gamma}=\gamma+\frac{1}{4}\ln\left[\frac{\rho}{(\mathcal{F}+\mathcal{F}^*)^2}\right]. \tag{8.87}$$

于是, 可以不通过积分得到 (8.64) 式中新的度量系数 $\hat{\gamma}$.

现在考虑形为

$$\tilde{\mathfrak{I}}=\mathfrak{S}\circ\mathfrak{I}\circ\mathfrak{S} \tag{8.88}$$

的变换. 设 β 和 β_2 是与解 Ω 相联系的两个伪势, 那么由定理 36,

$$\begin{aligned}\hat{q}&=\frac{q-\lambda}{\lambda q-1}, \qquad \hat{\lambda}=\lambda,\\ \hat{q}_2&=\frac{q_2-\lambda_2}{\lambda_2 q_2-1}, \qquad \hat{\lambda}_2=\lambda_2\end{aligned} \tag{8.89}$$

是与 $\hat{\Omega}$ 相联系的伪势. 对 $\hat{\beta}$ 再次应用 Neugebauer 变换 $\mathfrak{I}$ 得到解 $\hat{\Omega}^{(2)}$, 相应的伪势为

$$\hat{q}^{(2)}=\frac{\hat{q}}{\cdots}=\frac{(q-\lambda)(\lambda_2 q_2-1)}{\cdots}, \qquad \hat{\lambda}^{(2)}=\frac{\hat{\lambda}}{\cdots}=\frac{\lambda}{\cdots} \tag{8.90}$$

最后, 再次应用 Kramer-Neugebauer 变换 $\mathfrak{S}$ 给出解 $\tilde{\Omega}^{(2)}$, 它对应的 $\tilde{\beta}^{(2)}$ 由下列定理给出.

定理 37 (Neugebauer Bäcklund 变换 $\tilde{\mathfrak{J}}$) *设 $\Omega=(A,A^*,B,B^*,C,C^*)$ 是多项式形式的 Ernst 型方程组 (8.50) 的解, $\beta=(q,\lambda)$, $\beta_1=(q_1,\lambda_1)$ 是对应的相容方程组 (8.74), (8.75) 的解. 那么, 由复合变换 $\tilde{\mathfrak{J}}=\mathfrak{S}\circ\mathfrak{J}\circ\mathfrak{S}$ 给出的 Ernst 型方程组的第二个解 $\tilde{\Omega}^{(2)},\tilde{\beta}^{(2)}$ 和相应的 Riccati 方程组的解为*

$$(\tilde{\mathfrak{J}})\begin{cases}\tilde{A}^{(2)}=\lambda_2\dfrac{\lambda_2q_2-1}{q_2-\lambda_2}A-\dfrac{1}{2}\dfrac{\lambda_2^3-\lambda_2}{q_2-\lambda_2}C,\\[2mm] \tilde{A}^{*(2)}=\dfrac{1}{\lambda_2}\dfrac{\lambda_2q_2-1}{q_2-\lambda_2}A^*-\dfrac{q_2}{2\lambda_2^2}\dfrac{\lambda_2^2-1}{q_2-\lambda_2}C^*,\\[2mm] \tilde{B}^{(2)}=\lambda_2\dfrac{q_2-\lambda_2}{\lambda_2q_2-1}B+\dfrac{q_2}{2}\dfrac{\lambda_2^3-\lambda_2}{\lambda_2q_2-1}C,\\[2mm] \tilde{B}^{*(2)}=\dfrac{1}{\lambda_2}\dfrac{q_2-\lambda_2}{\lambda_2q_2-1}B^*+\dfrac{1}{2\lambda_2^2}\dfrac{\lambda_2^2-1}{\lambda_2q_2-1}C^*,\\[2mm] \tilde{C}^{(2)}=\lambda_2^2C,\quad \tilde{C}^{*(2)}=\dfrac{1}{\lambda_2^2}C^*,\\[2mm] \tilde{q}^{(2)}=\dfrac{\lambda_2(q-\lambda)(\lambda_2q_2-1)-\lambda(q_2-\lambda_2)(\lambda q-1)}{\lambda(q-\lambda)(\lambda_2q_2-1)-\lambda_2(q_2-\lambda_2)(\lambda q-1)},\quad \tilde{\lambda}^{(2)}=\dfrac{\lambda}{\lambda_2}.\end{cases}\tag{8.91}$$

Ernst 图像和度量图像在 $\tilde{\mathfrak{J}}$ 作用下均保持不变.

Neugebauer Bäcklund 变换 $\mathfrak{J}$ 和 $\tilde{\mathfrak{J}}$ 可以以下列方式重复进行. 设 $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\cdots$ 是同种子解 Ω 相联系的伪势对, 由 Neugebauer 变换 $\mathfrak{J}(\beta_1)$ 给出第二个解 $\Omega^{(1)}$, 相应的伪势由定理 35 得出, 即

$$\beta_2,\beta_3,\cdots\xrightarrow{\mathfrak{J}(\beta_1)}\beta_2^{(1)},\beta_3^{(1)},\cdots\tag{8.92}$$

再由 Neugebauer 变换 $\tilde{\mathfrak{J}}(\beta_2^{(1)})$ 生成第三个解 $\tilde{\Omega}^{(2)}$, 而定理 37 通过映射

$$\beta_3^{(1)},\cdots\xrightarrow{\tilde{\mathfrak{J}}(\beta_2^{(1)})}\tilde{\beta}_3^{(12)},\cdots\tag{8.93}$$

给出伪势. 再次应用 Neugebauer 变换 $\mathfrak{J}(\tilde{\beta}_3^{(12)})$ 给出第四个解 $\tilde{\Omega}^{(123)}$. 这个过程可以无限重复下去以生成方程组 (8.50) 任意复杂的解, 相应的复合变换可以写作

$$\cdots\circ\tilde{\mathfrak{J}}(\tilde{\beta}_4^{(123)})\circ\mathfrak{J}(\tilde{\beta}_3^{(12)})\circ\tilde{\mathfrak{J}}(\beta_2^{(1)})\circ\mathfrak{J}(\beta_1).\tag{8.94}$$

另一方面, 也可以取 $\tilde{\mathfrak{J}}$ 为 Neugebauer 变换中的第一个以生成

$$\cdots\circ\mathfrak{J}(\tilde{\tilde{\beta}}_4^{(123)})\circ\tilde{\mathfrak{J}}(\tilde{\beta}_3^{(12)})\circ\mathfrak{J}(\tilde{\beta}_2^{(1)})\circ\tilde{\mathfrak{J}}(\beta_1)\tag{8.95}$$

一般情况下, 由变换 (8.94) 和 (8.95) 生成的解并不相同. 特别地, 可由变换 (8.77) 和 (8.91) 显式算出, 通常

$$\tilde{\mathfrak{I}}(\beta_2^{(1)}) \circ \mathfrak{I}(\beta_1) \neq \mathfrak{I}(\tilde{\beta}_2^{(1)}) \circ \tilde{\mathfrak{I}}(\beta_1). \tag{8.96}$$

但是, 在

$$\lambda_2 = 1, \quad q_2 = 1 \tag{8.97}$$

的情形, Neugebauer 变换 $\mathfrak{I}$ 和 $\tilde{\mathfrak{I}}$ 分别给出伪势

$$q_2^{(1)} = \frac{1}{q_1}, \quad \lambda_2^{(1)} = \frac{1}{\lambda_1}, \quad \tilde{q}_2^{(1)} = q_1, \quad \tilde{\lambda}_2^{(1)} = \frac{1}{\lambda_1}, \tag{8.98}$$

这时

$$\tilde{\mathfrak{I}}(\beta_2^{(1)}) \circ \mathfrak{I}(\beta_1) = \mathfrak{I}(\tilde{\beta}_2^{(1)}) \circ \tilde{\mathfrak{I}}(\beta_1). \tag{8.99}$$

这个“交换定理”首先由 Neugebauer 给出[267], 见图 8.2.

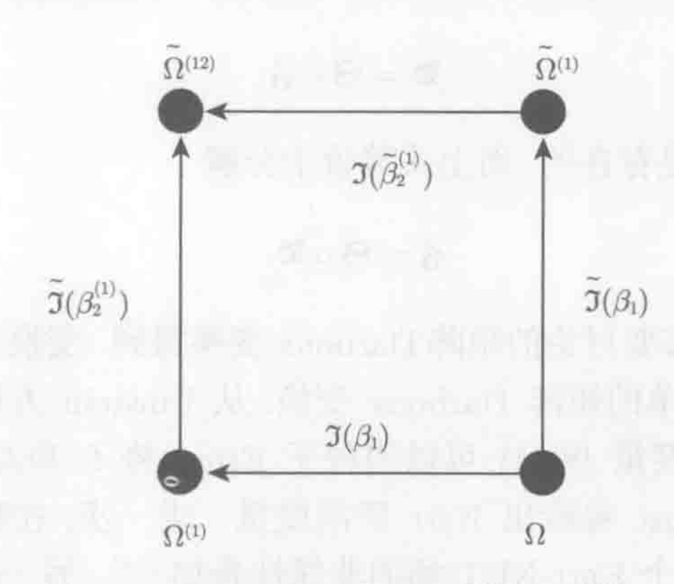


图 8.2 Neugebauer 交换定理, 其中伪势 $\beta_2^{(1)}$ 和 $\tilde{\beta}_2^{(1)}$ 由 (8.98) 式给出

对 Ernst 方程 ($\mathcal{F} = \mathcal{E}, \mathcal{F}^* = \bar{\mathcal{E}}$), 交换定理 (8.99) 中的复合变换等价于由 Harrison 给出的单一的变换, 该变换用了与上面不同的但代数相关的伪势[157]. 变换 (8.99) 称为*Harrison* 变换. 它在种子解 Ω 上的显式作用由下列定理给出.

定理 38 (Harrison Bäcklund 变换) *设 $\Omega = (A, A^*, B, B^*, C, C^*)$ 是多项式形式的 Ernst 型方程组 (8.50) 的解, $\beta = (q, \lambda)$, $\beta_1 = (q_1, \lambda_1)$ 是对应的相容方程组 (8.74), (8.75) 的解. 那么, 在 Harrison 变换*

$$\tilde{\mathfrak{I}}\left(\frac{1}{q_1}, \frac{1}{\lambda_1}\right) \circ \mathfrak{I}(q_1, \lambda_1) = \mathfrak{I}\left(q_1, \frac{1}{\lambda_1}\right) \circ \tilde{\mathfrak{I}}(q_1, \lambda_1) \tag{8.100}$$

作用下, 有

$$
(\mathfrak{H})\begin{cases}
\tilde{A}^{(1\cdot)} = q_1\dfrac{\lambda_1 q_1 - 1}{q_1-\lambda_1}A - \dfrac{q_1}{2}\dfrac{\lambda_1^2-1}{q_1-\lambda_1}C,\\[2mm]
\tilde{A}^{*(1\cdot)} = \dfrac{1}{q_1}\dfrac{\lambda_1 q_1 - 1}{q_1-\lambda_1}A^* - \dfrac{1}{2}\dfrac{\lambda_1-\lambda_1^{-1}}{q_1-\lambda_1}C^*,\\[2mm]
\tilde{B}^{(1\cdot)} = \dfrac{1}{q_1}\dfrac{q_1-\lambda_1}{\lambda_1 q_1 - 1}B + \dfrac{1}{2}\dfrac{\lambda_1^2-1}{\lambda_1 q_1-1}C,\\[2mm]
\tilde{B}^{*(1\cdot)} = q_1\dfrac{q_1-\lambda_1}{\lambda_1 q_1 - 1}B^* + \dfrac{q_1}{2}\dfrac{\lambda_1-\lambda_1^{-1}}{\lambda_1 q_1-1}C^*,\\[2mm]
\tilde{C}^{(1\cdot)} = C, \quad \tilde{C}^{*(1\cdot)} = C^*.
\end{cases} \tag{8.101}
$$

Ernst 图像和度量图像在 $\mathfrak{H}$ 作用下均保持不变.

在此定理中, 上标 $^{(1\cdot)}$ 表示在特殊选取 $\lambda_2 = 1$ 时 Harrison 变换不依赖于 β_2. 变换 $(8.101)_{5,6}$ 表明, 同 Neugebauer 变换 $\mathfrak{I}$ 和 $\tilde{\mathfrak{I}}$ 不同, Harrison 变换 $\mathfrak{H}$ 保持 C 和 C^* 不变, 从而保持调和函数 ρ 不变. 由此, 从类似于方程组 (8.52) 的方程组中得到的新势 $\mathcal{F}^{(1\cdot)}$ 和 $\mathcal{F}^{*(1\cdot)}$ 不能用种子势 $\mathcal{F}, \mathcal{F}^*$ 和伪势 β_1 显式表示. 但是, 与变换

$$
\mathfrak{D} = \mathfrak{S} \circ \mathfrak{H} \tag{8.102}
$$

相联系的势的表达式是存在的, 而上式等价于分解

$$
\mathfrak{H} = \mathfrak{S} \circ \mathfrak{D}. \tag{8.103}
$$

这可用代数方法从下节要讨论的矩阵 Darboux 变换得到. 变换 $\mathfrak{D}$ 可以等同于 Ernst 型方程组 (8.53) 最简单的矩阵 Darboux 变换. 从 Einstein 方程来看, 这意味着与 Harrison 变换相关的度量 (8.64) 可以用种子 Ernst 势 $\mathcal{E}$ 和对应的伪势 β_1 给出. 例如, 平坦时空的 Ernst 势给出 Kerr 黑洞度量. 进一步, 在种子解上作用 N 次 Harrison 变换给出 N 个 Kerr-NUT 场的非线性叠加[218]. 另一类自然的种子 Ernst 势为 Weyl 类[383]

$$
\mathcal{E} = \bar{\mathcal{E}} = e^{2U}, \quad U_{z\bar{z}} + \frac{1}{2}\frac{\rho_{\bar{z}}}{\rho}U_z + \frac{1}{2}\frac{\rho_z}{\rho}U_{\bar{z}} = 0. \tag{8.104}
$$

这时, 作用 N 次 Harrison 变换给出 Weyl 背景下 N 个 Kerr-NUT 场的非线性叠加[268]. Papapetrou 类

$$
\mathcal{E} = (\cosh U)^{-1} + \mathrm{i}\tanh U \tag{8.105}
$$

由 Weyl 类通过 Ehlers 变换 $\mathfrak{E}$ 得到. 作用一次 Harrison 变换得到 Papapetrou 背景下的 Schwarzschild 解[215].

上面列出的解只是表明有大量 Einstein 方程的重要解可以用 Ernst 方程及其对偶方程的 Bäcklund 变换得到, 具体内容可参见综述性文章 [109, 219].

8.7 Ernst 方程的矩阵 Darboux 变换

为了得到 Ernst 型方程组 (8.53) 以及它的特例 ——Ernst 方程及其对偶方程的 Darboux 变换, 我们需要给出线性表示 (8.49) 的一个代数特征.

定理 39 线性表示 (8.49) 由多项式结构

$$\begin{aligned} \Phi_z &= F(\lambda)\Phi = (F_0 + \lambda F_1)\Phi, \qquad \lambda_z = \frac{1}{2}(\lambda^3 - \lambda)C, \\ \Phi_{\bar{z}} &= G(\lambda)\Phi = (G_0 + \lambda^{-1}G_1)\Phi, \qquad \lambda_{\bar{z}} = \frac{1}{2}(\lambda - \lambda^{-1})C^* \end{aligned} \tag{8.106}$$

和线性约束

$$\begin{aligned} &\text{(i)} \qquad F(-\lambda) = \sigma_3 F(\lambda)\sigma_3, \qquad G(-\lambda) = \sigma_3 G(\lambda)\sigma_3, \\ &\text{(ii)} \qquad F(1)\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \mathbf{0}, \qquad G(1)\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \mathbf{0} \end{aligned} \tag{8.107}$$

唯一确定, 其中 σ_3 是 Pauli 矩阵.

约束 (i) 保证 $F(\lambda)$ 和 $G(\lambda)$ 分别具有形式

$$\begin{pmatrix} * & 0 \\ 0 & * \end{pmatrix} + \lambda^{\pm 1}\begin{pmatrix} 0 & * \\ * & 0 \end{pmatrix}, \tag{8.108}$$

其中星号表示非零函数. 所以, 条件 (ii) 给出 (8.49) 式的特殊形式. 如果 $\phi_{[1]}$ 和 $\phi_{[2]}$ 是带参数 λ_1 和 λ_2 的方程组 (8.106) 的两个向量值特征函数, 那么由定理 33 得, 存在基本矩阵 Darboux 变换

$$\Phi' = \mathcal{P}(\lambda)\Phi = p(\lambda)P(\lambda)\Phi, \tag{8.109}$$

其中

$$P(\lambda) = \lambda P_1 + P_0, \quad p(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)}}. \tag{8.110}$$

注意这里没有规范条件 $\det P_1 = 1$, 因为在 $F(\lambda)$ 和 $G(\lambda)$ 上没有加迹零的条件.

同几何 $su(2)$ 约束 (8.26), (8.27) 类似, 取

$$\begin{aligned} \phi_{[1]} &= \phi_0, \qquad \lambda_1 = \lambda_0, \\ \phi_{[2]} &= \sigma_3\phi_0, \qquad \lambda_2 = -\lambda_0, \end{aligned} \tag{8.111}$$

它保证可以选取 P_1 使得 $P(\lambda)$ 形为

$$P(\lambda) = \begin{pmatrix} * & 0 \\ 0 & * \end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix} 0 & * \\ * & 0 \end{pmatrix}, \tag{8.112}$$

或等价的

$$P(-\lambda) = \sigma_3 P(\lambda)\sigma_3. \tag{8.113}$$

上式表明 $(8.22)_2$ 式给出的 $F'(\lambda)$ 和 $G'(\lambda)$ 满足带撇的约束 (i). 剩下还需证明的是条件 (ii) 在上述变换下不变. 为此, 注意到如果

$$P(1)\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \hat{c}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad \hat{c} = \text{常数}, \tag{8.114}$$

那么 $\lambda = 1$ 时方程组 (8.106) 的特殊的特征函数 $(1\ \ -1)^{\mathrm{T}}$ 映为它自己, 这里略去了无关紧要的常值因数 $\hat{c}$. 于是,

$$F'(1)\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \mathbf{0}, \quad G'(1)\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \mathbf{0}. \tag{8.115}$$

这样, 条件 (8.112) 和 (8.114) 唯一决定了 Darboux 矩阵 $\mathcal{P}(\lambda)$, 于是有下列定理.

定理 40 (Ernst 型方程组的基本矩阵 Darboux 变换) 设 $\Omega = (A, A^*, B, B^*, C, C^*)$ 是多项式形式的 Ernst 型方程组 (8.50) 的解. 分别考虑带参数 λ 和 λ_0 的线性表示 (8.49) 矩阵值解 Φ 和向量值解 ϕ_0. 利用伪势 $q_0 = -\phi_0^2/\phi_0^1$, 相应的基本矩阵 Darboux 变换为

$$\Phi' = \mathcal{P}(\lambda)\Phi = \mathrm{i}\sqrt{\frac{1-\lambda_0^2}{\lambda^2-\lambda_0^2}}\begin{pmatrix} \dfrac{\lambda_0 q_0}{\lambda_0 q_0 - 1} & \dfrac{\lambda}{\lambda_0 q_0 - 1} \\ \dfrac{\lambda q_0}{\lambda_0 - q_0} & \dfrac{\lambda_0}{\lambda_0 - q_0} \end{pmatrix}\Phi. \tag{8.116}$$

新解 Ω' 为

$$(\mathfrak{D})\begin{cases} A' = \dfrac{1}{q_0}\dfrac{\lambda_0 - q_0}{\lambda_0 q_0 - 1}B - \dfrac{\lambda_0}{2}\dfrac{\lambda_0 - q_0}{\lambda_0 q_0 - 1}C, \\ A^{*\prime} = \dfrac{1}{q_0}\dfrac{\lambda_0 q_0 - 1}{\lambda_0 - q_0}A^* - \dfrac{1}{2\lambda_0}\dfrac{\lambda_0 q_0 - 1}{\lambda_0 - q_0}C^*, \\ B' = q_0\dfrac{\lambda_0 q_0 - 1}{\lambda_0 - q_0}A - \dfrac{\lambda_0}{2}\dfrac{\lambda_0 q_0 - 1}{\lambda_0 - q_0}C, \\ B^{*\prime} = q_0\dfrac{\lambda_0 - q_0}{\lambda_0 q_0 - 1}B^* - \dfrac{1}{2\lambda_0}\dfrac{\lambda_0 - q_0}{\lambda_0 q_0 - 1}C^*, \\ C' = C, \quad C^{*\prime} = C^*, \end{cases} \tag{8.117}$$

而不失一般性, 新势 $\mathcal{F}'$ 和 $\mathcal{F}^{*\prime}$ 为

$$\mathcal{F}' = \mathrm{i}\frac{\lambda_0 q_0 \mathcal{F} + \mathcal{F}^*}{\lambda_0 q_0 - 1}, \quad \mathcal{F}^{*\prime} = \mathrm{i}\frac{q_0 \mathcal{F} + \lambda_0 \mathcal{F}^*}{\lambda_0 - q_0}. \tag{8.118}$$

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{S} \circ \mathfrak{D} = \mathfrak{D} \circ \mathfrak{S}. \tag{8.119}$$

所以, 变换 $\mathfrak{S}$ 和 $\mathfrak{D}$ 可交换.

证明 可以直接验证由 (8.116) 式给出的 Darboux 矩阵 $\mathcal{P}(\lambda)$ 满足线性代数方程组 (8.21), (8.111) 及约束 (8.113), (8.114). 比较

$$\begin{aligned} F'(\lambda)\mathcal{P}(\lambda) &= \mathcal{P}(\lambda)F(\lambda) + [\mathcal{P}(\lambda)]_z, \\ G'(\lambda)\mathcal{P}(\lambda) &= \mathcal{P}(\lambda)G(\lambda) + [\mathcal{P}(\lambda)]_{\bar{z}} \end{aligned} \tag{8.120}$$

中 λ 的各次系数就得到变换 (8.117). 此外, $\lambda = 1$ 时线性表示 (8.49) 的解为

$$\Phi|_{\lambda=1} = \begin{pmatrix} \mathrm{i} & \mathcal{F} \\ -\mathrm{i} & \mathcal{F}^* \end{pmatrix} \mathcal{C}, \tag{8.121}$$

其中 $\mathcal{C}$ 是任意的复矩阵, 代表了 Möbius 变换 (8.81), 因此可取

$$\Phi_{12}|_{\lambda=1} = \mathcal{F}, \quad \Phi_{22}|_{\lambda=1} = \mathcal{F}^*. \tag{8.122}$$

在这些关系上加上撇就得到 (8.118) 式. 最后, 如果令 $q_0 = q_1$, $\lambda_0 = \lambda_1$, 那么对 Ω' 应用 Kramer-Neugebauer 变换得到 Harrison 变换 (8.101). 容易验证 Kramer-Neugebauer 变换复合矩阵 Darboux 变换得到相同的结果. 所以, Harrison 变换 $\mathfrak{H}$ 可以分解为 Kramer-Neugebauer 变换 $\mathfrak{S}$ 和基本矩阵 Darboux 变换 $\mathfrak{D}$, 如图 8.3 所示. □

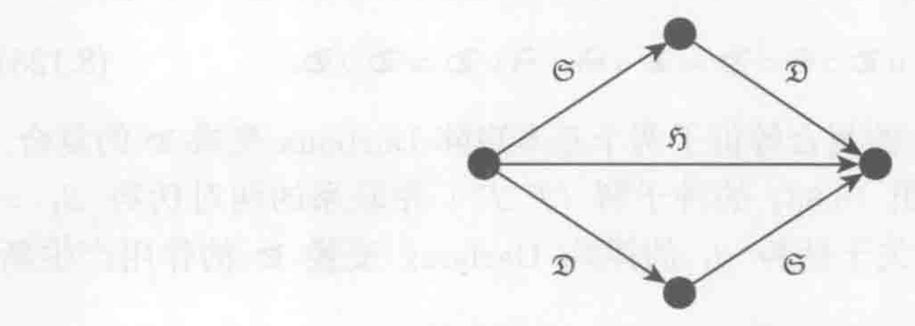


图 8.3 Harrison 变换 $\mathfrak{H}$ 的分解

对于 Ernst 方程及其对偶方程, 可以假设

$$\begin{aligned} &\text{Ernst 图像:} \quad && \bar{\Phi} = \sigma_1 \Phi, \quad && \bar{\lambda} = 1/\lambda, \\ &\text{度量图像:} \quad && \bar{\Phi} = \Phi, \quad && \bar{\lambda} = 1/\lambda, \end{aligned} \tag{8.123}$$

由此可导出伪势的条件 (8.76). 于是, 如果定理 40 中的 Φ, ϕ_0 和 λ, λ_0 满足约束

$$\begin{aligned} &\text{Ernst 图像:} \quad && \bar{\mathcal{P}} = \mathcal{P}\sigma_1, \\ &\text{度量图像:} \quad && \bar{\mathcal{P}} = \sigma_1 \mathcal{P}, \end{aligned} \tag{8.124}$$

而新的特征函数 Φ' 满足

$$\begin{aligned} &\text{Ernst 图像:} \quad && \bar{\Phi}' = \Phi', \\ &\text{度量图像:} \quad && \bar{\Phi}' = \sigma_1 \Phi'. \end{aligned} \tag{8.125}$$

这样就有下列重要的定理.

定理 41 (Ernst 方程及其对偶方程的基本矩阵 Darboux 变换) 满足"实约束" (8.123) 的基本矩阵 Darboux 变换 (8.116) 将 Ernst 方程的解映为其对偶方程的解, 或将对偶方程的解映为 Ernst 方程的解. 在 Ernst 图像中, 对偶 Ernst 方程的新解为

$$\mathcal{F}' = \mathrm{i}\frac{\lambda_0 q_0 \mathcal{E} + \bar{\mathcal{E}}}{\lambda_0 q_0 - 1}, \quad \mathcal{F}^{*\prime} = \mathrm{i}\frac{q_0 \mathcal{E} + \lambda_0 \bar{\mathcal{E}}}{\lambda_0 - q_0}. \tag{8.126}$$

在度量图像中, 新的 Ernst 势为

$$\mathcal{E}' = \mathrm{i}\frac{\lambda_0 q_0 \mathcal{F} + \mathcal{F}^*}{\lambda_0 q_0 - 1}. \tag{8.127}$$

8.8 Ernst 方程及其对偶方程的可换性定理以及同 Bianchi 方程的联系

本节中将看到, 两个矩阵 Darboux 变换的连续作用将导致同 Harrison 变换相联系的一个可换性定理, 这源于 Harrison 变换的分解 (8.119). 由 $\mathfrak{S}^2 = \mathrm{id}$ 得

$$\mathfrak{H} \circ \mathfrak{H} = \mathfrak{S} \circ \mathfrak{D} \circ \mathfrak{S} \circ \mathfrak{D} = \mathfrak{D} \circ \mathfrak{S} \circ \mathfrak{S} \circ \mathfrak{D} = \mathfrak{D} \circ \mathfrak{D}. \tag{8.128}$$

于是, 两个 Harrison 变换 $\mathfrak{H}$ 的复合等价于两个基本矩阵 Darboux 变换 $\mathfrak{D}$ 的复合.

考虑同 Ernst 型方程组 (8.53) 的种子解 $(\mathcal{F}, \mathcal{F}^*)$ 相联系的两对伪势 $\beta_1 = (q_1, \lambda_1)$ 和 $\beta_2 = (q_2, \lambda_2)$. 关于伪势 β_1 的矩阵 Darboux 变换 $\mathfrak{D}$ 的作用产生新解

$$\mathcal{F}' = \mathrm{i}\frac{\lambda_1 q_1 \mathcal{F} + \mathcal{F}^*}{\lambda_1 q_1 - 1}, \quad \mathcal{F}^{*\prime} = \mathrm{i}\frac{q_1 \mathcal{F} + \lambda_1 \mathcal{F}^*}{\lambda_1 - q_1}. \tag{8.129}$$

由定理 40, 与之相联系的伪势为

$$q_2' = \frac{(\lambda_2 q_1 - \lambda_1 q_2)(\lambda_1 q_1 - 1)}{(\lambda_2 q_2 - \lambda_1 q_1)(\lambda_1 - q_1)}, \quad \lambda_2' = \lambda_2. \tag{8.130}$$

所以, 再次作用矩阵 Darboux 变换 $\mathfrak{D}$ 产生解

$$\mathcal{F}'' = \mathrm{i}\frac{\lambda_2' q_2' \mathcal{F}' + \mathcal{F}^{*\prime}}{\lambda_2' q_2' - 1}, \quad \mathcal{F}^{*\prime\prime} = \mathrm{i}\frac{q_2' \mathcal{F}' + \lambda_2' \mathcal{F}^{*\prime}}{\lambda_2' - q_2'}. \tag{8.131}$$

定理 42 ((对偶) Ernst 方程的可换性定理) 由同 Ernst 型方程组 (8.53) 的种子解 $(\mathcal{F},\mathcal{F}^*)$ 相联系的两对伪势 β_1 和 β_2 构造出的两个基本矩阵 Darboux 变换的作用产生

$$\begin{aligned}\mathcal{F}''&=-\mathcal{F}+\frac{(\lambda_2^2-\lambda_1^2)(\mathcal{F}+\mathcal{F}^*)}{\lambda_2^2-\lambda_1^2+q_1\lambda_1(1-\lambda_2^2)-q_2\lambda_2(1-\lambda_1^2)},\\ \mathcal{F}^{*\prime\prime}&=-\mathcal{F}^*+\frac{q_1q_2(\lambda_2^2-\lambda_1^2)(\mathcal{F}+\mathcal{F}^*)}{q_1q_2(\lambda_2^2-\lambda_1^2)+q_2\lambda_1(1-\lambda_2^2)-q_1\lambda_2(1-\lambda_1^2)}.\end{aligned} \tag{8.132}$$

两个矩阵 Darboux 变换 $\mathfrak{D}(\beta_1)$ 和 $\mathfrak{D}(\beta_2)$ 互相交换, 即成立可换性定理

$$\mathfrak{D}(\beta_2')\circ\mathfrak{D}(\beta_1)=\mathfrak{D}(\beta_1')\circ\mathfrak{D}(\beta_2). \tag{8.133}$$

如果加上实条件 (8.123) 中的任一个, 则 Ernst 图像和度量图像都保持不变. 例如, 如果 $\mathcal{F}=\mathcal{E}$, $\mathcal{F}^*=\bar{\mathcal{E}}$, 则 (8.132) 式, 即

$$\mathcal{E}''=-\mathcal{E}+\frac{(\lambda_2^2-\lambda_1^2)(\mathcal{E}+\bar{\mathcal{E}})}{\lambda_2^2-\lambda_1^2+q_1\lambda_1(1-\lambda_2^2)-q_2\lambda_2(1-\lambda_1^2)} \tag{8.134}$$

给出 Ernst 方程的可换性定理.

由于 β_1 和 β_2 在变换 (8.132) 中地位相同, 显然成立可换性定理 (8.133). 对 Ernst 方程, Neugebauer[268] 证明了叠加原理 (8.134) 就是用 $2N$ 个 Harrison 变换 (或矩阵 Darboux 变换) 产生的 Ernst 势的行列式表示的特殊情形. 原则上, 可以从 (8.129) 式以及 β_2 给出的类似等式中解出伪势, 从而 (8.134) 式可以完全用 Ernst 势 $\mathcal{E},\mathcal{E}''$ 和对偶 Ernst 方程的中间解 $(\mathcal{F}',\mathcal{F}^{*\prime})(\beta_1)$, $(\mathcal{F}',\mathcal{F}^{*\prime})(\beta_2)$ 表示, 对应的 Bianchi 图见图 8.4.

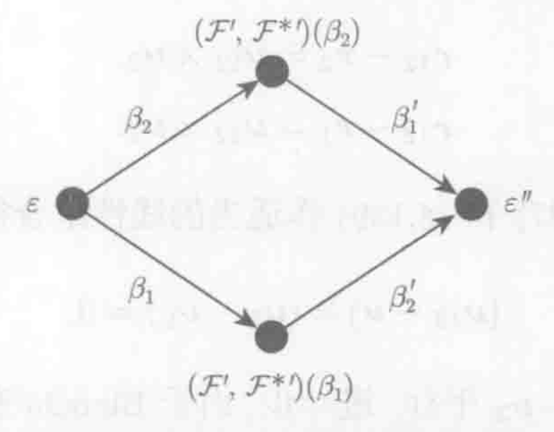


图 8.4 Ernst 方程的可换性定理

与经典 Bianchi 曲面的联系

具有 Gauss 曲率 $\mathcal{K}=-1/\rho^2$ 的 Bianchi 曲面由单位法向量 $\boldsymbol{N}$ 满足的向量方程 (8.31) 确定. 对于 Ernst 方程和它的对偶方程, 这个向量方程具有自然的对应

对这两个方程, 有关的向量值函数可以解释为 Minkowski 空间 $\mathbb{M}^3$ 中的 "单位法向量", 它们分别用 Ernst 势 $\mathcal{E}$ 和 $\mathcal{F}, \mathcal{F}^*$ 表示. 利用这些向量方程, Chinea[81] 导出了 Ernst 方程的向量 Bäcklund 变换, 而不利用伪势. 这个向量变换等价于基本矩阵 Darboux 变换 $\mathfrak{D}$. 两次作用向量 Bäcklund 变换给出非线性叠加原理 (8.134) 的向量形式. 对经典 Bianchi 变换 (8.13), 类似的非线性叠加原理是很容易得到的. 如果记 $\boldsymbol{r}$ 为 Bianchi 曲面 Σ 的位置向量, 那么变换后的 Bianchi 曲面 Σ_1 的位置向量 $\boldsymbol{r}_1$ 满足 (1.163) 式, 即

$$\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r} = \boldsymbol{\nu}_1 \times \boldsymbol{\nu}, \tag{8.135}$$

其中 $\boldsymbol{\nu} = \sqrt{\rho}\boldsymbol{N}$, $\boldsymbol{\nu}_1 = \sqrt{\rho_1}\boldsymbol{N}_1$. 利用 (1.176) 式, 法向量 $\boldsymbol{N}_1$ 和 $\boldsymbol{N}$ 之间的夹角 σ_1 可以用 "参数" μ_1 表示为

$$\boldsymbol{N}_1 \cdot \boldsymbol{N} = \cos\sigma_1 = \frac{1+\mu_1^2}{1-\mu_1^2}. \tag{8.136}$$

选取另一个不同的参数 μ_2, 由 Σ 可以生成第三个 Bianchi 曲面 Σ_2, 相应地有关系

$$\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r} = \boldsymbol{\nu}_2 \times \boldsymbol{\nu} \tag{8.137}$$

及

$$\boldsymbol{N}_2 \cdot \boldsymbol{N} = \cos\sigma_2 = \frac{1+\mu_2^2}{1-\mu_2^2}, \tag{8.138}$$

其中 σ_2 是法向量 $\boldsymbol{N}_2$ 和 $\boldsymbol{N}$ 之间的夹角. 由于 Bianchi 变换所相应的 Bianchi 图是封闭的, 当参数分别取 μ_2 和 μ_1 时, 曲面 Σ_1 和 Σ_2 被映为相同的第四个 Bianchi 曲面 Σ_{12}. 所以, 位置向量 $\boldsymbol{r}_{12}$ 同时满足

$$\begin{aligned} \boldsymbol{r}_{12} - \boldsymbol{r}_2 &= \boldsymbol{\nu}_{12} \times \boldsymbol{\nu}_2, \\ \boldsymbol{r}_{12} - \boldsymbol{r}_1 &= \boldsymbol{\nu}_{12} \times \boldsymbol{\nu}_1. \end{aligned} \tag{8.139}$$

对向量方程 (8.135), (8.137) 和 (8.139) 作适当的线性组合得到

$$(\boldsymbol{\nu}_{12} - \boldsymbol{\nu}) \times (\boldsymbol{\nu}_1 - \boldsymbol{\nu}_2) = 0, \tag{8.140}$$

从而向量 $\boldsymbol{\nu}_{12} - \boldsymbol{\nu}$ 和 $\boldsymbol{\nu}_1 - \boldsymbol{\nu}_2$ 平行. 进一步, 由于 Bianchi 变换保持 Gauss 曲率, 即 $\rho = \rho_1 = \rho_2 = \rho_{12}$, $\boldsymbol{\nu}$ 的长度也保持不变, 从而存在函数 H 满足

$$\boldsymbol{N}_{12} - \boldsymbol{N} = H(\boldsymbol{N}_1 - \boldsymbol{N}_2), \tag{8.141}$$

由此得

$$H = \frac{\boldsymbol{N}_2 \cdot \boldsymbol{N} - \boldsymbol{N}_1 \cdot \boldsymbol{N}}{1 - \boldsymbol{N}_1 \cdot \boldsymbol{N}_2}. \tag{8.142}$$

所以,

$$\boxed{\boldsymbol{N}_{12} = \boldsymbol{N} + \frac{\cos\sigma_2 - \cos\sigma_1}{1 - \boldsymbol{N}_1 \cdot \boldsymbol{N}_2}(\boldsymbol{N}_1 - \boldsymbol{N}_2).} \tag{8.143}$$

Bianchi 曲面的单位法向量所满足的这个非线性叠加原理类似于 Chinea 给出的 Ernst 方程的向量叠加原理. 类似地, Ernst 方程的 Harrison 变换 $\mathfrak{H}$ 对应于经典 Bianchi 方程组的 Bäcklund 变换.

练 习

1. 证明与线性表示 (8.2), (8.3), (8.9) 相联系的 $(8.12)_{\lambda=1}$ 式同 Bianchi 曲面的第二基本形式 $(1.126)_2$ 一致.

2. 证明 Kramer-Neugebauer 变换 (8.58) 在 Ernst 势 $\mathcal{E}$ 上的作用由 (8.60) 式和 (8.61) 式给出.

3. (a) 直接验证伪势方程 (8.74), (8.75) 在 Neugebauer 变换 $\mathfrak{I}$ 下保持形式不变.

(b) 证明调和函数 ρ 的对应变换由 (8.78) 式给出.

(c) 证明在 $\lambda_1 = 1$ 时, Neugebauer 变换 $\mathfrak{I}(\beta_1)$ 约化为 Möbius 变换 (8.81).

4. 证明定理 36 和定理 37.

5. (a) 导出与变换 $\tilde{\mathfrak{I}}(\beta_2^{(1)}) \circ \mathfrak{I}(\beta_1)$ 和 $\mathfrak{I}(\tilde{\beta}_2^{(1)}) \circ \tilde{\mathfrak{I}}(\beta_1)$ 相联系的伪势的显式表达式. 验证在一般情况下,

$$\tilde{\mathfrak{I}}(\beta_2^{(1)}) \circ \mathfrak{I}(\beta_1) \neq \mathfrak{I}(\tilde{\beta}_2^{(1)}) \circ \tilde{\mathfrak{I}}(\beta_1).$$

(b) 验证 (8.98) 式给出的是伪势, 并证明变换 $\tilde{\mathfrak{I}}(\beta_2^{(1)}) \circ \mathfrak{I}(\beta_1)$ 和 $\mathfrak{I}(\tilde{\beta}_2^{(1)}) \circ \tilde{\mathfrak{I}}(\beta_1)$ 相同.

(c) 导出 Harrison 变换 (8.101).

6. 证明 Harrison 变换 $\mathfrak{H}$ 按 $\mathfrak{H} = \mathfrak{S} \circ \mathfrak{D} = \mathfrak{D} \circ \mathfrak{S}$ 分解为 Kramer-Neugebauer 变换 $\mathfrak{S}$ 和基本矩阵 Darboux 变换 $\mathfrak{D}$.

第 9 章　射影极小曲面和等温渐近曲面

曲面的射影微分几何研究起源于 20 世纪初 Wilczynski 的工作[384], 对此有很多专著, 最著名的有 Fubini 和 Čech[143], Bol[51], Finikov[135], Lane[227] 和近期 Akivis 和 Goldberg 的书[6]. 最近发现, 经典射影微分几何中几类重要的曲面可以用现代孤立子理论中的可积系统描述. Ferapontov 对这些关系及其历史起源作了一个详细的总结[131]. 本章将讨论射影微分几何中这些可积的曲面, 重点放在射影极小曲面和等温渐近曲面上.

射影极小曲面由射影面积泛函的 Euler-Lagrange 方程得到, 这些 Euler-Lagrange 方程由 Thomsen[365] 在 1928 年建立, 后来由 Sasaki 开始研究[322]. 射影极小曲面中一些典型的例子有 Godeaux-Rozet 曲面[51] 和 Demoulin 曲面[102], 后者满足一组耦合的 Tzitzeica 方程组[135], 它可从二维 Toda 格方程组约化得到[259]. 对 Godeaux-Rozet 和 Demoulin 曲面, Bäcklund 变换及其可换性定理由 Demoulin 以纯几何方法得到[102]. 射影极小曲面, 特别包括 Godeaux-Rozet 曲面和 Demoulin 曲面, 可以由 Lie 二次曲面产生[51, 135, 227].

射影极小曲面几何的一般理论由 Thomsen[364] 和 Mayer [254] 给出. 在 Demoulin 1933 年的工作以后, Godeaux [152], Rozet[318] 以及最近 Ferapontov 和 Schief[133] 的工作对 Godeaux-Rozet 曲面和 Demoulin 曲面作了详细的研究.

等温渐近曲面是由 Fubini 引入的 (参见 [143]), 在 Lane[227], Bol[51] 和 Finikov [135, 136] 的经典书籍中对此有所介绍. 等温渐近曲面包括任意的二次曲面和三次曲面、Kummer 四次曲面[176] 以及旋转曲面的射影变换[131]. 最近 Ferapontov [129] 发现等温极小曲面满足静态变形 Nizhnik-Veselov-Novikov (mNVN) 方程[47]. mNVN 方程构成变形 Korteweg-de Vries 方程的 2+1 维对称可积形式.

9.1　射影微分几何中 Gauss-Mainardi-Codazzi 方程组的类比

我们将四维向量

$$\boldsymbol{r} = (r^0, r^1, r^2, r^3) \in \mathbb{R}^4 \tag{9.1}$$

同三维射影空间中的齐次坐标

$$\boldsymbol{x} = (r^0 : r^1 : r^2 : r^3) \in \mathbb{P}^3 \tag{9.2}$$

相对应, 在此对应下, 过 $\mathbb{R}^4$ 中原点的任一直线映为一点 $\boldsymbol{r} \in \mathbb{P}^3$. 如果 $r^0 \neq 0$, 则可以表示为

$$\boldsymbol{r} = (1, \hat{\boldsymbol{r}}), \quad \hat{\boldsymbol{r}} = (r^1/r^0, r^2/r^0, r^3/r^0). \tag{9.3}$$

这给出了 $\mathbb{P}^3$ 到 $\mathbb{R}^3$ 的自然对应

$$\mathbb{P}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad \boldsymbol{r} \mapsto \hat{\boldsymbol{r}}. \tag{9.4}$$

这样, 线性变换

$$\boldsymbol{r} \to A\boldsymbol{r}, \quad A \in \mathbb{R}^{4,4}, \quad \det A \neq 0 \tag{9.5}$$

可以表示为作用在 $\hat{\boldsymbol{r}}$ 上的分式线性变换, 它称为*射影变换*. 下面考虑的曲面 $\Sigma \subset \mathbb{P}^3$ 在形为 (9.5) 的线性变换下保持不变, 从而可以看作曲面 $\hat{\Sigma} \subset \mathbb{R}^3$, 它的性质在射影变换下保持不变.

同欧氏微分几何一样, 渐近坐标在研究射影微分几何中的曲面时非常重要. 在曲面 $\Sigma : \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(x, y) \in \mathbb{P}^3$ 上取渐近坐标时, 位置向量 $\boldsymbol{r}$ 满足二阶方程

$$\boldsymbol{r}_{xx} = s\boldsymbol{r}_x + p\boldsymbol{r}_y + \pi\boldsymbol{r}, \quad \boldsymbol{r}_{yy} = q\boldsymbol{r}_x + t\boldsymbol{r}_y + \chi\boldsymbol{r}. \tag{9.6}$$

相应的曲面 $\hat{\Sigma}$ 的位置向量 $\hat{\boldsymbol{r}}$ 满足

$$\hat{\boldsymbol{r}}_{xx} = a\hat{\boldsymbol{r}}_x + p\hat{\boldsymbol{r}}_y, \quad \hat{\boldsymbol{r}}_{yy} = b\hat{\boldsymbol{r}}_y + q\hat{\boldsymbol{r}}_x, \tag{9.7}$$

其中 $a = s - 2(\ln r^0)_x$, $b = t - 2(\ln r^0)_y$, 于是坐标 x 和 y 确实是 $\hat{\Sigma}$ 上的渐近坐标. 当向量 $\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}_x, \boldsymbol{r}_y, \boldsymbol{r}_{xy}$ 线性无关时, 由线性方程组 (9.6) 的相容性条件 $\boldsymbol{r}_{xxyy} = \boldsymbol{r}_{yyxx}$ 得出 $s_y = t_x$. 不失一般性, 可设 $s = t = 0$, 因为射影空间中曲面的位置向量可差一相乘的任意函数. 于是, 用适当的形为 $\boldsymbol{r} \to g\boldsymbol{r}$ 的规范变换可消去系数 s 和 t, 将线性方程组 (9.6) 改写为标准形式. Wilczynski 建立了此方程组并有深入的研究[384], 由它的相容性条件可得下列定理.

定理 43 (射影微分几何中的 "Gauss-Weingarten" 方程组和 "Gauss-Mainardi-Codazzi" 方程组) *以渐近坐标为参数的曲面 $\Sigma \subset \mathbb{P}^3$ 的位置向量可以标准化后满足线性方程组*

$$\boldsymbol{r}_{xx} = p\boldsymbol{r}_y + \frac{1}{2}(V - p_y)\boldsymbol{r}, \quad \boldsymbol{r}_{yy} = q\boldsymbol{r}_x + \frac{1}{2}(W - q_x)\boldsymbol{r}. \tag{9.8}$$

这个方程组可积当且仅当 p, q 和 V, W 满足欠定非线性方程组

$$\begin{aligned} p_{yyy} - 2p_yW - pW_y &= q_{xxx} - 2q_xV - qV_x, \\ W_x &= 2qp_y + pq_y, \\ V_y &= 2pq_x + qp_x \end{aligned} \tag{9.9}$$

本章将讨论上述射影微分几何中的 “Gauss-Mainardi-Codazzi 方程组” 的约化及其相应的曲面. 为了在任意的渐近坐标变换

$$x^* = f(x), \quad y^* = g(y) \tag{9.10}$$

下 “Gauss-Weingarten 方程组” (9.8) 的结构保持不变, 位置向量 $\boldsymbol{r}$ 必须按

$$\boldsymbol{r}^* = \sqrt{f'(x)g'(y)}\,\boldsymbol{r} \tag{9.11}$$

重新规范化. 变换后的系数 p^*, q^*, V^*, W^* 同变换前的系数之间的关系为

$$\begin{aligned} p^* &= p\frac{g'}{f'^2}, \qquad V^* = \frac{V + S(f)}{f'^2}, \\ q^* &= q\frac{f'}{g'^2}, \qquad W^* = \frac{W + S(g)}{g'^2}, \end{aligned} \tag{9.12}$$

其中 $S(\cdot)$ 表示通常的 Schwarz 导数, 即

$$S(f) = \frac{f'''}{f'} - \frac{3}{2}\left(\frac{f''}{f'}\right)^2. \tag{9.13}$$

可以直接验证非线性方程组 (9.9) 在变换 (9.10), (9.12) 下保持不变. 进一步, 二次型

$$pq\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \tag{9.14}$$

以及正比 (“共形等价”) 于

$$p\,\mathrm{d}x^3 + q\,\mathrm{d}y^3 \tag{9.15}$$

的三次型是绝对射影不变量, 因为它们在上述变换下保持不变. (9.14) 式和 (9.15) 式所给出的分别称为*射影度量*和*Darboux 三次型*, 它们在射影微分几何中起着第一、第二基本形式的作用. 特别地, 它们在射影等价下确定了 “一般的” 曲面[51].

练　习

1. 证明射影 Gauss-Weingarten 方程组 (9.9) 在规范变换 (9.10)–(9.12) 下保持形式不变. 证明二次型 (9.14) 和三次型 (9.15) 在允许一个相乘因子外也保持不变.

9.2　射影极小曲面, Godeaux-Rozet 曲面和 Demoulin 曲面

为了得到射影 Gauss-Mainardi-Codazzi 方程组的可积约化, 需要寻找 Lie 点对称, 使之非平凡地作用在射影 Gauss-Weingarten 方程组上. 例如, 标度变换

将射影 Gauss-Weingarten 方程组变为

$$\begin{aligned} \boldsymbol{r}_{xx} &= \lambda p \boldsymbol{r}_y + \frac{1}{2}(V - \lambda p_y)\boldsymbol{r}, \\ \boldsymbol{r}_{yy} &= \frac{1}{\lambda} q \boldsymbol{r}_x + \frac{1}{2}(W - \frac{1}{\lambda} q_x)\boldsymbol{r}. \end{aligned} \tag{9.17}$$

射影 Gauss-Mainardi-Codazzi 方程组中的第一个变为

$$\lambda^2(p_{yyy} - 2p_y W - pW_y) = q_{xxx} - 2q_x V - qV_x, \tag{9.18}$$

而剩下两个保持不变. 如果我们要求射影 Gauss-Mainardi-Codazzi 方程组与 λ 无关, 那么 (9.18) 式分为两个方程, 而由方程组 (9.9) 得

$$\begin{aligned} p_{yyy} - 2p_y W - pW_y = 0, \qquad W_x = 2qp_y + pq_y, \\ q_{xxx} - 2q_x V - qV_x = 0, \qquad V_y = 2pq_x + qp_x. \end{aligned} \tag{9.19}$$

按孤立子理论的语言, 带谱参数 λ 的 "Lax 对" (9.17) 相容当且仅当 p, q, V, W 满足非线性方程组 (9.19). 在 9.5 节中将看到, 这个线性表示的 $so(3,3)$ 类比可用于构造方程组 (9.19) 的 Bäcklund 变换.

从几何角度来看, (9.19) 式就是射影面积泛函

$$\iint pq \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \tag{9.20}$$

的 Euler-Lagrange 方程. 所以, 对应的射影 Gauss-Weingarten 方程组 (9.8) 描述**射影极小曲面**. 射影极小曲面自然产生于孤立子理论, 它们既可用几何方法分类, 也可用代数方法分类. 首先, 在 $(9.19)_{1,3}$ 式上分别乘以 p 和 q, 积分得

$$\begin{aligned} W &= \frac{p_{yy}}{p} - \frac{1}{2}\left(\frac{p_y}{p}\right)^2 + \frac{\alpha(x)}{p^2}, \\ V &= \frac{q_{xx}}{q} - \frac{1}{2}\left(\frac{q_x}{q}\right)^2 + \frac{\beta(y)}{q^2}, \end{aligned} \tag{9.21}$$

其中 α 和 β 是作为积分常数的函数, 并可通过形为 (9.10), (9.12) 的变换变为常数. 将 (9.21) 式给出的 V 和 W 代入剩下的射影 Gauss-Mainardi-Codazzi 方程组得到

$$\begin{aligned} [p(\ln p)_{xy} - p^2 q]_y &= -p\left(\frac{\alpha}{p^2}\right)_x, \\ [q(\ln q)_{xy} - q^2 p]_x &= -q\left(\frac{\beta}{q^2}\right)_y, \end{aligned} \tag{9.22}$$

或等价的

$$(\ln p)_{xy} = pq + \frac{A}{p}, \quad A_y = -p\left(\frac{\alpha}{p^2}\right)_x, \\ (\ln q)_{xy} = pq + \frac{B}{q}, \quad B_x = -q\left(\frac{\beta}{q^2}\right)_y. \tag{9.23}$$

情形 1 (一般情形). α 和 β 均非零, 从而可以标准化为 ±1. 例如, 当 $\alpha=\beta=1$ 时, 射影 Gauss-Mainardi-Codazzi 方程组成为

$$(\ln p)_{xy} = pq + \frac{A}{p}, \qquad A_y = 2\frac{p_x}{p^2}, \\ (\ln q)_{xy} = pq + \frac{B}{q}, \qquad B_x = 2\frac{q_y}{q^2}. \tag{9.24}$$

情形 2 (*Godeaux-Rozet* 曲面 [152, 318]). $\alpha=0$, $\beta\neq0$ (或反过来). 这时只要 $A\neq0$, 就可以标准化为 $\beta=\pm1$ 和 $A=1$. 特别地, 在 $\beta=1$ 时得到非线性方程组

$$(\ln p)_{xy} = pq + \frac{1}{p}, \\ (\ln q)_{xy} = pq + \frac{B}{q}, \qquad B_x = 2\frac{q_y}{q^2}. \tag{9.25}$$

情形 3 (*Demoulin* 曲面 [102]). α,β 均为零. 这时只要 A 和 B 均非零, 可以设 $A=B=1$, 从而有

$$(\ln p)_{xy} = pq + \frac{1}{p}, \quad (\ln q)_{xy} = pq + \frac{1}{q}. \tag{9.26}$$

情形 3a (*Tzitzeica* 曲面). 如果设 $p=q$, 那么有 $\alpha=\beta=0$, 并得到 Tzitzeica 方程

$$(\ln h)_{xy} = h - \frac{1}{h^2}, \tag{9.27}$$

其中 $h=-1/p$. 于是, 仿射球是一个特殊的 Demoulin 曲面, 并且可以用射影极小曲面和等温渐近曲面的条件 (即 $p=q$) 确定下来. 在 9.7 节中, 我们会再来讨论等温渐近曲面. 仿射球使得射影微分几何中的面积变分达到临界点这一事实是 Behnke 发现的 (参见 [39]).

练　习

1. 给出变量代换, 将 (9.23) 式中的 α 和 β 分别变为 0 和 ±1. 在 $\alpha=0$ 时, 证明可以不妨取 $A=0,1$.

9.3 线性表示

射影极小曲面的 Gauss-Mainardi-Codazzi 方程组有多个线性表示, 它们可以用几何方法构造, 并且在孤立子理论中有重要意义. 我们首先构造 $sl(4)$ 的 4×4 线性表示, 其基础是 Wilczynski 运动四面体. 利用产生 $sl(4)$ 和 $so(3,3)$ Lie 代数同构的经典 Plücker 对应, 可得到 6×6 线性表示. 在 9.4 节中, 它将同由二维 Toda 格约化产生的 Demoulin 方程组 (9.26) 联系起来, 从中可看到它明显的几何意义.

9.3.1 Wilczynski 四面体和 4×4 线性表示

在第 1 章中已经知道, $\mathbb{R}^3$ 中曲面的 Gauss-Weingarten 方程组可以写为两个相容的一阶矩阵微分方程, 这组微分方程描述一组包括两个单位切向量和一个单位法向量的正交标架 (运动四面体). 但是, 在射影微分几何中, 没有自然定义的 "射影法向". 我们这里使用 Wilczynski 定义的运动四面体[51], 它的顶点为

$$\begin{gathered}\boldsymbol{r},\quad \boldsymbol{r}_1=\boldsymbol{r}_x-\frac{1}{2}\frac{q_x}{q}\boldsymbol{r},\quad \boldsymbol{r}_2=\boldsymbol{r}_y-\frac{1}{2}\frac{p_y}{p}\boldsymbol{r},\\ \boldsymbol{\eta}=\boldsymbol{r}_{xy}-\frac{1}{2}\frac{p_y}{p}\boldsymbol{r}_x-\frac{1}{2}\frac{q_x}{q}\boldsymbol{r}_y+\left(\frac{1}{4}\frac{p_yq_x}{pq}-\frac{1}{2}pq\right)\boldsymbol{r}.\end{gathered} \tag{9.28}$$

在变换 (9.10), (9.12) 下, $\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2$ 和 $\boldsymbol{\eta}$ 改变一个相乘因子, 从而它们作为 $\mathbb{P}^3$ 中的点并不改变. 运动四面体的边 $[\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_1],[\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_2]$, $[\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2]$ 和 $[\boldsymbol{r},\boldsymbol{\eta}]$ 的几何意义如下. 在射影空间中, 直线 $(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_1)$ 可以用 $\boldsymbol{r}$ 和 $\boldsymbol{r}_1$ 的任意线性组合, 或等价的线性组合

$$f\boldsymbol{r}+g\boldsymbol{r}_x \tag{9.29}$$

表示. 它在映射 (9.4) 下的像是

$$\hat{\boldsymbol{r}}+h\hat{\boldsymbol{r}}_x,\quad h=\frac{gr^0}{fr^0+gr^0_x}, \tag{9.30}$$

这是 x 渐近曲线在 $\hat{\boldsymbol{r}}$ 处的切向量. 于是, 直线 $(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_1)$ 和 $(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_2)$ 分别与 Σ 上的 x 渐近曲线和 y 渐近曲线相切, 从而 $\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2$ 张成 Σ 在 $\boldsymbol{r}$ 处的切平面. 直线 $(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2)$ 称为 Wilczynski 第二准线, 它与 Σ 相切. 当向量 $\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_x,\boldsymbol{r}_y,\boldsymbol{r}_{xy}$ 线性无关时, 直线 $(\boldsymbol{r},\boldsymbol{\eta})$ 与 Σ 横截, 它起着射影法向的作用, 称为 Wilczynski 第一准线.

$\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,\boldsymbol{\eta}$ 作为向量构成 $\mathbb{R}^4$ 的一组基, 这时, 射影极小曲面的 Gauss-Weingarten 方程组可以写成一阶矩阵形式. 对 (9.28) 式定义的这些向量求导并利用 (9.8) 式得到

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{r} \\ \boldsymbol{r}_1 \\ \boldsymbol{r}_2 \\ \boldsymbol{\eta} \end{pmatrix}_x = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \dfrac{q_x}{q} & 2 & 0 & 0 \\ \dfrac{\beta}{q^2} & -\dfrac{q_x}{q} & 2p & 0 \\ -\dfrac{A}{p} & 0 & \dfrac{q_x}{q} & 2 \\ \dfrac{\alpha}{p} & -\dfrac{A}{p} & \dfrac{\beta}{q^2} & -\dfrac{q_x}{q} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{r} \\ \boldsymbol{r}_1 \\ \boldsymbol{r}_2 \\ \boldsymbol{\eta} \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{r} \\ \boldsymbol{r}_1 \\ \boldsymbol{r}_2 \\ \boldsymbol{\eta} \end{pmatrix}_y = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \dfrac{p_y}{p} & 0 & 2 & 0 \\ -\dfrac{B}{q} & \dfrac{p_y}{p} & 0 & 2 \\ \dfrac{\alpha}{p^2} & 2q & -\dfrac{p_y}{p} & 0 \\ \dfrac{\beta}{q} & \dfrac{\alpha}{p^2} & -\dfrac{B}{q} & -\dfrac{p_y}{p} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{r} \\ \boldsymbol{r}_1 \\ \boldsymbol{r}_2 \\ \boldsymbol{\eta} \end{pmatrix}. \tag{9.31}$$

当 (9.23) 式成立时, 上述线性方程组相容, 并且可以通过标度变换

$$\begin{aligned} &p \to \lambda p, \qquad A \to \lambda A, \qquad \alpha \to \lambda^2 \alpha, \\ &q \to q/\lambda, \qquad B \to B/\lambda, \qquad \beta \to \beta/\lambda^2 \end{aligned} \tag{9.32}$$

引入参数. 上述线性表示中矩阵的迹为零, 从而 (9.31) 式经 (9.32) 变换的方程组可以看作为 Lie 代数 $sl(4)$ 上的 Lax 对.

9.3.2　Plücker 对应和 6×6 线性表示

两个向量 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^4$ 的外积为 6 维向量

$$\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b} = (p_{01}, p_{02}, p_{03}, p_{23}, p_{31}, p_{12}), \tag{9.33}$$

其中

$$p_{ij} = \det\begin{pmatrix} a^i & a^j \\ b^i & b^j \end{pmatrix} \tag{9.34}$$

表示 2×4 矩阵

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^0 & a^1 & a^2 & a^3 \\ b^0 & b^1 & b^2 & b^3 \end{pmatrix} \tag{9.35}$$

的 6 个余子式. 显然有 $p_{ji} = -p_{ij}$. 外积具有下列性质:

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b} = -\boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{a}, \quad \boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{a} = 0 && (\text{反对称性}), \\ &\kappa(\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}) = (\kappa \boldsymbol{a}) \wedge \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} \wedge (\kappa \boldsymbol{b}) && (\text{结合律}), \\ &(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) \wedge \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{c} + \boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{c} && (\text{分配律}), \end{aligned} \tag{9.36}$$

其中 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\in\mathbb{R}^4$, κ 是一个标量, 而 “′” 表示求导. 由结合律,

$$(\kappa\boldsymbol{a})\wedge(\sigma\boldsymbol{b})=\kappa\sigma(\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b}). \tag{9.37}$$

所以, 如果将 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 看作 $\mathbb{P}^3$ 中的点, 即

$$\boldsymbol{a}=(a^0:a^1:a^2:a^3)\in\mathbb{P}^3,\quad \boldsymbol{b}=(b^0:b^1:b^2:b^3)\in\mathbb{P}^3, \tag{9.38}$$

则外积 $\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b}$ 可以等同于带齐次坐标

$$\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b}=(p_{01}:p_{02}:p_{03}:p_{23}:p_{31}:p_{12})\in\mathbb{P}^5 \tag{9.39}$$

的五维射影空间中的点. 进一步, 任意两点 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\in\mathbb{P}^3$ 定义了 $\mathbb{P}^3$ 中的一条直线 $l(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$, 又因为 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的外积同 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的任意线性组合这两者作为 $\mathbb{P}^5$ 中的点是相同的, $\mathbb{P}^3$ 中的直线到 $\mathbb{P}^5$ 中的点的映射

$$l(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})\mapsto\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b} \tag{9.40}$$

是有确切定义的. 这样, *Plücker* 对应 (9.40) 给出了 $\mathbb{P}^3$ 中直线的齐次坐标. 需要强调的是, 在 Plücker 映射下, $\mathbb{P}^3$ 的像是嵌入在 $\mathbb{P}^5$ 中的二次曲面, 即坐标 p_{ij} 满足二次 Plücker 关系

$$p_{01}p_{23}+p_{02}p_{31}+p_{03}p_{12}=0. \tag{9.41}$$

现在引入向量值函数 $\varphi\in\mathbb{R}^6$ 和 $\psi\in\mathbb{R}^6$, 它们定义为

$$\varphi=\frac{1}{2}(\boldsymbol{r}_1\wedge\boldsymbol{r}_2+\boldsymbol{r}\wedge\boldsymbol{\eta}),\quad \psi=\frac{1}{2}(\boldsymbol{r}_2\wedge\boldsymbol{r}_1+\boldsymbol{r}\wedge\boldsymbol{\eta}). \tag{9.42}$$

由线性方程组 (9.31), 它们满足

$$\begin{aligned}\varphi_x&=\boldsymbol{r}_1\wedge\boldsymbol{\eta}+\frac{\beta}{2q^2}\boldsymbol{r}\wedge\boldsymbol{r}_2, &\quad \varphi_y&=\frac{B}{2q}\boldsymbol{r}_2\wedge\boldsymbol{r},\\ \psi_y&=\boldsymbol{r}_2\wedge\boldsymbol{\eta}+\frac{\alpha}{2p^2}\boldsymbol{r}\wedge\boldsymbol{r}_1, &\quad \psi_x&=\frac{A}{2p}\boldsymbol{r}_1\wedge\boldsymbol{r},\end{aligned} \tag{9.43}$$

从而 $\varphi,\varphi_x,\varphi_y,\psi,\psi_x,\psi_y$ 构成 $\mathbb{R}^6$ 的一组基. 再次求导得到

$$\begin{aligned}\varphi_{xx}&=p\psi_y-\frac{q_x}{q}\varphi_x+2\frac{\alpha}{A}\psi_x+2\frac{\beta}{q^2}\varphi,\\ \varphi_{xy}&=\frac{B_x}{B}\varphi_y-\frac{B}{q}\varphi,\\ \varphi_{yy}&=\left(\ln\frac{B}{q}\right)_y\varphi_y+p\frac{B}{A}\psi_x,\\ \psi_{xx}&=\left(\ln\frac{A}{p}\right)_x\psi_x+q\frac{A}{B}\varphi_y,\\ \psi_{xy}&=\frac{A_y}{A}\psi_x-\frac{A}{p}\psi,\end{aligned} \tag{9.44}$$

当射影极小曲面的 Gauss-Mainardi-Codazzi 方程组成立时, 上述方程组是相容的. 如前面一样, 从孤立子理论来看, 标度变换 (9.32) 产生了方程组 (9.23) 的线性表示. 顺便注意到, 对于 $\alpha=\beta=0$ 和 $A=B=1$ 的 Demoulin 曲面, 线性表示可大大简化 (参见 9.4 节).

线性方程组 (9.44) 的 Lie 代数结构可以通过引入向量

$$\Phi=(\phi^1,\phi^2,\phi^3,\phi^4,\phi^5,\phi^6)^{\mathrm{T}}, \tag{9.45}$$

$$\begin{aligned}&\phi^1=\psi_y+\frac{\alpha}{Ap}\psi_x,\qquad \phi^2=\psi,\qquad \phi^3=\frac{p}{A}\psi_x,\\ &\phi^6=\varphi_x+\frac{\beta}{Bq}\varphi_y,\qquad \phi^5=\varphi,\qquad \phi^4=\frac{q}{B}\varphi_y\end{aligned} \tag{9.46}$$

看出, 由此, 得到一阶方程组

$$\begin{aligned}&\Phi_x=F\Phi,\qquad F=\begin{pmatrix}0 & -\dfrac{A}{p} & 0 & \dfrac{\alpha}{p} & 0 & 0\\ 0 & 0 & \dfrac{A}{p} & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & p & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \dfrac{q_x}{q} & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -\dfrac{\beta}{q^2} & 0 & 1\\ p & 0 & \dfrac{\alpha}{p} & 0 & \dfrac{\beta}{q^2} & -\dfrac{q_x}{q}\end{pmatrix},\\ &\Phi_y=G\Phi,\qquad G=\begin{pmatrix}-\dfrac{p_y}{p} & \dfrac{\alpha}{p^2} & 0 & \dfrac{\beta}{q} & 0 & q\\ 1 & 0 & -\dfrac{\alpha}{p^2} & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & \dfrac{p_y}{p} & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & q & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \dfrac{B}{q} & 0 & 0\\ 0 & 0 & \dfrac{\beta}{q} & 0 & -\dfrac{B}{q} & 0\end{pmatrix}.\end{aligned} \tag{9.47}$$

$$F^{\mathrm{T}}D = -DF, \quad G^{\mathrm{T}}D = -DG, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{9.48}$$

这给出了 $so(3,3)$ Lie 代数, 因为 D 可以通过相似变换变为 $\mathrm{diag}(1,1,1,-1,-1,-1)$. 这样就得到了著名的结论: Plücker 嵌入 (9.40) 包含了 $sl(4)$–$so(3,3)$ 同构. $so(3,3)$ 线性表示是构造射影极小曲面的 Bäcklund 变换的基础, 下节中将讨论此 Bäcklund 变换.

练　习

1. 证明 Wilczynski 四面体 (9.28) 在规范变换 (9.10)–(9.12) 下是射影不变量.
2. 验证射影极小曲面的 $so(3,3)$ 线性表示的离散对称性 (9.48) 式, 并导出

$$\Phi^{\mathrm{T}}D\Phi = \text{常数}.$$

9.4 作为周期 Toda 格的 Demoulin 方程组

由 $(9.43)_{2,4}$ 式和 $(9.46)_{3,6}$ 式, 点 $\phi^3 \in \mathbb{P}^5$ 和 $\phi^4 \in \mathbb{P}^5$ 通过 Plücker 对应分别表示 $\Sigma \subset \mathbb{P}^3$ 上 x 渐近曲线和 y 渐近曲线的切向量. 但是, ϕ^3 和 ϕ^4 也可以解释为 $\mathbb{P}^5$ 中两个曲面 Σ_3 和 Σ_4 的位置向量. 因为这两个位置向量通过

$$\phi_x^3 = p\phi^4, \quad \phi_y^4 = q\phi^3 \tag{9.49}$$

相联系, 曲面 Σ_3 和 Σ_4 互为 Laplace-Darboux 变换 (参见 3.3 节). 事实上, 消去 ϕ^3 或 ϕ^4 中的任一个就得到射影空间中的共轭网方程

$$\phi_{xy}^3 = \frac{p_y}{p}\phi_x^3 + pq\phi^3, \quad \phi_{xy}^4 = \frac{q_x}{q}\phi_y^4 + pq\phi^4. \tag{9.50}$$

于是, x 和 y 是 Σ_3 和 Σ_4 上的共轭坐标. 双向延伸 Laplace-Darboux 序列就得到 $\mathbb{P}^5$ 中曲面的*Godeaux 序列*

$$\cdots \longleftrightarrow \Sigma_2 \longleftrightarrow \Sigma_3 \longleftrightarrow \Sigma_4 \longleftrightarrow \Sigma_5 \longleftrightarrow \cdots. \tag{9.51}$$

周期 Godeaux 序列是特别感兴趣的. 只有 Godeaux 序列具有周期 6 (事实上

几何描述. 这时, 有

$$
\begin{aligned}
\phi_x^1 &= -\frac{1}{p}\phi^2, \qquad \phi_y^2 = \phi^1, \\
\phi_y^6 &= -\frac{1}{q}\phi^5, \qquad \phi_x^5 = \phi^6,
\end{aligned}
\tag{9.52}
$$

从而 ϕ^1, ϕ^2 和 ϕ^5, ϕ^6 通过 Laplace-Darboux 变换相联系, 对应的共轭网方程为

$$
\begin{aligned}
\phi_{xy}^1 &= -\frac{p_y}{p}\phi_x^1 - \frac{1}{p}\phi^1, \qquad \phi_{xy}^2 = -\frac{1}{p}\phi^2, \\
\phi_{xy}^6 &= -\frac{q_x}{q}\phi_y^6 - \frac{1}{q}\phi^6, \qquad \phi_{xy}^5 = -\frac{1}{q}\phi^5.
\end{aligned}
\tag{9.53}
$$

事实上, 点 $\phi^1, \cdots, \phi^6 \in \mathbb{P}^5$ 是周期 Godeaux 曲面 $\Sigma_1, \cdots, \Sigma_6$ 上的位置向量, 因为表示共轭网方程的等价类的 Laplace-Darboux 不变量 h 和 k 由规范变换相联系 (参见 3.3 节), 从而在 $\mathbb{P}^5$ 中是相同的. 同 (9.50), (9.53) 式相联系的 Laplace-Darboux 不变量是

$$
\begin{aligned}
h_1 &= h_4 = k_3 = k_6 = l, \\
h_2 &= h_3 = k_1 = k_2 = k, \\
h_5 &= h_6 = k_4 = k_5 = h,
\end{aligned}
\tag{9.54}
$$

其中

$$
h = -\frac{1}{q}, \quad k = -\frac{1}{p}, \quad l = \frac{1}{hk} = pq,
\tag{9.55}
$$

从而点 ϕ^i 同生成周期 Godeaux 序列的 Laplace-Darboux 变换有关.

从现代观点来看, 共轭网的经典 Laplace-Darboux 序列满足二维 Toda 格 (3.105). 如果具有周期 6, 则得到有限方程组

$$
\begin{aligned}
(\ln h_1)_{xy} &= -h_6 + 2h_1 - h_2, \qquad (\ln h_2)_{xy} = -h_1 + 2h_2 - h_3, \\
(\ln h_3)_{xy} &= -h_2 + 2h_3 - h_4, \qquad (\ln h_4)_{xy} = -h_3 + 2h_4 - h_5, \\
(\ln h_5)_{xy} &= -h_4 + 2h_5 - h_6, \qquad (\ln h_6)_{xy} = -h_5 + 2h_6 - h_1,
\end{aligned}
\tag{9.56}
$$

它同仿射 Lie 代数 $A_5^{(1)}$ 相联系. $A_5^{(1)}$ 有 Lie 子代数 $D_3^{(2)}$, 它对应于约化 (9.54). 现在, 周期 Toda 格取特殊的形式

$$
(\ln h)_{xy} = h - l, \quad (\ln k)_{xy} = k - l, \quad (\ln l)_{xy} = -h + 2l - k,
\tag{9.57}
$$

由此得 $(\ln hkl)_{xy} = 0$. 不妨设 $hkl = 1$, 这就重新得到了用变量 $(9.55)_{1,2}$ 写出的*Demoulin 方程组*

$$
\boxed{(\ln h)_{xy} = h - \frac{1}{\quad}, \quad (\ln k)_{xy} = k - \frac{1}{\quad}}
\tag{9.58}
$$

令 $A=-\lambda,\ B=-1/\lambda$, 并在 (9.44) 式中作标度变换

$$h\to-\lambda h,\quad k\to-k/\lambda, \tag{9.59}$$

就得到需要的线性表示. 容易看到, 在 Demoulin 方程组 (9.58) 成立时, 线性方程组

$$\begin{aligned}
&\varphi_{xx}=\frac{h_x}{h}\varphi_x+\lambda\frac{1}{k}\psi_y, &&\psi_{xx}=\frac{k_x}{k}\psi_x+\lambda\frac{1}{h}\varphi_y,\\
&\varphi_{xy}=h\varphi, &&\psi_{xy}=k\psi,\\
&\varphi_{yy}=\frac{h_y}{h}\varphi_y+\frac{1}{\lambda}\frac{1}{k}\psi_x, &&\psi_{yy}=\frac{k_y}{k}\psi_y+\frac{1}{\lambda}\frac{1}{h}\varphi_x
\end{aligned} \tag{9.60}$$

是相容的. 在 $h=k$ 时对应于 Tzitzeica 曲面, 这时可以取 $\varphi=\psi$ 得到 Tzitzeica 方程的标准线性表示 (3.15).

练　习

1. 在 Demoulin 曲面的情形, 证明除了相差一个规范变换, $\phi^1,\cdots,\phi^6$ 通过 3.3 节给出的 Laplace-Darboux 变换相联系.

9.5 射影极小曲面的 Bäcklund 变换

射影极小曲面的 Bäcklund 变换可以从基本变换加上适当的约束而系统地得到. 这里, 假设 α 和 β 是常数, 并作变换

$$h=-\frac{1}{q},\quad k=-\frac{1}{p}. \tag{9.61}$$

进一步, 标度变换

$$\begin{aligned}
&h\to-\lambda h, &&A\to-\lambda A, &&\alpha\to\lambda^2\alpha,\\
&k\to-k/\lambda, &&B\to-B/\lambda, &&\beta\to\beta/\lambda^2
\end{aligned} \tag{9.62}$$

将线性表示 (9.44) 变为

$$\begin{aligned}
&\varphi_{xx}=\frac{h_x}{h}\varphi_x+\lambda\frac{1}{k}\psi_y-2\lambda\frac{\alpha}{A}\psi_x+2\beta h^2\varphi,\\
&\varphi_{xy}=Bh\varphi+\frac{B_x}{B}\varphi_y,\\
&\varphi_{yy}=(\ln Bh)_y\varphi_y+\frac{1}{\lambda}\frac{B}{Ak}\psi_x,\\
&\psi_{xx}=(\ln Ak)_x\psi_x+\lambda\frac{A}{\quad}\varphi_y,
\end{aligned} \tag{9.63}$$

$$\psi_{xy} = Ak\psi + \frac{A_y}{A}\psi_x,$$

$$\psi_{yy} = \frac{k_y}{k}\psi_y + \frac{1}{\lambda}\frac{1}{h}\varphi_x - 2\frac{1}{\lambda}\frac{\beta}{B}\varphi_y + 2\alpha k^2\psi,$$

并有相容性条件

$$(\ln h)_{xy} = Bh - \frac{1}{hk}, \qquad B_x = 2\beta h_y,$$
$$(\ln k)_{xy} = Ak - \frac{1}{hk}, \qquad A_y = 2\alpha k_x. \tag{9.64}$$

下面要寻找上述线性方程组的不变量, 并以作为射影极小曲面的 Bäcklund 变换的 Plücker 对应表示出来.

9.5.1　$so(3,3)$ 线性表示的不变性

作为 Lax 对 (9.64) 的一部分, 线性方程组

$$\varphi_{xy} = Bh\varphi + \frac{B_x}{B}\varphi_y, \qquad \varphi_{yy} = (\ln Bh)_y\varphi_y + \frac{1}{\lambda}\frac{B}{Ak}\psi_x,$$
$$\psi_{xy} = Ak\psi + \frac{A_y}{A}\psi_x, \qquad \psi_{xx} = (\ln Ak)_x\psi_x + \lambda\frac{A}{Bh}\varphi_y \tag{9.65}$$

的相容性条件为

$$(\ln h)_{xy} = Bh - \frac{1}{hk}, \quad (\ln k)_{xy} = Ak - \frac{1}{hk}. \tag{9.66}$$

它关于自变量对称, 并可以看作 h 和 k 的带有任意函数 A 和 B 的方程组. 它也保证了“共轭” 方程组

$$\tilde{\varphi}_{xy} = Bh\tilde{\varphi} + \frac{B_y}{B}\tilde{\varphi}_x, \qquad \tilde{\varphi}_{xx} = (\ln Bh)_x\tilde{\varphi}_x + \lambda\frac{B}{Ak}\tilde{\psi}_y,$$
$$\tilde{\psi}_{xy} = Ak\tilde{\psi} + \frac{A_x}{A}\tilde{\psi}_y, \qquad \tilde{\psi}_{yy} = (\ln Ak)_y\tilde{\psi}_y + \frac{1}{\lambda}\frac{A}{Bh}\tilde{\varphi}_x \tag{9.67}$$

的相容性, 此 “共轭” 方程组由 (9.65) 式通过交换 x 和 y 以及变换 $\lambda \to 1/\lambda$ 得到. 首先我们考虑方程 $(9.65)_{1,3}$, 它可以看作为射影空间中标准化的共轭网方程, 从而在基本表示下保持不变. 5.4 节中给出的平行网的类比由双线性势 M 和 N 给出, 它们由相容方程组

$$M_x = \frac{\tilde{\varphi}^\circ_x\varphi}{B}, \qquad M_y = \frac{\tilde{\varphi}^\circ\varphi_y}{B},$$
$$N_x = \frac{\tilde{\psi}^\circ\psi_x}{A}, \qquad N_y = \frac{\tilde{\psi}^\circ_y\psi}{A} \tag{9.68}$$

所定义, 其中 $(\tilde{\varphi}^\circ, \tilde{\psi}^\circ)$ 是带参数 $\lambda_\circ$ 的共轭方程组 (9.67) 的解. 此外, 如果 φ° 和 ψ°

N° 满足

$$M^\circ_x = \frac{\tilde{\varphi}^\circ_x \varphi^\circ}{B}, \qquad M^\circ_y = \frac{\tilde{\varphi}^\circ \varphi^\circ_y}{B},$$
$$N^\circ_x = \frac{\tilde{\psi}^\circ \psi^\circ_x}{A}, \qquad N^\circ_y = \frac{\tilde{\psi}^\circ_y \psi^\circ}{A}. \tag{9.69}$$

对 φ 和 ψ 的基本变换

$$\varphi' = \varphi - \varphi^\circ \frac{M}{M^\circ}, \quad \psi' = \psi - \psi^\circ \frac{N}{N^\circ} \tag{9.70}$$

求导得

$$\varphi'_y = \Gamma\left(\varphi_y - \varphi^\circ_y \frac{M}{M^\circ}\right), \quad \psi'_x = \Lambda\left(\psi_x - \psi^\circ_x \frac{N}{N^\circ}\right), \tag{9.71}$$

其中

$$\Gamma = 1 - \frac{\tilde{\varphi}^\circ \varphi^\circ}{BM^\circ}, \quad \Lambda = 1 - \frac{\tilde{\psi}^\circ \psi^\circ}{AN^\circ}. \tag{9.72}$$

于是, φ' 的混合导数为

$$\varphi'_{xy} = \Gamma\left(Bh - \frac{\tilde{\varphi}^\circ_x \varphi^\circ_y}{BM^\circ}\right)\varphi' + \left(\frac{\Gamma_x}{\Gamma} + \frac{B_x}{B}\right)\varphi'_y, \tag{9.73}$$

由此得双曲型方程 $(9.65)_1$ 在基本变换 $(9.70)_1$ 及

$$B' = g\Gamma B, \quad gh' = h - \frac{\tilde{\varphi}^\circ_x \varphi^\circ_y}{B^2 M^\circ} \tag{9.74}$$

下保持不变, 这里 $g = g(y)$ 是作为积分常数的函数. 由对称性, 第二个双曲型方程 $(9.65)_3$ 在基本变换 $(9.70)_2$ 及

$$A' = f\Lambda A, \quad fk' = k - \frac{\tilde{\psi}^\circ_y \psi^\circ_x}{A^2 N^\circ} \tag{9.75}$$

下保持不变, 其中 $f = f(x)$.

可以适当选取 f 和 g 以及积分常数使得方程 $(9.65)_{2,4}$ 不变. 为此, 注意到

$$\lambda M - \lambda_\circ N - \lambda \frac{\tilde{\varphi}^\circ_x \varphi_y}{B^2 h} + \lambda_\circ \frac{\tilde{\psi}^\circ_y \psi_x}{A^2 k} = c \tag{9.76}$$

是首次积分, 并取其中特殊的

$$M^\circ - N^\circ - \frac{\tilde{\varphi}^\circ_x \varphi^\circ_y}{B^2 h} + \frac{\tilde{\psi}^\circ_y \psi^\circ_x}{A^2 k} = c^\circ. \tag{9.77}$$

用带撇的量来表示, 这些关系可以写成

其中

$$Q = \lambda g \frac{\tilde{\varphi}_x^\circ \varphi_y'}{B'Bh} - \lambda_\circ f \frac{\tilde{\psi}_y^\circ \psi_x'}{A'Ak}, \tag{9.79}$$

$$g\frac{h'}{h}M^\circ - f\frac{k'}{k}N^\circ = c^\circ. \tag{9.80}$$

于是有

$$\lambda \frac{M}{M^\circ} - \lambda_\circ \frac{N}{N^\circ} = \frac{1}{M^\circ N^\circ}\frac{h}{gh'}[(c+Q)N^\circ - c^\circ N]. \tag{9.81}$$

对 $(9.71)_1$ 式给出的 φ_y' 求导得

$$\begin{aligned}\varphi_{yy}' = &\left(\frac{\Gamma_y}{\Gamma} + (\ln Bh)_y - \frac{\tilde{\varphi}^\circ \varphi_y^\circ}{BM^\circ}\right)\varphi_y' \\ &+ \frac{1}{\lambda}\frac{\Gamma B}{Ak}\left[\frac{\psi_x'}{\Lambda} - \frac{\psi_x^\circ}{\lambda_\circ}\left(\lambda\frac{M}{M^\circ} - \lambda_\circ \frac{N}{N^\circ}\right)\right].\end{aligned} \tag{9.82}$$

由 (9.79) 式和 (9.81) 式, 当

$$c = c^\circ = 0 \tag{9.83}$$

时, (9.82) 式具有形式

$$\varphi_{yy}' = Q_1 \varphi_y' + \frac{1}{\lambda}Q_2 \psi_x'. \tag{9.84}$$

需要强调的是, 上述约束是合理的, 因为双线性势 M, N 和 M°, N° 可差一个任意的相加常数. 如果取 (9.83) 式, 则系数 Q_1 和 Q_2 为

$$\begin{aligned} Q_1 &= \frac{\Gamma_y}{\Gamma} + (\ln Bh)_y - \frac{\tilde{\varphi}^\circ \varphi_y^\circ}{BM^\circ} - \frac{\Gamma}{\lambda_\circ}\frac{\tilde{\varphi}_x^\circ \psi_x^\circ}{AkB'h'M^\circ} = (\ln B'h')_y, \\ Q_2 &= \frac{\Gamma B}{Ak}\left(\frac{1}{\Lambda} + \frac{\tilde{\psi}_y^\circ \psi_x^\circ}{AA'k'N^\circ}\right) = \frac{B'}{gA'k'}, \end{aligned} \tag{9.85}$$

从而保持 $(9.65)_2$ 式不变要求

$$g = 1. \tag{9.86}$$

类似地, 取

$$f = 1 \tag{9.87}$$

可使得 $(9.65)_4$ 式在基本变换下保持不变. 因此, 在加上条件 $f = g = 1$ 和 $c^\circ = 0$ 时, (9.74), (9.75) 式构成非线性方程组 (9.66) 的另一个解.

为了找到使得剩下的线性方程 $(9.64)_{1,6}$ 保持不变的必要条件, 我们直接考虑

一定的条件. 如果 φ 和 ψ 是特征函数, 即是完整的线性方程组 (9.64) 的解, 那么

$$\begin{aligned}\tilde{\varphi} &= B\varphi - 2\beta\frac{h_y}{Bh}\varphi_y - 2\frac{1}{\lambda}\frac{\beta}{Ak}\psi_x,\\ \tilde{\psi} &= A\psi - 2\alpha\frac{k_x}{Ak}\psi_x - 2\lambda\frac{\alpha}{Bh}\varphi_y\end{aligned} \tag{9.88}$$

是特殊的共轭特征函数. 利用

$$\tilde{\varphi}_x = B\varphi_x - 2\beta h\varphi_y, \quad \tilde{\psi}_y = A\psi_y - 2\alpha k\psi_x, \tag{9.89}$$

容易验证 $\tilde{\varphi}$ 和 $\tilde{\psi}$ 确实满足共轭方程组 (9.67). 用上述共轭特征函数, 方程组 (9.69) 的通解为

$$M^\circ = \frac{1}{2}\varphi^{\circ 2} - \beta\frac{\varphi_y^{\circ 2}}{B^2} + c_1, \quad N^\circ = \frac{1}{2}\psi^{\circ 2} - \alpha\frac{\psi_x^{\circ 2}}{A^2} + c_2. \tag{9.90}$$

代入首次积分 $(9.77)_{c^\circ=0}$ 得到二次约束

$$\varphi^{\circ 2} - 2\frac{\varphi_y^\circ}{Bh}\left(\varphi_x^\circ - \beta\frac{h}{B}\varphi_y^\circ\right) - \psi^{\circ 2} + 2\frac{\psi_x^\circ}{Ak}\left(\psi_y^\circ - \alpha\frac{k}{A}\psi_x^\circ\right) = c_2 - c_1, \tag{9.91}$$

或等价的

$$\Phi^{\circ\mathrm{T}} D\Phi^\circ = c_1 - c_2, \tag{9.92}$$

其中 Φ° 和 D 分别由 (9.45), (9.46) 和 $(9.48)_3$ 式所定义. 上式表示向量 Φ 按 $so(3,3)$ Lie 代数的 Killing-Cartan 度量 D 定义的长度是常数, 这是恒等式 (9.48) 的直接结论.

由

$$B'_x = 2\beta h'_y \tag{9.93}$$

得到

$$2\beta h_y - \left(\frac{\tilde{\varphi}^\circ\varphi^\circ}{M^\circ}\right)_x = 2\beta\left[\left(\frac{h_y}{h} - \frac{\tilde{\varphi}^\circ\varphi_y^\circ}{BM^\circ}\right)h' - \frac{1}{\lambda_\circ}\frac{\tilde{\varphi}_x^\circ\psi_x^\circ}{AkBM^\circ}\right], \tag{9.94}$$

进一步简化得

$$\left(M^\circ - \frac{1}{2}\varphi^{\circ 2} + \beta\frac{\varphi_y^{\circ 2}}{B^2}\right)\tilde{\varphi}^\circ\tilde{\varphi}_x^\circ = 0. \tag{9.95}$$

从关系式

$$A'_y = 2\alpha k'_x \tag{9.96}$$

可得到类似的结果. 因此, 特殊选择

保证了射影极小曲面的 Gauss-Mainardi-Codazzi 方程在基本变换下保持不变.

双线性势 M 和 N 也可用特征函数显式表示. 可以直接验证,

$$\begin{aligned} M =& -\kappa_0\varphi^\circ\varphi + \kappa_2\frac{\varphi_x^\circ\varphi_y}{Bh} + \kappa_0\frac{\varphi_y^\circ\varphi_x}{Bh} - 2\kappa_2\beta\frac{\varphi_y^\circ\varphi_y}{B^2} \\ &+ \kappa_1\psi^\circ\psi - \kappa_1\frac{\psi_y^\circ\psi_x}{Ak} - \kappa_1\frac{\psi_x^\circ\psi_y}{Ak} + 2\kappa_1\alpha\frac{\psi_x^\circ\psi_x}{A^2} + c_3, \\ N =& -\kappa_1\varphi^\circ\varphi + \kappa_1\frac{\varphi_x^\circ\varphi_y}{Bh} + \kappa_1\frac{\varphi_y^\circ\varphi_x}{Bh} - 2\kappa_1\beta\frac{\varphi_y^\circ\varphi_y}{B^2} \\ &+ \kappa_2\psi^\circ\psi - \kappa_0\frac{\psi_y^\circ\psi_x}{Ak} - \kappa_2\frac{\psi_x^\circ\psi_y}{Ak} + 2\kappa_0\alpha\frac{\psi_x^\circ\psi_x}{A^2} + c_4, \end{aligned} \tag{9.98}$$

其中常数

$$\kappa_0 = \frac{\lambda_\circ^2}{\lambda^2 - \lambda_\circ^2}, \quad \kappa_1 = \frac{\lambda\lambda_\circ}{\lambda^2 - \lambda_\circ^2}, \quad \kappa_2 = \frac{\lambda^2}{\lambda^2 - \lambda_\circ^2} \tag{9.99}$$

满足 (9.68) 式. 借助于计算机代数运算, 剩下带撇的线性方程 $(9.64)_{1,6}$ 给出

$$c_3 = c_4 = 0. \tag{9.100}$$

上述结果总结如下.

定理 44 (射影极小曲面的 $so(3,3)$ 线性表示的不变性)　*设 $(\varphi, \psi, h, k, A, B)$ 是线性表示 (9.64) 和非线性方程组 (9.64) 的解. 又设 $(\varphi^\circ, \psi^\circ)$ 是带参数 $\lambda_\circ$ 的另一对特征函数, 满足二次约束*

$$\varphi^{\circ 2} - 2\frac{\varphi_y^\circ\varphi_x^\circ}{Bh} + 2\beta\frac{\varphi_y^{\circ 2}}{B^2} - \psi^{\circ 2} + 2\frac{\psi_x^\circ\psi_y^\circ}{Ak} - 2\alpha\frac{\psi_x^{\circ 2}}{A^2} = 0, \tag{9.101}$$

双线性势 M, N 由 $(9.98)_{c_3=c_4=0}$ 式定义,

$$M^\circ = \frac{1}{2}\varphi^{\circ 2} - \beta\frac{\varphi_y^{\circ 2}}{B^2}, \quad N^\circ = \frac{1}{2}\psi^{\circ 2} - \alpha\frac{\psi_x^{\circ 2}}{A^2}, \tag{9.102}$$

那么方程组 (9.64), (9.64) 的第二个解为

$$\mathbb{B}: \begin{cases} \varphi' = \varphi - \varphi^\circ\dfrac{M}{M^\circ}, & \psi' = \psi - \psi^\circ\dfrac{N}{N^\circ}, \\ h' = h - \dfrac{\tilde{\varphi}_x^\circ\varphi_y^\circ}{B^2M^\circ}, & k' = k - \dfrac{\tilde{\psi}_y^\circ\psi_x^\circ}{A^2N^\circ}, \\ B' = B - \dfrac{\tilde{\varphi}^\circ\varphi^\circ}{M^\circ}, & A' = A - \dfrac{\tilde{\psi}^\circ\psi^\circ}{N^\circ}, \end{cases} \tag{9.103}$$

其中

$$\tilde{\varphi}^\circ = B\varphi^\circ - 2\beta\frac{h_y}{Bh}\varphi_y^\circ - 2\frac{1}{\lambda_\circ}\frac{\beta}{Ak}\psi_x^\circ, \tag{9.104}$$

9.5.2　$sl(4)$ 线性表示的不变性

由定理 44, 新的特征函数 φ', ψ' 及其一阶导数可以写成相应不带撇的量的线性组合, 其系数依赖于 $\varphi^\circ, \psi^\circ, h, k, A, B$ 和 $\lambda_\circ$. 于是, 基本变换在 $so(3,3)$ 线性表示上的作用可以用变换矩阵 P 表示为

$$\Phi' = P\Phi, \tag{9.105}$$

且满足

$$P^{\mathrm{T}} D P = D. \tag{9.106}$$

于是, 从 Φ 到 Φ' 的变换可以看作为带有度量 D 的 $\mathbb{R}^6$ 中的 (不是正的)"旋转". 然而, 容易看到 $\det P = -1$, 因此 $P \in O(3,3)$ 但 $P \notin SO(3,3)$. 为了在群的层次上给出 $so(3,3)$–$sl(4)$ 同构, 即 Plücker 对应, 我们需要用一个离散变换改变基本变换 $\mathbb{B}$, 该离散变换为

$$\mathbb{D}: \quad (\varphi, \psi, h, k, A, B) \to (\varphi, -\psi, -h, -k, -A, -B), \tag{9.107}$$

它可表示为变换矩阵 $\hat{P} = \mathrm{diag}(-1,-1,-1,1,1,1)$, 而

$$\hat{\Phi} = \hat{P}\Phi, \quad \hat{P}^{\mathrm{T}} D \hat{P} = D, \quad \det \hat{P} = -1. \tag{9.108}$$

事实上, 同

$$\tilde{\mathbb{B}} = \mathbb{D} \circ \mathbb{B}: \quad \tilde{\Phi} = \tilde{P}\Phi = \hat{P}P\Phi \tag{9.109}$$

相联系的变换矩阵 $\tilde{P}$ 具有性质,

$$\tilde{P}^{\mathrm{T}} D \tilde{P} = D, \quad \det \tilde{P} = 1, \tag{9.110}$$

从而 $\tilde{P} \in SO(3,3)$.

如果将 (9.42), (9.43), (9.46) 式重写为

$$\begin{aligned} &\phi^1 = \boldsymbol{r}_2 \wedge \boldsymbol{\eta}, \quad &&\phi^2 = \frac{1}{2}(\boldsymbol{r}_2 \wedge \boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{r} \wedge \boldsymbol{\eta}), \quad &&\phi^3 = \frac{1}{2}\boldsymbol{r}_1 \wedge \boldsymbol{r}, \\ &\phi^6 = \boldsymbol{r}_1 \wedge \boldsymbol{\eta}, \quad &&\phi^5 = \frac{1}{2}(\boldsymbol{r}_1 \wedge \boldsymbol{r}_2 + \boldsymbol{r} \wedge \boldsymbol{\eta}), \quad &&\phi^4 = \frac{1}{2}\boldsymbol{r}_2 \wedge \boldsymbol{r}, \end{aligned} \tag{9.111}$$

那么变换 $\tilde{\mathbb{B}}$ 在 Wilczynski 四面体上的作用 $(\boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{r}_3) = (\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{\eta})$ 由求解下列代数方程组

$$\tilde{\phi}^1 = \tilde{\boldsymbol{r}}_2 \wedge \tilde{\boldsymbol{\eta}}, \quad \tilde{\phi}^2 = \frac{1}{2}(\tilde{\boldsymbol{r}}_2 \wedge \tilde{\boldsymbol{r}}_1 + \tilde{\boldsymbol{r}} \wedge \tilde{\boldsymbol{\eta}}), \quad \tilde{\phi}^3 = \frac{1}{2}\tilde{\boldsymbol{r}}_1 \wedge \tilde{\boldsymbol{r}}, \tag{9.112}$$

得到. 形为 (9.109), (9.110) 的正旋转通过 Plücker 对应映为线性变换

$$\tilde{\boldsymbol{r}}_i = \sum_{j=1}^{4} K_i{}^j \boldsymbol{r}_j, \quad K \in SL(4), \tag{9.113}$$

因此代数方程组 (9.110) 关于 K 是二次的. 当 $\lambda = -1$ 时有下列定理.

定理 45 (射影极小曲面的 Bäcklund 变换) 设 $\boldsymbol{r}$ 是射影极小曲面 Σ 的位置向量, 特征函数 φ° 和 ψ° 由定理 44 给出. 那么, 第二个射影极小曲面 $\tilde{\Sigma}$ 由

$$\tilde{\boldsymbol{r}} = f^0 \boldsymbol{r} + f^1 \boldsymbol{r}_1 + f^2 \boldsymbol{r}_2 \tag{9.114}$$

给出, 其中

$$f^0 = -\frac{1}{2}\frac{\lambda_\circ \varphi^\circ + \psi^\circ}{\Omega}, \quad f^1 = \lambda_\circ \frac{\varphi_y^\circ}{Bh\Omega}, \quad f^2 = \frac{\psi_x^\circ}{Ak\Omega}, \tag{9.115}$$

$$\Omega = \sqrt{\varphi^{\circ 2} - 2\frac{\varphi_y^\circ \varphi_x^\circ}{Bh} + 2\beta \frac{\varphi_y^{\circ 2}}{B^2}} = \sqrt{\psi^{\circ 2} - 2\frac{\psi_x^\circ \psi_y^\circ}{Ak} + 2\alpha \frac{\psi_x^{\circ 2}}{A^2}}. \tag{9.116}$$

变换 $\tilde{\mathbb{B}}$ 具有相切性质, 即连接 $\hat{\Sigma}$ 和 $\tilde{\hat{\Sigma}}$ 上对应点的线段 $\tilde{\hat{\boldsymbol{r}}} - \hat{\boldsymbol{r}}$ 与两个曲面都相切.

证明 $\tilde{\Sigma}$ 的位置向量可以写为

$$\tilde{\boldsymbol{r}} = g^0 \boldsymbol{r} + g^1 \boldsymbol{r}_x + g^2 \boldsymbol{r}_y. \tag{9.117}$$

如果将曲面 $\tilde{\Sigma} \subset \mathbb{P}^3$ 等同于曲面 $\tilde{\hat{\Sigma}} \subset \mathbb{R}^3$, 则后者的位置向量为

$$\tilde{\hat{\boldsymbol{r}}} = \hat{\boldsymbol{r}} + \frac{g^1 r^0 \hat{\boldsymbol{r}}_x + g^2 r^0 \hat{\boldsymbol{r}}_y}{g^0 r^0 + g^1 r_x^0 + g^2 r_y^0}, \tag{9.118}$$

于是 $\tilde{\hat{\boldsymbol{r}}} - \hat{\boldsymbol{r}}$ 与 $\hat{\Sigma}$ 相切. 进一步, 基本变换是可逆的, 且它的逆与 $\tilde{\mathbb{B}}$ 有相同的形式, 即 $\hat{\boldsymbol{r}}$ 是 $\tilde{\hat{\boldsymbol{r}}}, \tilde{\hat{\boldsymbol{r}}}_1$ 和 $\tilde{\hat{\boldsymbol{r}}}_2$ 的线性组合. 从而, 线段 $\tilde{\hat{\boldsymbol{r}}} - \hat{\boldsymbol{r}}$ 也与 $\tilde{\hat{\Sigma}}$ 相切. □

练 习

1. 验证首次积分 (9.76).

2. 证明由 (9.88) 给出的 $\tilde{\varphi}$ 和 $\tilde{\psi}$ 是特殊的共轭特征函数, 且相应的双线性势 M° 和 N° 具有形式 (9.90).

9.6 单孤立子 Demoulin 曲面

在 Demoulin 曲面情形, 上节中给出的 Bäcklund 变换可以直接同经典的 Moutard 变换联系起来. 如果 $\alpha = \beta = 0$, 那么双线性势 M° 和 N° 成为

从而变换 $(9.103)_{5,6}$ 简化为

$$A' = -A, \quad B' = -B. \tag{9.120}$$

这表示 A 和 B 在变换 $\tilde{\mathbb{B}}$ 下保持不变, 从而可标准化为 $A = B = 1$. 在线性层次上, 已经知道 Demoulin 方程组 (9.58) 的 $so(3,3)$ 表示 (9.64) 形为 (9.60) 式, 它包含两个 Moutard 方程. 因此我们自然将基本变换 (9.70) 加上对合 (9.107) 成为

$$\tilde{\varphi} = \frac{S}{\varphi^\circ}, \quad \tilde{\psi} = \frac{T}{\psi^\circ}, \tag{9.121}$$

其中

$$S = \varphi^\circ\varphi - 2M, \quad T = -\psi^\circ\psi + 2N. \tag{9.122}$$

S 和 T 满足反对称双线性关系

$$\begin{aligned} S_x &= \varphi^\circ\varphi_x - \varphi^\circ_x\varphi, \qquad S_y = \varphi^\circ_y\varphi - \varphi^\circ\varphi_y, \\ T_x &= \psi^\circ\psi_x - \psi^\circ_x\psi, \qquad T_y = \psi^\circ_y\psi - \psi^\circ\psi_y. \end{aligned} \tag{9.123}$$

这里, 利用 (9.104) 式, 我们用到了共轭特征函数 $\tilde{\varphi}^\circ$ 和 $\tilde{\psi}^\circ$ 分别同特征函数 φ° 和 ψ° 相一致这一事实. 因此, 变换 (9.121) 给出两个经典 Moutard 变换. 由定理 44 得

推论 6 (Demoulin 方程组的 Bäcklund 变换) Demoulin 方程组 (9.58) 及其 $so(3,3)$ 线性表示 (9.60) 在 Moutard 型变换

$$\begin{aligned} \varphi \to \tilde{\varphi} &= \frac{S}{\varphi^\circ}, \qquad h \to \tilde{h} = h - 2(\ln\varphi^\circ)_{xy}, \\ \psi \to \tilde{\psi} &= \frac{T}{\psi^\circ}, \qquad k \to \tilde{k} = k - 2(\ln\psi^\circ)_{xy} \end{aligned} \tag{9.124}$$

下保持不变, 这里 $(\varphi^\circ, \psi^\circ)$ 是带参数 $\lambda_\circ$ 的方程组 (9.60) 的解, 并满足约束

$$\varphi^{\circ 2} - 2\frac{\varphi^\circ_x\varphi^\circ_y}{h} = \psi^{\circ 2} - 2\frac{\psi^\circ_x\psi^\circ_y}{k}, \tag{9.125}$$

双线性势 S 和 T 由

$$\begin{aligned} S &= \nu_3\varphi^\circ\varphi - \nu_1\psi^\circ\psi - \nu_2\frac{\varphi^\circ_x\varphi_y}{h} - \nu_0\frac{\varphi^\circ_y\varphi_x}{h} + \nu_1\frac{\psi^\circ_x\psi_y}{k} + \nu_1\frac{\psi^\circ_y\psi_x}{k}, \\ T &= \nu_3\psi^\circ\psi - \nu_1\varphi^\circ\varphi - \nu_2\frac{\psi^\circ_x\psi_y}{k} - \nu_0\frac{\psi^\circ_y\psi_x}{k} + \nu_1\frac{\varphi^\circ_x\varphi_y}{h} + \nu_1\frac{\varphi^\circ_y\varphi_x}{h} \end{aligned} \tag{9.126}$$

给出, 并满足约束

$$\begin{aligned} \nu_0 &= \frac{2\lambda_\circ^2}{\lambda^2 - \lambda_\circ^2}, \qquad \nu_1 = \frac{2\lambda\lambda_\circ}{\lambda^2 - \lambda_\circ^2}, \\ \nu_2 &= \frac{2\lambda^2}{\lambda^2 - \lambda_\circ^2}, \qquad \nu_3 = \frac{\lambda^2 + \lambda_\circ^2}{\lambda^2 - \lambda_\circ^2}. \end{aligned} \tag{9.127}$$

如果从 Demoulin 方程组的种子解 $h = k = 1$ 出发, 那么除了产生 Tzitzeica 方程退化解的那个以外, 最简单的非平凡特征函数为[133]

$$\varphi^\circ = e^{i\gamma_2}\cosh\gamma_1, \quad \psi^\circ = -e^{i\gamma_2}\sinh\gamma_1, \tag{9.128}$$

其中

$$\gamma_1 = \frac{1}{2}(\kappa x + \kappa^{-1}y), \quad \gamma_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}(\kappa x - \kappa^{-1}y), \quad \lambda_\circ = \kappa^3. \tag{9.129}$$

可以验证约束 (9.125) 恒满足, 其中

$$\Omega \sim e^{i\gamma_2}\Delta, \quad \Delta = \sqrt{\cosh 2\gamma_1}, \tag{9.130}$$

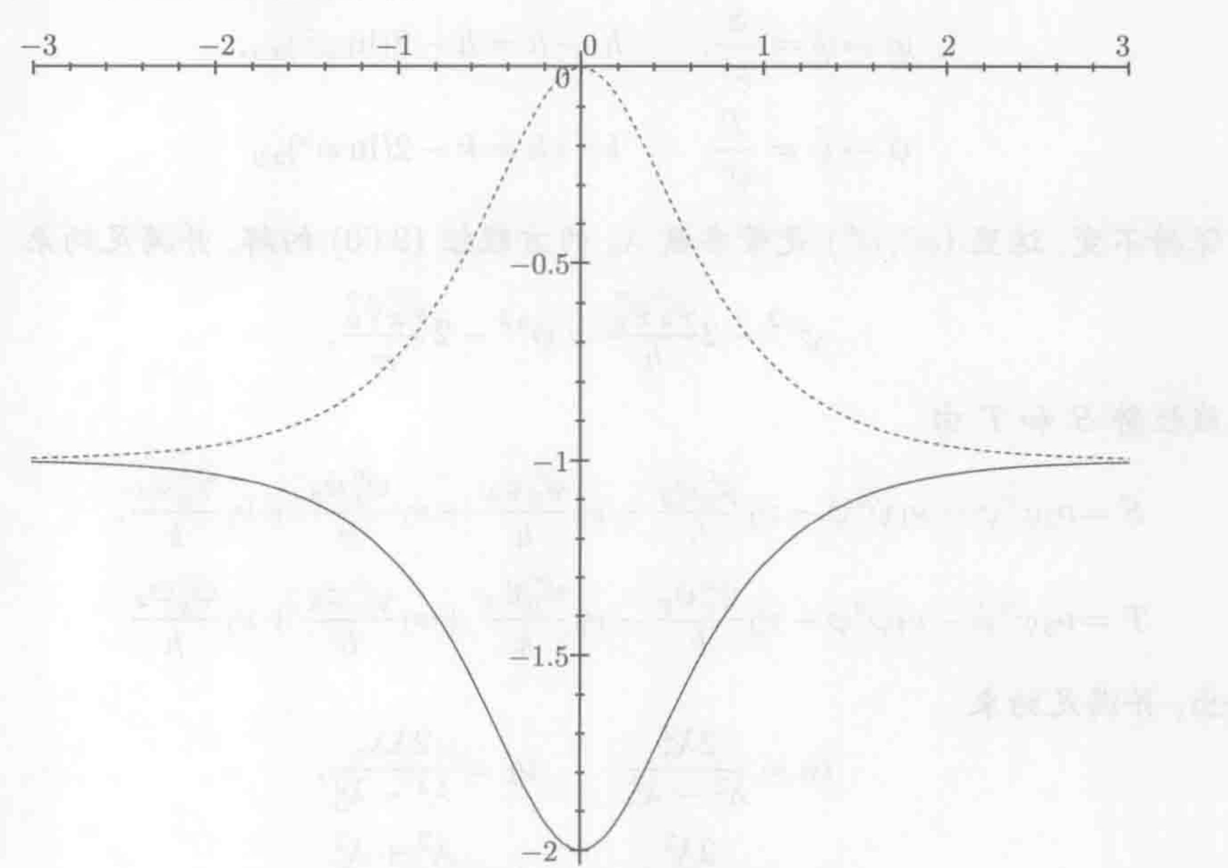
而 Demoulin 方程组的新解为

$$\tilde{h} = 1 - \frac{1}{2}\frac{1}{\cosh^2\gamma_1}, \quad \tilde{k} = 1 + \frac{1}{2}\frac{1}{\sinh^2\gamma_1}. \tag{9.131}$$

这组解包含典型的 sech^2 型孤立子 ($\tilde{h}$) 和 “奇性孤立子” ($\tilde{k}$). 但是, Demoulin 曲面的 Gauss-Weingarten 方程中有几何意义的量应该是无奇性的. 例如, $\tilde{p} = -1/\tilde{k}$ 和 $\tilde{q} = -1/\tilde{h}$ 具有简单的形式

$$\tilde{p} = -1 + \frac{1}{\cosh 2\gamma_1}, \quad \tilde{q} = -1 - \frac{1}{\cosh 2\gamma_1}. \tag{9.132}$$

这些见图 9.1, 其中自变量是 γ_1.



与种子解 $p = q = -1$, $V = W = 0$ 相对应的 Gauss-Weingarten 方程组 (9.8) 成为

$$\boldsymbol{r}_{xx} = -\boldsymbol{r}_y, \quad \boldsymbol{r}_{yy} = -\boldsymbol{r}_x, \tag{9.133}$$

除了可相差一个由非退化常值矩阵产生的线性变换外, 种子曲面 Σ 的位置向量为

$$\boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ e^{-(x+y)} \\ e^{(x+y)/2}\cos\gamma_3 \\ e^{(x+y)/2}\sin\gamma_3 \end{pmatrix}, \quad \gamma_3 = \frac{\sqrt{3}}{2}(x-y). \tag{9.134}$$

即使特征函数 φ° 和 ψ° 是复的, 但由 $\tilde{p}$ 和 $\tilde{q}$ 的实性, 可以将 (9.114) 给出的位置向量 $\tilde{\boldsymbol{r}}$ 按实部和虚部分解, 从而用射影极小曲面的 Bäcklund 变换给出一类实的 Demoulin 曲面. 于是, 单参数族 Demoulin 曲面 $\tilde{\Sigma}(\kappa)$ $(\kappa \neq 1)$ 的实位置向量为

$$\tilde{\boldsymbol{r}} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} \kappa^3\cosh\gamma_1 - \sinh\gamma_1 \\ e^{-(x+y)}s \\ e^{(x+y)/2}[s\sin\gamma_3 + \sqrt{3}\,t\cos\gamma_3] \\ e^{(x+y)/2}[s\cos\gamma_3 - \sqrt{3}\,t\sin\gamma_3] \end{pmatrix}, \tag{9.135}$$

$$s = \kappa\cosh\gamma_1 + \sinh\gamma_1, \quad t = \kappa\cosh\gamma_1 - \sinh\gamma_1,$$

这里可相差一个任意的线性变换. 对 $\kappa = 1$, $\tilde{r}^0$ 和 $\tilde{r}^1$ 的分量相同, 为了得到第四个线性无关的分量, $\tilde{r}^1$ 必须换为

$$\lim_{\kappa\to 1}\frac{\tilde{r}^1 - \tilde{r}^0}{\kappa - 1}, \tag{9.136}$$

用 l'Hôpital 法则得到位置向量

$$\tilde{\boldsymbol{r}} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} e^{-\gamma_1} \\ e^{-\gamma_1}\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\gamma_3 + (e^{-\gamma_1} - 3e^{\gamma_1})\cosh\gamma_1\right) \\ e^{2\gamma_1}\sin\gamma_3 + \sqrt{3}\cos\gamma_3 \\ e^{2\gamma_1}\cos\gamma_3 - \sqrt{3}\sin\gamma_3 \end{pmatrix}, \tag{9.137}$$

所以曲面 $\tilde{\hat{\Sigma}} \subset \mathbb{R}^3$ 可表示为

$$\tilde{\hat{\boldsymbol{r}}} = \begin{pmatrix} \dfrac{2}{\sqrt{3}}\gamma_3 + (e^{-\gamma_1} - 3e^{\gamma_1})\cosh\gamma_1 \\ e^{3\gamma_1}\sin\gamma_3 + \sqrt{3}\,e^{\gamma_1}\cos\gamma_3 \\ e^{3\gamma_1}\cos\gamma_3 - \sqrt{3}\,e^{\gamma_1}\sin\gamma_3 \end{pmatrix}. \tag{9.138}$$

曲面 $\tilde{\tilde{\Sigma}}$ 的上述参数表示表明它是螺旋面, 由曲线 $\tilde{\tilde{\boldsymbol{r}}}=\tilde{\tilde{\boldsymbol{r}}}\,(\gamma_1,\gamma_3=0)$ 在空间匀速旋转和平移得到. 图 9.2 表示的是 "静态单孤立子" Demoulin 曲面 $\tilde{\tilde{\Sigma}}$, 参数为 γ_1 和 γ_3.

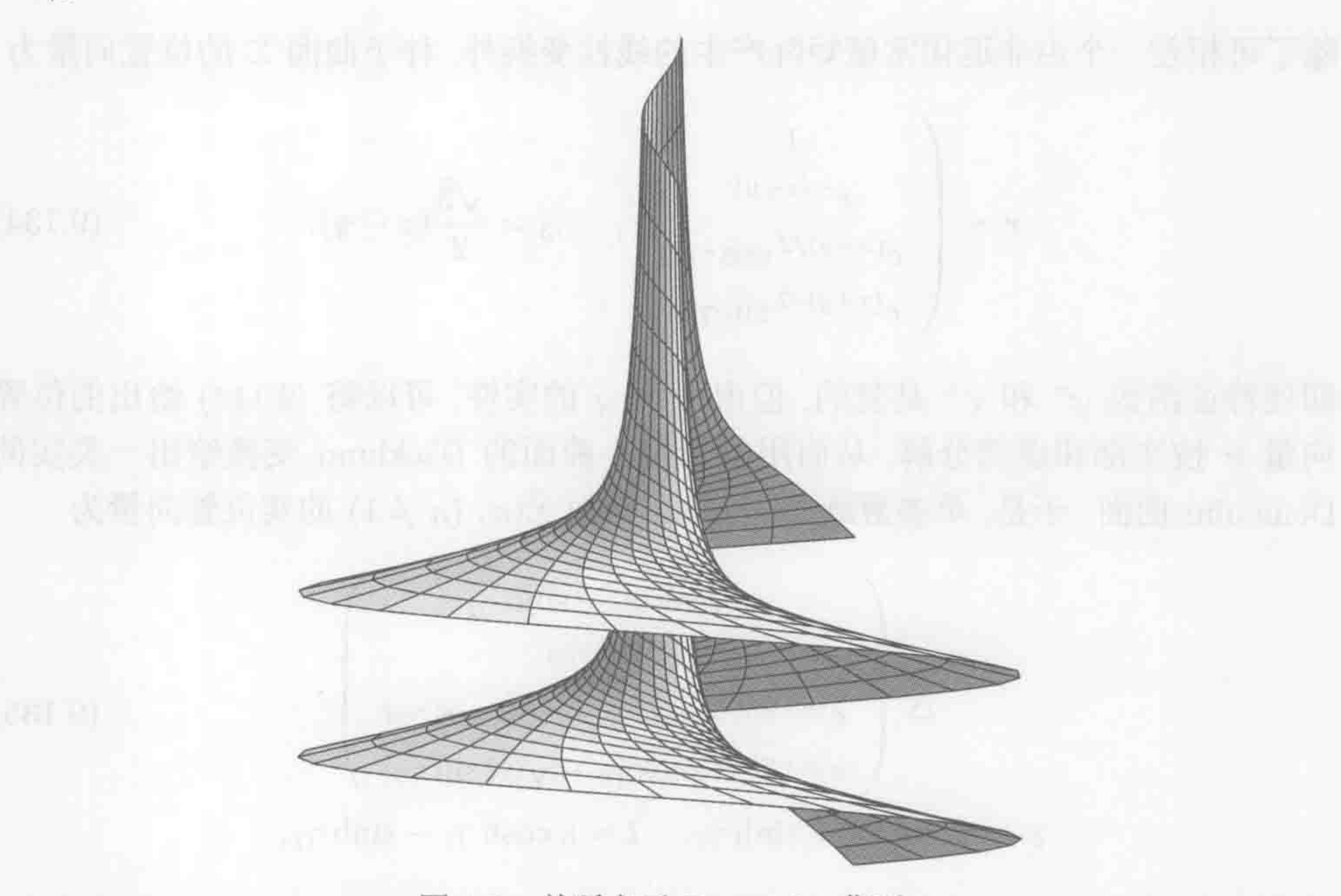


图 9.2　单孤立子 Demoulin 曲面

9.7　等温渐近曲面和静态 mNVN 方程

9.2 节中已经知道, Tzitzeica 曲面在约束

$$p=q \tag{9.139}$$

下是射影极小曲面, 上述条件在射影几何中定义了等温渐近曲面. 这个名字是由 Fubini 给出的[143], 反映了与这个曲面相联系的 Darboux 三次型 (9.15) 简化为

$$p\,(\mathrm{d}x^3+\mathrm{d}y^3). \tag{9.140}$$

一个重要的性质是, 等温渐近曲面的 Gauss-Mainardi-Codazzi 方程组是可积的[129]. 这里将给出等温渐近曲面的 Gauss-Weingarten 方程组和静态变形 *Nizhnik-Veselov-Novikov* (mNVN) 方程的标准线性表示的联系, 并如同 Ferapontov 所做的[129], 用变为 *Nizhnik-Veselov-Novikov* (NVN) 方程的 Miura 型变换的几何解释予以说明. 进一步, 将 NVN 和 mNVN 方程著名的 Darboux 型变换用渐近坐标下曲面的 Bäcklund 变换来解释 (参见第 1 章).

9.7.1 静态 mNVN 方程

容易看到, $sl(2)$ 线性方程组 (9.31) 表示射影微分几何中用 Wilczynski 四面体 $(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{\eta})$ 描述的曲面的 Gauss-Weingarten 方程组 (9.31). 如果我们将 (9.21) 式看作为 α 和 β 的定义, 不过现在与 x, y 有关, 再按 $(9.23)_{1,3}$ 式引入函数 A 和 B, 那么在射影 Gauss-Mainardi-Codazzi 方程 (9.9) 成立时 (9.31) 式是相容的. 特别地, 在等温渐近曲面情形, 相容性条件给出

$$\boxed{\begin{gathered} p_{yyy} - 2p_y W - pW_y = p_{xxx} - 2p_x V - pV_x, \\ W_x = 3pp_y, \\ V_y = 3pp_x, \end{gathered}} \tag{9.141}$$

它就是 mNVN 方程[47]

$$\begin{gathered} p_t = p_{xxx} - 2p_x V - pV_x - p_{yyy} + 2p_y W + pW_y, \\ W_x = 3pp_y, \quad V_y = 3pp_x \end{gathered} \tag{9.142}$$

的静态情况. mNVN 方程是 mKdV 方程 (取 $p = p(x-y, t)$)

$$p_t = 2p_{xxx} + 12p^2 p_x \tag{9.143}$$

的可积 2+1 维推广.

一般地, 由 (9.42), (9.43) 式中的 $sl(4)$–$so(3,3)$ 同构知道, 在射影 Gauss-Mainardi-Codazzi 方程组 (9.9) 成立时, $so(3,3)$ 线性表示 (9.47) 也是相容的. 在 $p = q$ 的特殊情形, 分量 $\phi^1, \phi^2, \phi^5, \phi^6$ 可以用

$$\phi^3 = \bar{\psi}, \quad \phi^4 = \bar{\varphi} \tag{9.144}$$

表示为

$$\begin{aligned} \phi^1 &= -\bar{\psi}_{yy} + \frac{p_y}{p}\bar{\psi}_y + \left[W - \frac{1}{2}\left(\frac{p_y}{p}\right)^2\right]\bar{\psi}, \quad \phi^2 = -\bar{\psi}_y + \frac{p_y}{p}\bar{\psi}, \\ \phi^6 &= -\bar{\varphi}_{xx} + \frac{p_x}{p}\bar{\varphi}_x + \left[V - \frac{1}{2}\left(\frac{p_x}{p}\right)^2\right]\bar{\varphi}, \quad \phi^5 = -\bar{\varphi}_x + \frac{p_x}{p}\bar{\varphi}, \end{aligned} \tag{9.145}$$

从而静态 mNVN 方程的 $so(3,3)$ 线性表示成为

$$\begin{aligned} \bar{\varphi}_y &= p\bar{\psi}, \qquad \bar{\varphi}_{xxx} = \bar{\varphi}_{yyy} + 2V\bar{\varphi}_x + V_x\bar{\varphi} - 3p_y\bar{\psi}_y - 2pW\bar{\psi}, \\ \bar{\psi}_x &= p\bar{\varphi}, \qquad \bar{\psi}_{yyy} = \bar{\psi}_{xxx} + 2W\bar{\psi}_y + W_y\bar{\psi} - 3p_x\bar{\varphi}_x - 2pV\bar{\varphi} \end{aligned} \tag{9.146}$$

这个线性表示就是 mNVN 方程的线性表示

$$
\begin{aligned}
\bar{\varphi}_y &= p\bar{\psi},\\
\bar{\psi}_x &= p\bar{\varphi},\\
\bar{\varphi}_t &= \bar{\varphi}_{xxx} - \bar{\varphi}_{yyy} - 2V\bar{\varphi}_x - V_x\bar{\varphi} + 3p_y\bar{\psi}_y + 2pW\bar{\psi},\\
-\bar{\psi}_t &= \bar{\psi}_{yyy} - \bar{\psi}_{xxx} - 2W\bar{\psi}_y - W_y\bar{\psi} + 3p_x\bar{\varphi}_x + 2pV\bar{\varphi}
\end{aligned}
\tag{9.147}
$$

的静态约化. 令

$$
\bar{\varphi}(x,y,t) = e^{\lambda t}\bar{\varphi}(x,y), \quad \bar{\psi}(x,y,t) = e^{\lambda t}\bar{\psi}(x,y), \tag{9.148}
$$

就可以得到静态 mNVN 方程的带一个任意参数的线性表示

$$
\begin{aligned}
\bar{\varphi}_y &= p\bar{\psi},\\
\bar{\psi}_x &= p\bar{\varphi},\\
\lambda\bar{\varphi} &= \bar{\varphi}_{xxx} - \bar{\varphi}_{yyy} - 2V\bar{\varphi}_x - V_x\bar{\varphi} + 3p_y\bar{\psi}_y + 2pW\bar{\psi},\\
-\lambda\bar{\psi} &= \bar{\psi}_{yyy} - \bar{\psi}_{xxx} - 2W\bar{\psi}_y - W_y\bar{\psi} + 3p_x\bar{\varphi}_x + 2pV\bar{\varphi}.
\end{aligned}
\tag{9.149}
$$

当 $\lambda = 0$ 时就是有几何意义的 (9.146) 式.

至此, 用射影空间 $\mathbb{P}^5$ 中的等温渐近曲面对静态 mNVN 方程标准的线性表示给出了几何解释. 但是, 还可以将等温渐近曲面 Σ 看作欧氏空间 $\mathbb{R}^3$ 中的曲面 $\hat{\Sigma}$, 相关的联系见下一小节.

9.7.2 静态 NVN 方程

等温渐近曲面 Σ 的 Gauss-Weingarten 方程组是

$$
\boldsymbol{r}_{xx} = p\boldsymbol{r}_y + \frac{1}{2}(V - p_y)\boldsymbol{r}, \quad \boldsymbol{r}_{yy} = p\boldsymbol{r}_x + \frac{1}{2}(W - p_x)\boldsymbol{r}. \tag{9.150}
$$

如果 r^0 是对应的标量解, 那么 “等温渐近” 曲面 $\hat{\Sigma} \subset \mathbb{R}^3$ 的位置向量 $\hat{\boldsymbol{r}}$ 满足线性方程组

$$
\hat{\boldsymbol{r}}_{xx} = a\hat{\boldsymbol{r}}_x + p\hat{\boldsymbol{r}}_y, \quad \hat{\boldsymbol{r}}_{yy} = b\hat{\boldsymbol{r}}_y + p\hat{\boldsymbol{r}}_x, \tag{9.151}
$$

其中 $a = -2(\ln r^0)_x$, $b = -2(\ln r^0)_y$. 反之, 对适当选取的函数 a, b, p, 方程组 (9.151) 的任一向量值解 $\hat{\boldsymbol{r}}$ 定义了一个等温渐近曲面 $\Sigma \subset \mathbb{P}^3$.

由方程组 (9.151) 的相容性条件得

$$
\begin{aligned}
&\left(p_x + ap + \frac{1}{2}b^2 - b_y\right)_x = 3pp_y,\\
&\left(p_y + bp + \frac{1}{2}a^2 - a_x\right)_y = 3pp_x,
\end{aligned}
\qquad a_y = b_x. \tag{9.152}
$$

对此方程组的一个解 (a, b, p), 令

$$W = p_x + ap + \frac{1}{2}b^2 - b_y, \quad V = p_y + bp + \frac{1}{2}a^2 - a_x, \tag{9.153}$$

从而 $(9.152)_{1,3}$ 式给出

$$W_x = 3pp_y, \quad V_y = 3pp_x. \tag{9.154}$$

由 $(9.152)_2$ 式可知, 存在函数 r^0 使得

$$a = -2(\ln r^0)_x, \quad b = -2(\ln r^0)_y. \tag{9.155}$$

代入 (9.153) 式给出线性方程组

$$r^0_{xx} = pr^0_y + \frac{1}{2}(V - p_y)r^0, \quad r^0_{yy} = pr^0_x + \frac{1}{2}(W - p_x)r^0, \tag{9.156}$$

它同等温渐近曲面的 Gauss-Weingarten 方程组有相同的形式. 于是, 它的相容性条件给出

$$p_{yyy} - 2p_yW - pW_y = p_{xxx} - 2p_xV - pV_x. \tag{9.157}$$

这样, 重新得到了等温渐近曲面的 Gauss-Mainardi-Codazzi 方程组, 并且可以合理地将 $\hat{\boldsymbol{r}}$ 看作等温渐近曲面 $\hat{\Sigma} \subset \mathbb{R}^3$ 的位置向量.

由于曲面 $\hat{\Sigma}$ 上取了渐近坐标, 我们可以应用 Lelieuvre 公式

$$\hat{\boldsymbol{r}}_x = \boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{\nu}_x, \quad \hat{\boldsymbol{r}}_y = \boldsymbol{\nu}_y \times \boldsymbol{\nu}, \tag{9.158}$$

它联系着 $\hat{\Sigma}$ 的位置向量 $\hat{\boldsymbol{r}}$ 和它的标准化的余法向量 $\boldsymbol{\nu}$. 余法向量满足 Moutard 方程 (参见第 1 章). 将 (9.158) 式给出的 $\hat{\boldsymbol{r}}_x$ 和 $\hat{\boldsymbol{r}}_y$ 代入 Gauss-Weingarten 方程组 (9.151) 得到, 二阶导数 $\boldsymbol{\nu}_{xx}$ 和 $\boldsymbol{\nu}_{yy}$ 除了 $\boldsymbol{\nu}$ 方向的分量外可类似确定. 所以, 存在函数 f, g, u 使得余法向量满足

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\nu}_{xx} &= a\boldsymbol{\nu}_x - p\boldsymbol{\nu}_y + f\boldsymbol{\nu}, \\ \boldsymbol{\nu}_{xy} &= u\boldsymbol{\nu}, \\ \boldsymbol{\nu}_{yy} &= b\boldsymbol{\nu}_y - p\boldsymbol{\nu}_x + g\boldsymbol{\nu}. \end{aligned} \tag{9.159}$$

它的相容性条件是

$$\begin{aligned} u &= p^2 + a_y, & u &= p^2 + b_x, \\ f &= p_y + bp, & g &= p_x + ap, \\ u_x &= f_y - pg + au, & u_y &= g_x - pf + bu. \end{aligned} \tag{9.160}$$

前两式中的任一式定义了 u, 其中成立 $a_y = b_x$. $(9.160)_{3,4}$ 式定义了函数 f 和 g, 而剩下的方程与 $(9.152)_{1,3}$ 形式相同. 于是, 线性方程组 (9.159) 相容当且仅当它的

系数以等温渐近曲面的 Gauss-Mainardi-Codazzi 方程组的解参数化. 这样, 方程组 (9.159) 的任一向量值解 $\boldsymbol{\nu}$ 由 Lelieuvre 公式 (9.158) 唯一决定了等温渐近曲面 $\hat{\Sigma}$.

对线性方程组 (9.159) 求导得到方程组

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\nu}_{xxx} - 3v\boldsymbol{\nu}_x = &\ \boldsymbol{\nu}_{yyy} - 3w\boldsymbol{\nu}_y, \\ \boldsymbol{\nu}_{xy} = &\ u\boldsymbol{\nu}, \end{aligned} \tag{9.161}$$

其中

$$v = \frac{2}{3}V + a_x, \quad w = \frac{2}{3}W + b_y. \tag{9.162}$$

(9.161) 式的相容性条件给出静态 NVN 方程[276, 371]

$$\boxed{\begin{aligned} u_{xxx} - 3(vu)_x = u_{yyy} - 3(wu)_y, \\ w_x = u_y, \\ v_y = u_x, \end{aligned}} \tag{9.163}$$

而

$$\begin{aligned} u_t = u_{xxx} - 3(vu)_x - u_{yyy} + 3(wu)_y, \\ w_x = u_y, \quad v_y = u_x \end{aligned} \tag{9.164}$$

就是 2+1 维的 NVN 方程. NVN 方程的形为 $u = u(x-y,t)$ 的解满足 KdV 方程

$$u_t = 2u_{xxx} + 12uu_x. \tag{9.165}$$

NVN 方程存在具有相干结构的解 (dromions), 对于固定的 “时间” t, 解在任意方向都指数地趋于零[20]. Boiti 等最早用二元 Darboux 变换对 Davey-Stewartson I 方程得到了 dromion[49], 而二元 Darboux 变换无论在结构上还是形式上都是经典的基本变换.

令

$$\phi(x,y,t) = e^{\lambda t}\phi(x,y), \tag{9.166}$$

则 NVN 方程的标准 Lax 对

$$\begin{aligned} \phi_t = \phi_{xxx} - 3v\phi_x - \phi_{yyy} + 3w\phi_y, \\ \phi_{xy} = u\phi \end{aligned} \tag{9.167}$$

约化为静态 NVN 方程的 Lax 对, 从而方程组 (9.161) 可以看作

$$\lambda\phi = \phi_{xxx} - 3v\phi_x - \phi_{yyy} + 3w\phi_y, \tag{9.168}$$

在 $\lambda = 0$ 时的向量形式. 于是, 等温渐近曲面 $\hat{\Sigma}$ 的余法向量 $\boldsymbol{\nu}$ 自然联系于静态 NVN 方程, 而位置向量 $\hat{r}$ 联系于静态 mNVN 方程. 这个几何事实包含于下列定理中[129], 并可以看作 mKdV 和 KdV 方程

$$p_t = p_{xxx} - 6p^2 p_x, \quad u_t = u_{xxx} - 6uu_x \tag{9.169}$$

之间的 Miura 变换

$$u = p^2 + p_x \tag{9.170}$$

的类比.

定理 46 (静态 mNVN 方程和 NVN 方程的联系) *设 (p, V, W) 是静态 NVN 方程 (9.141) 的解, r^0 是线性方程组 (9.156) 的对应解, 那么*

$$\begin{aligned} u &= p^2 - 2(\ln r^0)_{xy}, \\ v &= \frac{2}{3}V - 2(\ln r^0)_{xx}, \\ w &= \frac{2}{3}W - 2(\ln r^0)_{yy} \end{aligned} \tag{9.171}$$

满足静态 NVN 方程 (9.163).

证明 将 (9.155) 式代入 $(9.160)_1$ 式和 (9.162) 式就得到变换 (9.171). □

在线性层次上, 上述联系可以如下建立. 设 ϕ 是与静态 NVN 方程对应的特征函数, 即为 Lax 对 (9.168) 的解. 即使 ϕ 是 Moutard 方程 $(9.159)_2$ 的解, ϕ 也不满足线性方程组 (9.159) 中剩下的两个方程. 为此, 引入函数 $\bar{\varphi}$ 和 $\bar{\psi}$, 使得

$$\begin{aligned} \phi_{xx} &= a\phi_x - p\phi_y + f\phi + \bar{\varphi}, \\ \phi_{xy} &= u\phi, \\ \phi_{yy} &= b\phi_y - p\phi_x + g\phi + \bar{\psi}. \end{aligned} \tag{9.172}$$

当 $\bar{\varphi} = \bar{\psi} = 0$ 时, 上述方程组是相容的, 因此方程组 (9.172) 的相容性条件给出了 $\bar{\varphi}$ 和 $\bar{\psi}$ 满足的线性齐次方程. 事实上, 与 $\bar{\varphi}$ 和 $\bar{\psi}$ 有关的项给出

$$\bar{\varphi}_y = p\bar{\psi}, \quad \bar{\psi}_x = p\bar{\varphi}, \tag{9.173}$$

它同静态 mNVN 方程的 "散射问题" $(9.149)_{1,2}$ 一致. 三阶方程 $(9.168)_1$ 可以写为

$$\lambda\phi = \bar{\varphi}_x + a\bar{\varphi} - \bar{\psi}_y - b\bar{\psi}. \tag{9.174}$$

从中解出 ϕ 就可以看出 Moutard 方程 (9.172) 是成立的. 而 (9.172) 式成为

$$\begin{aligned}\lambda\bar{\varphi} &= \bar{\varphi}_{xxx} - \bar{\varphi}_{yyy} - 2V\bar{\varphi}_x - V_x\bar{\varphi} + 3p_y\bar{\psi}_y + 2pW\bar{\psi},\\ -\lambda\bar{\psi} &= \bar{\psi}_{yyy} - \bar{\psi}_{xxx} - 2W\bar{\psi}_y - W_y\bar{\psi} + 3p_x\bar{\varphi}_x + 2pV\bar{\varphi}.\end{aligned} \tag{9.175}$$

这样, 就重新得到了 mNVN 方程的线性表示 (9.149). 下节中, 将用 NVN 方程和 mNVN 方程的线性表示的这个联系大大简化等温渐近曲面的 Bäcklund 变换的解析形式.

练　习

1. 证明在对函数 α, β, A, B 作适当的解释时, 只要射影微分几何的 Gauss-Mainardi-Codazzi 方程组成立, 则 $sl(2)$ 和 $so(3,3)$ 线性表示 (9.31) 和 (9.47) 就是相容的.

2. 证明由 (9.172) 式定义的 $\bar{\varphi}$ 和 $\bar{\psi}$ 是静态 mNVN 方程的特征函数, 即它们满足线性表示 (9.149).

3. 证明由射影 Gauss-Weingarten 方程组 (9.151) 和 (9.155) 式可导出

$$|\hat{\boldsymbol{r}}_x, \hat{\boldsymbol{r}}_y, \hat{\boldsymbol{r}}_{xy}| = \frac{c}{(\boldsymbol{r}^0)^4},$$

从而 $\hat{\boldsymbol{r}}$ 可以标准化, 使得 $c = 1$. 在此情形, 证明

$$\boldsymbol{\nu} = (\boldsymbol{r}^0)^2\,\hat{\boldsymbol{r}}_x \times \hat{\boldsymbol{r}}_y$$

满足 Lelieuvre 公式 (9.158).

9.8 等温渐近曲面的 Bäcklund 变换

作为构造等温渐近曲面的 Bäcklund 变换的出发点, 我们首先基于 $so(3,3)$ 线性表示 (9.149) 构造静态 mNVN 方程的一个不变量, 然后用 Plücker 对应以纯代数方法得到种子等温渐近曲面 Σ 到第二个等温渐近曲面 Σ' 的映射. 不过, 这里用上节给出的过程将 $so(3,3)$ 线性表示的不变量直接联系于余法向量满足的线性方程组的不变量. 最后, 用 Lelieuvre 公式给出曲面层次上的 Bäcklund 变换.

9.8.1 mNVN 方程的不变性

二维可积系统的 Bäcklund 变换有时可以通过包含它的三维系统的 Bäcklund 变换的约化容易地得到. 这个方法明显反映了形为 (9.98) 的双线性势的来源. 这里, 用非静态的 mNVN 方程的 Bäcklund 变换构造静态 mNVN 方程的 Bäcklund 变换. 这揭示了同经典的基本变换的联系.

设 $(\bar{\varphi},\bar{\psi})$ 和 $(\varphi^\circ,\psi^\circ)$ 是 mNVN 方程的两对特征函数, 它们满足线性表示 (9.147). 双线性势 M 和 M° 由相容的方程组

$$M_x = \varphi^\circ\bar{\varphi}, \quad M_y = \psi^\circ\bar{\psi} \tag{9.176}$$

和

$$M_x^\circ = \varphi^{\circ 2}, \quad M_y^\circ = \psi^{\circ 2} \tag{9.177}$$

所定义. 简单的计算给出 $\bar{\varphi}'$ 和 $\bar{\psi}'$ 为

$$\bar{\varphi}' = \bar{\varphi} - \varphi^\circ\frac{M}{M^\circ}, \quad \bar{\psi}' = \bar{\psi} - \psi^\circ\frac{M}{M^\circ}, \tag{9.178}$$

它们满足带撇的散射问题 $(9.147)_{1,2}$, 其中

$$p' = p - \frac{\varphi^\circ\psi^\circ}{M^\circ}. \tag{9.179}$$

为了证明完整的线性表示 (9.147) 在上述变换下的不变性, 需要加入双线性势 M 和 M° 所满足的相容的时间演化. 对于一大类 2+1 维可积系统, 这可利用拟微分算子以纯代数的方法得到[281]. 在此, 我们有

$$\begin{aligned} M_t = &\varphi^\circ_{xx}\bar{\varphi} + \varphi^\circ\bar{\varphi}_{xx} - \varphi^\circ_x\bar{\varphi}_x - 2V\varphi^\circ\bar{\varphi} \\ &-\psi^\circ_{yy}\bar{\psi} - \psi^\circ\bar{\psi}_{yy} + \psi^\circ_y\bar{\psi}_y + 2W\psi^\circ\bar{\psi} \end{aligned} \tag{9.180}$$

以及

$$M_t^\circ = 2\varphi^\circ_{xx}\varphi^\circ - \varphi_x^{\circ 2} - 2V\varphi^{\circ 2} - 2\psi^\circ_{yy}\psi^\circ + \psi_y^{\circ 2} + 2W\psi^{\circ 2}. \tag{9.181}$$

当 mNVN 方程的线性表示成立时, M 和 M° 的相容性条件满足. 将变换 (9.178) 代入带撇的 $(9.147)_{3,4}$ 式得到

$$W' = W - \frac{3}{2}(\ln M^\circ)_{yy}, \quad V' = V - \frac{3}{2}(\ln M^\circ)_{xx}. \tag{9.182}$$

另外, 注意到由 (9.179) 式可得

$$p'^2 = p^2 - (\ln M^\circ)_{xy}. \tag{9.183}$$

由上述构造, W', V', p' 是 mNVN 方程的另一个解.

静态 mNVN 方程及其线性表示的 Bäcklund 变换可以通过取特殊的特征函数和双线性势

$$\begin{aligned} &\bar{\varphi}(x,y,t) = e^{\lambda t}\bar{\varphi}(x,y), && \varphi^\circ(x,y,t) = e^{\lambda_\circ t}\varphi^\circ(x,y), \\ &\bar{\psi}(x,y,t) = e^{\lambda t}\bar{\psi}(x,y), && \psi^\circ(x,y,t) = e^{\lambda_\circ t}\psi^\circ(x,y), \\ &M(x,y,t) = e^{(\lambda+\lambda_\circ)t}M(x,y) && M^\circ(x,y,t) = e^{2\lambda_\circ t}M^\circ(x,y) \end{aligned} \tag{9.184}$$

得到. 因此, 时间演化 (9.180) 和 (9.181) 给出了 M 和 M° 的显式表示

定理 47 (mNVN 方程的线性表示的不变性) 设 (p, W, V) 是静态 mNVN 方程的解, $(\bar{\varphi}, \bar{\psi})$, $(\varphi^\circ, \psi^\circ)$ 是对应的特征函数, 分别满足带参数 λ 和 $\lambda_\circ$ 的线性表示 (9.149), 那么

$$p' = p - \frac{\varphi^\circ \psi^\circ}{M^\circ},$$

$$W' = W - \frac{3}{2}(\ln M^\circ)_{yy}, \tag{9.185}$$

$$V' = V - \frac{3}{2}(\ln M^\circ)_{xx}$$

是静态 mNVN 方程的第二个解, 相应的特征函数对为

$$\bar{\varphi}' = \bar{\varphi} - \varphi^\circ \frac{M}{M^\circ}, \quad \bar{\psi}' = \bar{\psi} - \psi^\circ \frac{M}{M^\circ}, \tag{9.186}$$

其中双线性势满足

$$\begin{aligned}(\lambda + \lambda_\circ)M = {} & \varphi^\circ_{xx}\bar{\varphi} + \varphi^\circ \bar{\varphi}_{xx} - \varphi^\circ_x \bar{\varphi}_x - 2V\varphi^\circ \bar{\varphi} \\ & - \psi^\circ_{yy}\bar{\psi} - \psi^\circ \bar{\psi}_{yy} + \psi^\circ_y \bar{\psi}_y + 2W\psi^\circ \bar{\psi} \\ \lambda_\circ M^\circ = {} & \varphi^\circ_{xx}\varphi^\circ - \frac{1}{2}\varphi^{\circ 2}_x - V\varphi^{\circ 2} - \psi^\circ_{yy}\psi^\circ + \frac{1}{2}\psi^{\circ 2}_y + W\psi^{\circ 2}.\end{aligned} \tag{9.187}$$

当 $\lambda = 0$ 时就得到等温渐近曲面的 $so(3,3)$ 线性表示的不变性.

9.8.2 NVN 方程的不变性和等温渐近曲面的 Bäcklund 变换

现在可以解由 Plücker 对应给出的二次方程组, 以得到定理 47 给出的变换在等温渐近曲面上的作用. 这里利用静态 mNVN 方程和静态 NVN 方程的联系来得到等温渐近曲面的 Bäcklund 变换的重要几何特性. 为此, 回忆第 1 章中关于取渐近坐标的两个曲面 $\hat{\Sigma}$ 和 $\hat{\Sigma}'$ 之间的关系

$$\hat{\boldsymbol{r}}' = \hat{\boldsymbol{r}} + \boldsymbol{\nu}' \times \boldsymbol{\nu}, \quad \boldsymbol{\nu}' = \frac{\boldsymbol{S}}{\phi^\circ}, \tag{9.188}$$

其中余法向量 $\boldsymbol{\nu}$ 和位置向量 $\hat{\boldsymbol{r}}$ 通过 Lelieuvre 公式 (9.158) 相联系, 双线性势 $\boldsymbol{S}$ 满足

$$\boldsymbol{S}_x = \phi^\circ \boldsymbol{\nu}_x - \phi^\circ_x \boldsymbol{\nu}, \quad \boldsymbol{S}_y = \phi^\circ_y \boldsymbol{\nu} - \phi^\circ \boldsymbol{\nu}_y, \tag{9.189}$$

还有 Moutard 方程

$$\boldsymbol{\nu}_{xy} = u\boldsymbol{\nu}, \quad \phi^\circ_{xy} = u\phi^\circ. \tag{9.190}$$

上述变换的一个重要性质是 $\hat{\boldsymbol{r}}' - \hat{\boldsymbol{r}}$ 同曲面 $\hat{\Sigma}$ 和 $\hat{\Sigma}'$ 都相切.

因为 Moutard 方程 (9.190) 是等温渐近曲面 $\hat{\Sigma} \subset \mathbb{R}^3$ 的余法向量 $\boldsymbol{\nu}$ 满足的线性方程组的一部分, 自然要问何时方程组 (9.159) 映为它自己. 首先注意到, 如果 ϕ°

以 t 为参数并满足“时间演化” (9.167), 那么在 (9.161) 式成立时,

$$\begin{aligned}\boldsymbol{S}_t = \ & \phi^\circ\boldsymbol{\nu}_{xxx} - \phi^\circ_{xxx}\boldsymbol{\nu} + \phi^\circ\boldsymbol{\nu}_{yyy} - \phi^\circ_{yyy}\boldsymbol{\nu} \\ & + 2(\phi^\circ_{xx}\boldsymbol{\nu}_x - \phi^\circ_x\boldsymbol{\nu}_{xx}) + 2(\phi^\circ_{yy}\boldsymbol{\nu}_y - \phi^\circ_y\boldsymbol{\nu}_{yy}) \\ & + 3v(\phi^\circ_x\boldsymbol{\nu} - \phi^\circ\boldsymbol{\nu}_x) + 3w(\phi^\circ_y\boldsymbol{\nu} - \phi^\circ\boldsymbol{\nu}_y)\end{aligned} \tag{9.191}$$

同 (9.189) 式是相容的. 进一步, 应用变换 $(9.188)_2$ 得到

$$\begin{gathered}\boldsymbol{\nu}'_t = \boldsymbol{\nu}'_{xxx} - 3v'\boldsymbol{\nu}'_x - \boldsymbol{\nu}'_{yyy} + 3w'\boldsymbol{\nu}'_y, \\ \boldsymbol{\nu}'_{xy} = u'\boldsymbol{\nu}',\end{gathered} \tag{9.192}$$

其中带撇的系数为

$$\begin{aligned}u' &= u - 2(\ln\phi^\circ)_{xy}, \\ v' &= v - 2(\ln\phi^\circ)_{xx}, \\ w' &= w - 2(\ln\phi^\circ)_{yy}.\end{aligned} \tag{9.193}$$

(9.192) 和 (9.193) 式包含了 NVN 方程及其 Lax 对的标准 Bäcklund 变换[20]. 为了说明 $\boldsymbol{\nu}'$ 不依赖于 t, 即它满足有几何意义的线性方程 $(9.161)_1$ 带撇的形式, 令

$$\phi^\circ(x,y,t) = e^{\lambda_\circ t}\phi^\circ(x,y), \quad \boldsymbol{S}(x,y,t) = e^{\lambda_\circ t}\boldsymbol{S}(x,y), \tag{9.194}$$

从而 ϕ° 是静态 NVN 方程的 Lax 对 (9.168) 的解, $\boldsymbol{S}$ 由

$$\begin{aligned}\lambda_\circ\boldsymbol{S} = & \phi^\circ\boldsymbol{\nu}_{xxx} - \phi^\circ_{xxx}\boldsymbol{\nu} + \phi^\circ\boldsymbol{\nu}_{yyy} - \phi^\circ_{yyy}\boldsymbol{\nu} \\ & + 2(\phi^\circ_{xx}\boldsymbol{\nu}_x - \phi^\circ_x\boldsymbol{\nu}_{xx}) + 2(\phi^\circ_{yy}\boldsymbol{\nu}_y - \phi^\circ_y\boldsymbol{\nu}_{yy}) \\ & + 3v(\phi^\circ_x\boldsymbol{\nu} - \phi^\circ\boldsymbol{\nu}_x) + 3w(\phi^\circ_y\boldsymbol{\nu} - \phi^\circ\boldsymbol{\nu}_y)\end{aligned} \tag{9.195}$$

给出. 这时, $\boldsymbol{S}$ 满足 (9.189) 式, 而 (u',v',w') 是静态 NVN 方程的第二个解.

可以直接验证, 如果取形为 (9.195) 式的 $\boldsymbol{S}$, 不但 (9.161) 式而且 (9.159) 式在变换 $(9.188)_2$ 下不变. 为了简化新的系数 p', a', b' (以及 f', g') 的表达式, 我们比较 p' 以及定理 47 给出的对应量. 为此, 引入

$$M^\circ = \varphi^\circ\phi^\circ_x + \psi^\circ\phi^\circ_y - \frac{1}{2}(\varphi^\circ_x + a\varphi^\circ + \psi^\circ_y + b\psi^\circ)\phi^\circ, \tag{9.196}$$

其中 φ° 和 ψ° 是 mNVN 方程的特征函数, 并通过 (9.172) 式同 NVN 方程的特征函数 ϕ° 相联系. 进一步, 对此求导并利用 (9.174) 式得到

$$M^\circ_x = \varphi^{\circ 2}, \quad M^\circ_y = \psi^{\circ 2}. \tag{9.197}$$

这意味着, 在 mNVN 方程的层次上, 变换 (9.186) 和 $(9.188)_2$ 只差一个离散变换 $\boldsymbol{\nu}' \to -\boldsymbol{\nu}'$. 从而有下述定理.

定理 48 (等温渐近曲面的 Bäcklund 变换) 设 $\hat{\boldsymbol{r}}$ 是等温渐近曲面 $\hat{\Sigma}$ 的位置向量, $\boldsymbol{\nu}$ 是相应的余法向量. 那么, 它的 Bäcklund 变换 $\hat{\Sigma}'$ 的位置向量 $\hat{\boldsymbol{r}}'$ 和余法向量 $\boldsymbol{\nu}'$ 由 (9.188) 式给出, 其中双线性势 $\boldsymbol{S}$ 由 (9.195) 式定义, ϕ° 是带参数 $\lambda_\circ$ 的方程组 (9.168) 的解. 如果双线性势 M° 由 (9.196) 式给出, 其中特征函数 φ° 和 ψ° 通过 (9.172) 式同 ϕ° 相联系, 那么 (m)NVN 方程和非线性方程组 (9.152) 的新解为

$$
\begin{aligned}
u' &= u - 2(\ln\phi^\circ)_{xy}, & p' &= -p + \frac{\varphi^\circ\psi^\circ}{M^\circ},\\
v' &= v - 2(\ln\phi^\circ)_{xx}, & V' &= V - \frac{3}{2}(\ln M^\circ)_{xx},\\
w' &= w - 2(\ln\phi^\circ)_{yy}, & W' &= W - \frac{3}{2}(\ln M^\circ)_{yy},\\
a' &= a + \left(\ln\frac{M^\circ}{\phi^{\circ 2}}\right)_x, & b' &= b + \left(\ln\frac{M^\circ}{\phi^{\circ 2}}\right)_y.
\end{aligned}
\tag{9.198}
$$

Bäcklund 变换 $\mathbb{B}:\hat{\Sigma}\to\hat{\Sigma}'$ 具有相切性质, 即 $\hat{\boldsymbol{r}}'-\hat{\boldsymbol{r}}$ 同 $\hat{\Sigma}$ 和 $\hat{\Sigma}'$ 都相切.

将 Bäcklund 变换 $\mathbb{B}$ 重复作用于已知的 (经典) 等温渐近曲面, 如二次曲面、三次曲面、Kummer 四次曲面以及旋转曲面的射影变换上[51, 135, 136, 143, 227], 可以产生大量的等温渐近曲面. Ferapontov 讨论了上述种子曲面所相应的静态 (变形) NVN 方程的解[129]. 孤立子曲面可以通过选取对应于平凡解 $(a,b,p)=$ 常值 的种子曲面得到. 它们所相应的 Bäcklund 变换与第 3 章中讨论过的单孤立子仿射球类似.

练　习

1. 证明由 $(9.188)_2$, (9.189) 和 (9.191) 式给出的 $\boldsymbol{\nu}'$ 满足 Lax 对 (9.192), 从而 (9.193) 式给出 NVN 方程的不变性.

2. 证明 (9.196) 式同定理 47 给出的 M° 的表达式一致.

3. (a) 确定与

$$
u=p=1,\quad f=g=b=a,\quad v=w=\frac{1}{3}a(a+2)
$$

相应的等温渐近曲面.

(b) 确定实常数 α,β,μ 使得

$$
\phi^\circ = e^{\mathrm{i}\alpha(\nu x - y/\nu)}\cosh[\beta(\nu x + y/\nu)]
$$

是带参数 $\lambda_\circ=\mathrm{i}\mu$ 的方程组 (9.168) 的特解, 并证明对应的静态 NVN 方程的解 u' 表示一个实孤立子.

(c) 用定理 48 构造一个实单孤立子等温渐近曲面. 证明当 $\nu=1$ 时所得的曲面是旋转曲面.

附录 A　$su(2)$ 与 $so(3)$ 的同构

在第 2 章中, 描述可积曲面的 3×3 Gauss-Weingarten 方程组与用 Gauss-Mainardi-Codazzi 方程组描写的孤立子方程的 2×2 表示之间变换的基础是 $su(2)$ 与 $so(3)$ 之间的同构. 这个 $su(2)$ 与 $so(3)$ 之间的同构在 Lie 群层次上是 Lie 群 $SU(2)$ 到 Lie 群 $SO(3)$ 的二对一的同态[87]. 这可用于将具有 $SO(3)$ 结构的 Gauss-Weingarten 方程组映射为对应的 $SU(2)$ 值方程. 特别的, 曲面上的标架 $\{\boldsymbol{r}_x, \boldsymbol{r}_y, \boldsymbol{N}\}$ 可以用 $SU(2)$ 矩阵来表示. $SO(3)$ 与 $SU(2)$ 的联系可以如下得到.

记 e_k 为 Lie 代数 $su(2)$ 标准的迹零反对称生成元, 即

$$e_1 = \frac{1}{2\mathrm{i}}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \frac{1}{2\mathrm{i}}\begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \frac{1}{2\mathrm{i}}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{A.1}$$

它们满足交换关系

$$[e_k, e_l] = \epsilon_{kl}{}^m e_m, \tag{A.2}$$

其中 $\epsilon_{kl}{}^m$ 表示标准的 Levi-Civita 置换记号, 并且我们使用了 Einstein 求和约定. 对给定的函数 g^m, 形为

$$\dot{\phi} = g^m e_m \phi \tag{A.3}$$

的线性微分方程有 $SU(2)$ 值的解 ϕ, 即 ϕ 满足 $\phi^\dagger\phi = \mathbb{1}$, $\det\phi = 1$. 于是, 如果

$$\phi \in SU(2), \tag{A.4}$$

则可以定义 3×3 矩阵 Φ, 满足

$$\Phi_{kl} = -2\,\mathrm{Tr}\,(\phi^{-1} e_k \phi e_l). \tag{A.5}$$

将它微分并利用 (A.3) 式得到

$$\begin{aligned}
\dot{\Phi}_{kl} &= -2\,\mathrm{Tr}\,(\phi^{-1}[e_k, \dot{\phi}\phi^{-1}]\phi e_l) \\
&= -2g^m\,\mathrm{Tr}\,(\phi^{-1}[e_k, e_m]\phi e_l) \\
&= -2g^m \epsilon_{km}{}^n\,\mathrm{Tr}\,(\phi^{-1} e_n \phi e_l) \\
&= g^m \epsilon_{km}{}^n \Phi_{nl},
\end{aligned} \tag{A.6}$$

从而有

$$\dot{\Phi} = g^m L_m \Phi, \tag{A.7}$$

其中矩阵 L_m 定义为

即

$$L_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad L_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad L_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{A.9}$$

这给出了 $so(3)$ Lie 代数的伴随表示. L_m 同 $su(2)$ 矩阵 e_m 满足相同的交换关系. 利用

$$-2\,\mathrm{Tr}\,(e_k e_l) = \delta_{kl}, \tag{A.10}$$

其中 δ_{kl} 表示标准的 Kronecker 记号, 矩阵 Φ 的定义 (A.5) 式等价于

$$\phi^{-1} e_k \phi = \sum_m \Phi_{km} e_m, \tag{A.11}$$

从而

$$-2\,\mathrm{Tr}\,(\phi^{-1} e_k e_l \phi) = -2 \sum_{m,n} \Phi_{km} \Phi_{ln}\, \mathrm{Tr}\,(e_m e_n). \tag{A.12}$$

由此得

$$\delta_{kl} = \sum_m \Phi_{km} \Phi_{lm}, \tag{A.13}$$

即

$$\Phi^{\mathrm{T}} \Phi = \mathbb{1}. \tag{A.14}$$

类似可以验证

$$\det \Phi = 1, \tag{A.15}$$

因此

$$\Phi \in SO(3). \tag{A.16}$$

这样, 通过 (A.5) 式, $SU(2)$ 矩阵 ϕ 被映成了 $SO(3)$ 矩阵 Φ. 注意到在变换 $\phi \to -\phi$ 下 Φ 是不变的, 所以这个 $SU(2) \to SO(3)$ 的映射至少是二对一的.

下面证明 $SU(2)$ Lie 群确实是 Lie 群 $SO(3)$ 的 “二重覆盖”. 对任一 $\phi \in SU(2)$, 记

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi_1 & -\bar{\phi}_2 \\ \phi_2 & \bar{\phi}_1 \end{pmatrix}, \quad |\phi_1|^2 + |\phi_2|^2 = 1. \tag{A.17}$$

容易验证相应的矩阵 $\Phi \in SO(3)$ 是

$$\Phi = \begin{pmatrix} \Re(\phi_1^2 - \phi_2^2) & \Im(\phi_1^2 - \phi_2^2) & 2\Re(\phi_1 \bar{\phi}_2) \\ -\Im(\phi_1^2 + \phi_2^2) & \Re(\phi_1^2 + \phi_2^2) & -2\Im(\phi_1 \bar{\phi}_2) \\ -2\Re(\phi_1 \phi_2) & -2\Im(\phi_1 \phi_2) & |\phi_1|^2 - |\phi_2|^2 \end{pmatrix}. \tag{A.18}$$

特别地, 利用 $(\text{A.17})_2$ 式可得

$$\frac{\Phi_{11}+\mathrm{i}\Phi_{21}}{1-\Phi_{31}}=\frac{\bar{\phi}_1-\phi_2}{\phi_1+\bar{\phi}_2},\quad \frac{\Phi_{12}+\mathrm{i}\Phi_{22}}{1-\Phi_{32}}=\frac{\bar{\phi}_1+\mathrm{i}\phi_2}{\bar{\phi}_2-\mathrm{i}\phi_1}. \tag{A.19}$$

反之, 对给定的 $SO(3)$ 矩阵 Φ, 线性方程组 (A.19) 定义了两个复函数 ϕ_1 和 ϕ_2, 它们在允许相差一个相乘的实数下唯一确定, 但其绝对值又由归一化条件 $(\text{A.17})_2$ 决定. 因此, 满足 (A.17) 式的矩阵 $\phi\in SU(2)$ 在允许变换 $\phi\to-\phi$ 下唯一确定.

附录 B　CC-理想

常系数理想 (CC- 理想) 最初被 Harrison[158] 用于构造广义相对论中 Ernst 方程的 Bäcklund 变换. CC- 理想的概念后来被广泛应用于 1+1 维可积系统中 [122, 169, 170, 171, 173, 323, 336, 339], 它同 Wahlquist 和 Estabrook 发展起来的延拓技术[123, 378] 有着密切的联系.

考虑一个无限维 Lie 代数, 并设它有一个忠实的矩阵表示, 满足交换关系

$$[X_i, X_j] = c^k{}_{ij} X_k, \quad c^k{}_{ij} \text{ 为常数} \tag{B.1}$$

以及 Jacobi 恒等式

$$[[X_i, X_j], X_k] + [[X_j, X_k], X_i] + [[X_k, X_i], X_j] = 0. \tag{B.2}$$

如果用结构常数 $c^k{}_{ij}$ 来表示, 上述 Jacobi 恒等式就是

$$c^a{}_{ij} c^b{}_{ak} + c^a{}_{jk} c^b{}_{ai} + c^a{}_{ki} c^b{}_{aj} = 0, \tag{B.3}$$

这里用了 Einstein 求和约定. 与矩阵生成元 X_i 相对应的有对偶 1 形式 ξ^i, 并由此可得 2 形式

$$\omega^k = \mathrm{d}\xi^k - \frac{1}{2} c^k{}_{ij} \xi^i \xi^j. \tag{B.4}$$

这里我们略去了微分形式之间的外积符号. 2 形式 ω^k 生成一个闭的微分理想, 因为

$$\mathrm{d}\omega^k = 0 \bmod \omega^l. \tag{B.5}$$

事实上, 在模去 ω^l 时, 有

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\omega^k &= \mathrm{d}^2\xi^k - \frac{1}{2} c^k{}_{ij} (\mathrm{d}\xi^i \xi^j - \xi^i \, \mathrm{d}\xi^j) \\
&= \frac{1}{2} c^k{}_{ij} c^j{}_{ab} \xi^i \xi^a \xi^b \\
&= \frac{1}{6} (c^k{}_{ij} c^j{}_{ab} + c^k{}_{aj} c^j{}_{bi} + c^k{}_{bj} c^j{}_{ia}) \xi^i \xi^a \xi^b \\
&= 0,
\end{aligned} \tag{B.6}$$

这里用到了 Jacobi 恒等式 (B.3) 以及 $c^k{}_{ji} = -c^k{}_{ij}$. 这保证了方程组 $\omega^k = 0$ 是可积的. 矩阵值 1 形式

(其中 Φ 是矩阵值函数), 在模去 Ω 和 ω^l 时也是闭的, 即在模 Ω 和 ω^l 时,

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\Omega &= -\mathrm{d}^2\Phi + X_i\,\mathrm{d}\xi^i\Phi - X_i\xi^i X_j\xi^j\Phi \\ &= \left(X_k\,\mathrm{d}\xi^k - \frac{1}{2}[X_i, X_j]\xi^i\xi^j\right)\Phi \\ &= \frac{1}{2}(X_k c^k{}_{ij} - [X_i, X_j])\xi^i\xi^j\Phi,\end{aligned} \tag{B.8}$$

从而

$$\mathrm{d}\Omega = 0 \bmod (\Omega, \omega^l). \tag{B.9}$$

因此, 方程 $\Omega = 0$ 也是可积的, 1 形式方程

$$\mathrm{d}\Phi = X_i\xi^i\Phi \tag{B.10}$$

可以看作“CC-理想”[1]

$$\mathrm{d}\xi^k = \frac{1}{2}c^k{}_{ij}\xi^i\xi^j \tag{B.11}$$

的线性表示.

为了从一组 2 形式 ω^k 得到微分方程, 我们需要假设 1 形式 $\xi^i, i \in \mathbb{J} \subset \mathbb{Z}$ 中只有有限个非零, 即

$$\xi^i = 0, \quad i \notin \mathbb{J}. \tag{B.12}$$

这样, 这组 2 形式 ω^k 分为微分部分和代数部分, 即

$$\begin{aligned}\rho^k &= \mathrm{d}\xi^k - \frac{1}{2}c^k{}_{ij}\xi^i\xi^j, \quad i \in \mathbb{J}, \\ \sigma^k &= \qquad -\frac{1}{2}c^k{}_{ij}\xi^i\xi^j, \quad i \notin \mathbb{J}.\end{aligned} \tag{B.13}$$

需要强调的是, 集合 (ρ^k, σ^k) 在外微分下是封闭的, 即 $\mathrm{d}(\rho^k, \sigma^k) = 0 \bmod (\rho^l, \sigma^l)$. 使得 2 形式 ρ^k 和 σ^k 为零的积分流形的最大维数为 Cartan 亏格 g. 于是, 1 形式 ξ^i 可以表示为 g 个线性无关的 1 形式 $\eta^i, i = 1, \cdots, g$ 的线性组合, 即

$$\xi^i = a^i{}_j\eta^j, \quad i \in \mathbb{J}, \tag{B.14}$$

其中函数 $a^i{}_j$ 依赖于积分流形上的坐标. 我们要选取这些函数 $a^i{}_j$ 使得代数 1 形式 σ^k 恒为零. 剩下的条件 $\rho^k = 0$ 成为一组一阶微分方程组, 可能还要耦合一个或几个高阶方程. 根据前面的构造, 在这组非线性微分方程成立时, g 个线性矩阵微分方程 (B.10) 是相容的.

线性无关的 1 形式 η^i 可以通过将 2 形式 ρ^k 用积分流形上坐标微分的正合 1 形式表示来得到. 如果存在多于 g 个正合 1 形式, 那么我们可以任意选取 g 个线性无关的正合 1 形式作为坐标微分, 剩下的正合 1 形式成为势的微分. 通过交换坐标和势, 可以产生具有相同 CC-理想的不同的微分方程.

作为一个例子, 我们考虑 $so(3)$ Lie 代数的圈代数 $so(3)\otimes\mathbb{R}(\lambda,\lambda^{-1})$[186], 它有交换关系

$$[X_i^n, X_j^m] = \epsilon_{ij}{}^k X_k^{n+m}, \tag{B.15}$$

其中 $\epsilon_{ij}{}^k$ 表示标准的 Levi-Civita 置换记号. 相应的矩阵表示为

$$X_i^n = \lambda^n Y_i, \quad \lambda \text{ 为常数}, \tag{B.16}$$

其中矩阵 Y_i 满足 $so(3)$ 交换关系

$$[Y_i, Y_j] = \epsilon_{ij}{}^k Y_k. \tag{B.17}$$

$so(3)$ Lie 代数的表示是附录 A 中讨论过的伴随表示 $Y_i = L_i$ 或 $su(2)$ 的表示 $Y_i = e_i$.

为了建立特殊的 CC-理想, 我们假设非零的 1 形式只有 ξ^1,ξ^2,ξ^3,ξ^4, 它们的对偶生成元分别为

$$X_1 = X_2^0, \quad X_2 = X_3^1, \quad X_3 = X_1^{-1}, \quad X_4 = X_3^{-1}. \tag{B.18}$$

对应的 CC-理想是

$$\begin{aligned} &\mathrm{d}\xi^1 = \xi^2\xi^3, && \xi^1\xi^2 = 0, \\ &\mathrm{d}\xi^2 = 0, && \xi^3\xi^4 = 0, \\ &\mathrm{d}\xi^3 = \xi^1\xi^4, && \\ &\mathrm{d}\xi^4 = \xi^3\xi^1. && \end{aligned} \tag{B.19}$$

现在 Cartan 亏格 $g=2$, 因为这个 CC-理想的代数部分给出

$$\xi^1 = a\xi^2, \quad \xi^3 = b\eta, \quad \xi^4 = c\eta, \tag{B.20}$$

其中 a,b,c 是待定函数, η 是 1 形式. 它的微分部分给出

$$\mathrm{d}\xi^2 = 0, \quad \mathrm{d}\left(\sqrt{b^2+c^2}\,\eta\right) = 0, \quad \mathrm{d}\left(\frac{1}{2}a^2\xi^2 + c\eta\right) = 0, \tag{B.21}$$

这保证了存在全微分

用坐标 x 和 y 表示时, 1 形式 ξ^i 可以写为

$$\xi^1 = a\,\mathrm{d}x, \quad \xi^2 = \mathrm{d}x, \quad \xi^3 = \sin\omega\,\mathrm{d}y, \quad \xi^4 = -\cos\omega\,\mathrm{d}y, \tag{B.23}$$

而 CC- 理想约化为一组微分方程

$$a_y = -\sin\omega, \quad \omega_x = -a. \tag{B.24}$$

所以 CC- 理想 (B.19) 表示经典的 sine-Gordon 方程

$$\omega_{xy} = \sin\omega, \tag{B.25}$$

而由

$$\mathrm{d}z = \frac{1}{2}\omega_x^2\,\mathrm{d}x - \cos\omega\,\mathrm{d}y \tag{B.26}$$

定义的势对应于 "守恒律"

$$(\omega_x^2)_y + (2\cos\omega)_x = 0. \tag{B.27}$$

如果取 y 和 z 为坐标, 那么 x 就是势, 1 形式 ξ^i 可以写为

$$\begin{aligned} \xi^1 &= A(\cos\omega\,\mathrm{d}y + \mathrm{d}z), & \xi^3 &= \sin\omega\,\mathrm{d}y, \\ \xi^2 &= \frac{1}{2}A^2(\cos\omega\,\mathrm{d}y + \mathrm{d}z), & \xi^4 &= -\cos\omega\,\mathrm{d}y, \end{aligned} \tag{B.28}$$

其中 $A = 2/a$. 将它们代入 CC-理想就得到

$$A_y - A_z\cos\omega + \frac{1}{2}A\omega_z\sin\omega = 0, \quad \omega_z = -A, \tag{B.29}$$

或等价的

$$\omega_{yz} = \omega_{zz}\cos\omega - \frac{1}{2}\omega_z^2\sin\omega. \tag{B.30}$$

作反向变换 $(y,z) \to (x,y)$, 其中变量 x 由

$$\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\omega_z^2(\cos\omega\,\mathrm{d}y + \mathrm{d}z) \tag{B.31}$$

决定, 则方程 (B.30) 就成为 sine-Gordon 方程 (B.25), 它与 sine-Gordon 方程有相同的 CC- 理想. 这个 sine-Gordon 方程的变形在文献 [195] 中被独立地建立.

利用矩阵表示 (B.10) 式, sine-Gordon 方程的线性表示可以从 (B.16) 式得到, 这里 λ 起着 "谱参数" 的作用. 例如, 如果取 $su(2)$ 表示

$$X_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \end{pmatrix}, \quad X_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \end{pmatrix}, \quad X_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \end{pmatrix} \tag{B.32}$$

则 sine-Gordon 方程的线性表示为

$$\begin{aligned}\Phi_x &= \frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix} 0 & \omega_x \\ -\omega_x & 0 \end{pmatrix} - \mathrm{i}\lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right]\Phi, \\ \Phi_y &= -\frac{\mathrm{i}}{2\lambda}\begin{pmatrix} -\cos\omega & \sin\omega \\ \sin\omega & \cos\omega \end{pmatrix}\Phi,\end{aligned} \tag{B.33}$$

在变换 $\lambda \to -\lambda$ 下, 它恰好就是标准的 AKNS 表示 (参见第 2 章).

附录 C 传　　记

Albert Victor Bäcklund



出生: 瑞典 Väsby, 1845
去世: 瑞典 Lund, 1922

Bäcklund 在 Lund 大学接受高等教育. 1864 年, 他被任命为天文台的助理, 并成为 Axel Möller 教授的学生. 1868 年获得哲学博士学位, 论文所涉及的是通过天文观察对纬度的测量. 然后他转向几何, 特别是由挪威数学家 Sophus Lie 所开创的工作.

1874 年, Bäcklund 获得政府的资助到欧洲大陆从事六个月的研究. 他大部分时间在莱比锡和 Erlangen, 在那里他遇到了 Klein 和 Lindemann. 后来他在几何中得到 Bäcklund 变换的主要想法就是在此期间产生的.

1878 年, Bäcklund 被任命为 Lund 大学力学与数学物理首席教授. 1888 年, 他当选为瑞典科学院 (KVA) 院士. 1897 年, Bäcklund 被授予 Lund 大学物理学首席教授, 后来担任校长. Bäcklund 于 1910 年退休, 但继续他的学术研究直到去世.

Bäcklund 常常同以他名字命名的变换联系在一起, 而 Bäcklund 变换的推广在孤立子理论中有着重要的影响. Bäcklund 在这方面的工作主要源于他试图推广 Lie 的接触变换理论的想法, 他在 Monge 和 Ampére 开创的特征理论方面也有重要的工作. Goursat 和 Hadamard 将 Bäcklund 看作现代特征理论的奠基者.

参考文献

C.W. Oseen, *Albert Victor Bäcklund*, Year-Book of the Royal Swedish Academy of Sciences [瑞典语] (1924). 德语翻译: *Jahresber. deutsch. Math.-Verein.* **38**, 113-152 (1929).

Gaston Darboux



出生: 法国 Nîmes, 1842
去世: 法国 Paris, 1917

Darboux 于 1861 年进入巴黎高等师范学校 (École Normale Supérieure) 并于 1866 年完成了博士论文“正交曲面”(*Sur Les Surfaces Orthogonales*). 1873 到 1878 年间他在巴黎大学 (Sorbonne) 接替 Liouville 担任理性力学首席教授, 并于 1880 年起继 Chasles 成为高等几何首席教授, 直至去世. 1884 年他成为法国科学院院士, 1902 年当选为伦敦皇家学会会员, 并于 1916 年获得 Sylvester 奖.

Darboux 的主要贡献在几何上, 不过在分析上也有重要的成就. 他在曲面的正交系方面有一系列的工作, 著作有《曲面一般理论讲义》(四卷) (*Leçons sur la théorie générale des surfaces, t.* 1-4) (1887-1896) 和《正交系与曲线坐标讲义》(*Leçons sur les systèmes orthogonaux et les coordonnées curvilignes*) (1898).

参考文献

1. E. Lebon, *Gaston Darboux*, Paris (1910, 1913).

2. L.P. Eisenhart, Darboux's contribution to geometry, *Bull. Amer. Math. Soc.* **24**, 227-237 (1918).

3. D. Hilbert, Gaston Darboux, *Acta Mathematica* **42**, 269-273 (1919).

参考文献

[1] M.J. Ablowitz, D.J. Kaup, A.C. Newell and H. Segur, Nonlinear evolution equations of physical significance, *Phys. Rev. Lett.* **31**, 125-127 (1973).

[2] M.J. Ablowitz, D.J. Kaup, A.C. Newell and H. Segur, The inverse scattering transform-Fourier analysis for nonlinear problems, *Stud. Appl. Math.* **53**, 249-134 (1974).

[3] M.J. Ablowitz and H. Segur, *Solitons and the Inverse Scattering Transform*, SIAM Philadelphia (1981).

[4] J.E. Adkins, A reciprocal property of the finite plane strain equations, *J. Mech. Phys. Solids* **6**, 267-275 (1958).

[5] S.I. Agonov and E.V. Ferapontov, Theory of congruences and systems of conservation laws, *J. Math. Sciences* **94**, 1748-1794 (1999).

[6] M.A. Akivis and V.V. Goldberg, *Projective Differential Geometry of Submanifolds*, Math. Library **49**, North-Holland (1993).

[7] M.S. Alber, R. Camassa, D.D. Holm and J.E. Marsden, The geometry of peaked solutions of a class of integrable pdes, *Lett. Math. Phys.* **32**, 137-151 (1994).

[8] M.S. Alber, R. Camassa, D.D. Holm and J.E. Marsden, On the link between umbilic geodesics and soliton solutions of nonlinear ODEs, *Proc. R. Soc. London A* **450**, 677-692 (1995).

[9] G. Albrecht and W.L.F. Degen, Construction of Bézier rectangles and triangles on the symmetric Dupin horn cyclide by means of inversion, *Computer Aided Geometric Design* **14**, 349-357 (1997).

[10] S. Allen and D. Dutta, Cyclides in pure blending I, *Computer Aided Geometric Design* **14**, 51-75 (1997).

[11] S. Allen and D. Dutta, Cyclides in pure blending II, *Computer Aided Geometric Design* **14**, 77-102 (1997).

[12] S. Allen and D. Dutta, Supercyclides and blending, *Computer Aided Geometric Design* **14**, 637-651 (1997).

[13] L.K. Antanovskii, C. Rogers and W.K. Schief, A note on a capillarity model and the nonlinear Schrödinger equation, *J. Phys. A: Math. Gen.* **30**, L555-L557 (1997).

[14] M. Antonowicz, On the Bianchi-Bäcklund construction for affine minimal surfaces, *J. Phys. A: Math. Gen.* **20**, 1989-1996 (1987).

[15] M. Antonowicz and A.P. Fordy, Factorisation of energy dependent Schrödinger operators: Miura maps and modified systems, *Commun. Math. Phys.* **124**, 465-486 (1989).

[16] M. Antonowicz and A.P. Fordy, Hamiltonian structure of nonlinear evolution equations, in A.P. Fordy, ed, *Soliton Theory: A Survey of Results*, pp. 273-312, Manchester

[17] M. Antonowicz and A. Sym, New integrable nonlinearities from affine geometry, *Phys. Lett. A* **112**, 1-2 (1985).

[18] N. Asano, T. Taniuti and N. Yajima, Perturbation method for nonlinear wave modulation: II, *J. Math. Phys.* **10**, 2020-2024 (1969).

[19] C. Athorne, On the characterization of Moutard transformations, *Preprint Department of Mathematics*, University of Glasgow (1992).

[20] C. Athorne and J.J.C. Nimmo, On the Moutard transformation for integrable partial differential equations, *Inverse Problems*, **7**, 809-826 (1991).

[21] A.V. Bäcklund, Om ytor med konstant negativ krökning, *Lunds Universitets rArsskrift* **19**, 1-48 (1883).

[22] J.A. Baker and C. Rogers, Invariance properties under a reciprocal Bäcklund transformation in gasdynamics, *J. de Mécanique Théor. Appl.* **1**, 563-578 (1982).

[23] T.W. Barnard, $2N\pi$ Ultrashort light pulses, *Phys. Rev. A* **7**, 373-376 (1973).

[24] V.I. Baspalov and V.I. Talanov, Filamentary structure of light beams in nonlinear liquids, *JETP Engl. Transl.* **3**, 307-310 (1966).

[25] H. Bateman, The lift and drag functions for an elastic fluid in two-dimensional irrotational flow, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA* **24**, 246-251 (1938).

[26] R. Beals, M. Rabelo and K. Tenenblat, Bäcklund transformations and inverse scattering solutions for some pseudospherical surface equations, *Stud. Appl. Math.* **81**, 125-151 (1989).

[27] V.A. Belinksky and V.E. Zakharov, Integration of Einstein's equations by means of the inverse scattering technique and construction of exact solutions, *Sov. Phys. JETP* **48**, 985-994 (1978).

[28] E. Beltrami, Saggio di interpretazione della geometria non-euclidea, *Giornale di Matematiche* **6**, 284-312 (1868).

[29] D.J. Benney and G.J. Roskes, Wave instabilities, *Stud. Appl. Math.* **48**, 377-385 (1969).

[30] R. Betchov, On the curvature and torsion of an isolated vortex filament, *J. Fluid. Mech.* **22**, 471-479 (1965).

[31] L. Bianchi, Ricerche sulle superficie a curvatura constante e sulle elicoidi. Tesi di Abilitazione, *Annali di Scuola Normale Superiore Pisa* (1) **2**, 285-304 (1879).

[32] L. Bianchi, Sopra i sistemi tripli ortogonali di Weingarten, *Annali di Mat* **13**, 177-234 (1885).

[33] L. Bianchi, Sopra alcone nuove classi di superficie e di sistemi tripli ortogonali, *Annali di Matem.* **18**, 301-358 (1890).

[34] L. Bianchi, Sulle deformazioni infinitesime delle superficie flessibili ed inestendibili, *Rend. Lincei* **1**, 41-48 (1892).

Lincei **5**, 3-12 (1892).

[36] L. Bianchi, Ricerche sulle superficie isoterme e sulla deformazione delle quadriche, *Ann. di Matem.* **11**, 93-157 (1905).

[37] L. Bianchi, *Lezioni di geometria differenziale* **1-4**, Zanichelli, Bologna (1923-1927).

[38] O. Bjørgum, On Beltrami vector fields and flows, Part I., *Universitet I. Bergen, r Arbok Naturvitenskapelig* rekke n-1 (1951).

[39] W. Blaschke, *Differentialgeometrie*, Chelsea Publishing Company, New York, Reprinted (1967).

[40] A.I. Bobenko, Surfaces in terms of 2 by 2 matrices. Old and new integrable cases, in A. Fordy and J. Woods, eds, *Harmonic Maps and Integrable Systems*, Vieweg, 83-128 (1994).

[41] A. Bobenko and U. Eitner, Bonnet surfaces and Painlevé equations, *J. Reine Angew. Math.* **499**, 47-79 (1998).

[42] A.I. Bobenko and U. Eitner, Painlevé equations in differential geometry of surfaces, *Sfb 288 Preprint* **449**, Technische Universität Berlin (2000).

[43] A. Bobenko, U. Eitner and A. Kitaev, Surfaces with harmonic inverse mean curvature and Painlevé equations, *Geom. Dedicata* **68**, 187-227 (1997).

[44] A.I. Bobenko and A.V. Kitaev, On asymptotic cones of surfaces with constant curvature and the third Painlevé equation, *Manuscripta. Math.* **97**, 489-516 (1998).

[45] A.I. Bobenko and R. Seiler, eds, *Discrete Integrable Geometry and Physics*, Clarendon Press, Oxford (1999).

[46] W. Boem, On cyclides in geometric modelling, *Computer Aided Geometric Design* **7**, 243-255 (1990).

[47] L.V. Bogdanov, Veselov-Novikov equation as a natural two-dimensional generalization of the Korteweg-de Vries equation, *Teoret. Mat. Fiz.* **70**, 309-314 (1987).

[48] M. Boiti, C. Laddomada and F. Pempinelli, Multiple-kink-soliton solutions of the nonlinear Schrödinger equation, *Il Nuovo Cimento B* **65**, 248-258 (1981).

[49] M. Boiti, J. Leon, L. Martina and F. Pempinelli, Scattering of localized solitons in the plane, *Phys. Lett. A* **132**, 432-439 (1988).

[50] M. Boiti, F. Pempinelli and P.C. Sabatier, First and second order nonlinear evolution equations, *Inverse Problems* **9**, 1-37 (1993).

[51] G. Bol, *Projektive Differentialgeometrie*, Göttingen (1954).

[52] A. Yu. Boldin, S.S. Safin and R.A. Shapirov, On an old article of Tzitzeica and the inverse scattering method, *J. Math. Phys.* **34**, 5801-5809 (1993).

[53] O. Bonnet, Mémoire sur la théorie des surfaces applicables sur une surface donnée, *Journal de l'Ecole Polytechnique* **41**, 201-230 (1865); ibid **42**, 1-151 (1867).

[54] E. Bour, Théorie de la déformation des surfaces, *Journal de l'École Imperiale Poly-*

[55] C. Brezinski, A general extrapolation algorithm, *Numer. Math.* **35**, 175-187 (1980).

[56] P. Broadbridge, J.H. Knight and C. Rogers, Constant rate rainfall infiltration in a bounded profile: solutions of a nonlinear model, *Soil. Soc. Am. J.* **52**, 1526-1533 (1988).

[57] P. Broadbridge and C. Rogers, Exact solutions for vertical drainage and redistribution in soils, *J. Eng. Math.* **24**, 225-43 (1990).

[58] P. Broadbridge and P. Tritscher, An integrable fourth order nonlinear evolution equation applied to the thermal grooving of metal surfaces, *IMA J. Appl. Math.* **53**, 249-265 (1994).

[59] F. Burstall, Isothermic surfaces in arbitrary co-dimension, to appear in *Proc. Internat. Congress on Diff. Geom., Messina* 1998.

[60] F. Burstall, Isothermic surfaces: conformal geometry, Clifford algebras and integrable systems, *math.DG/0003096* (2000).

[61] F. Burstall, U. Hertrich-Jeromin, F. Pedit and U. Pinkall, Curved flats and isothermic surfaces, *Math. Z.* **225**, 199-209 (1997).

[62] P. Calapso, Sulla superficie a linee di curvatura isoterme, *Rend. Circ. Mat. Palermo* **17**, 275-286 (1903).

[63] F. Calogero and A. Degasperis, Coupled nonlinear evolution equations solvable via the inverse spectral transform, and solitons that come back: the boomeron, *Lett. Nuovo Cimento* **16**, 425-433 (1976).

[64] F. Calogero and A. Degasperis, Bäcklund transformations, nonlinear superposition principle, multisoliton solutions and conserved quantities for the "boomeron" nonlinear evolution equation, *Lett. Nuovo Cimento* **16**, 434-438 (1976).

[65] F. Calogero and A. Degasparis, *Spectral Transform and Solitons*, North Holland Publishing Company, Amsterdam (1982).

[66] F. Calogero and A. Degasperis, A modified Korteweg-de Vries equation, *Inverse Problems* **1**, 57-66 (1985).

[67] R. Camassa and D.D. Holm, An integrable shallow water equation with peaked solitons, *Phys. Rev. Lett.* **71**, 1661-1664 (1993).

[68] E. Cartan, *Les systèmes différentielles extérieurs et leurs applications à métriques*, Hermann, Paris (1945).

[69] P.J. Caudrey, J.C. Eilbeck, J.D. Gibbon and R.K. Bullough, Exact multisoliton solution of the inhomogeneously broadened self-induced transparency equations, *J. Phys. A: Math. Gen.* **6**, L53-L56 (1973).

[70] P.J. Caudrey, J.D. Gibbon, J.C. Eilbeck and R.K. Bullough, Exact multi-soliton solutions of the self-induced transparency and sine-Gordon equations, *Phys. Rev. Lett.* **30**, 237-239 (1973).

[72] H.M. Cekirge and C. Rogers, On elastic-plastic wave propagation: transmission of elastic-plastic boundaries, *Archives of Mechanics* **29**, 125-141 (1977).

[73] H.M. Cekirge and E. Varley, Large amplitude waves in bounded media I: Reflexion and transmission of large amplitude shockless pulses at an interface, *Philos. Trans. R. Soc. London A* **273**, 261-313 (1973).

[74] B. Cenkl, Geometric deformations of the evolution equations and Bäcklund transformations, *Physica D* **18**, 217-219 (1986).

[75] Ö. Ceyhan, A.S. Fokas and M. Gürses, Deformations of surfaces associated with integrable Gauss-Mainardi-Codazzi equations, *J. Math. Phys.* **41**, 2251-2270 (2000).

[76] H.H. Chen and C.S. Liu, Nonlinear wave and soliton propagation in media with arbitrary inhomogeneities, *Phys. Fluids* **21**, 377-380 (1978).

[77] S.S. Chern, Surface theory with Darboux and Bianchi, *Miscellanea Mathematica*, pp. 59-69, Springer, Berlin (1991).

[78] S.S. Chern and K. Tenenblat, Foliations on a surface of constant curvature and the modified Korteweg-de Vries equations, *J. Diff. Geom.* **16**, 347-349 (1981).

[79] S.S. Chern and K. Tenenblat, Pseudospherical surfaces and evolution equations, *Stud. Appl. Math.* **74**, 55-83 (1986).

[80] S.S. Chern and C.L. Terng, An analogue of Bäcklund's theorem in affine geometry, *Rocky Mountain J. Math.* **10**, 105-124 (1980).

[81] F.J. Chinea, Vector Bäcklund transformations and associated superposition principle, in C. Hoenselaers and W. Dietz, eds, *Solutions of Einstein's Equations: Techniques and Results*, Lecture Notes in Physics, pp. 55-67, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg (1984).

[82] J. Cieśliński, An algebraic method to construct the Darboux matrix, *J. Math. Phys.* **36**, 5670-5706 (1995).

[83] J. Cieśliński, The Darboux-Bianchi transformation for isothermic surfaces. Classical results versus the soliton approach, *Diff. Geom. Appl.* **7**, 1-28 (1997).

[84] J. Cieśliński, A generalized formula for integrable classes of surfaces in Lie algebras, *J. Math. Phys.* **38**, 4255-4272 (1997).

[85] J. Cieśliński, P.K.H. Gragert and A. Sym, Exact solutions to localised induction-approximation equation modelling smoke-ring motion, *Phys. Rev. Lett.* **57**, 1507-1510 (1986).

[86] J. Cieśliński, P. Goldstein and A. Sym, Isothermic surfaces in E^3 as soliton surfaces, *Phys. Lett. A* **205**, 37-43 (1995).

[87] J.F. Cornwell, *Group Theory in Physics*, Vol. I, II, Academic Press, London (1984).

[88] C.M. Cosgrove, Relationships between the group-theoretic and soliton-theoretic techniques for generating stationary axisymmetric gravitational solutions, *J. Math. Phys.*

[89] E. Cosserat, Sur les systèmes conjugués et sur la déformation des surfaces, *C. R. Acad. Sci. Paris* **113**, 460-463 (1891); Sur les systèmes cycliques et sur la déformation des surfaces, ibid, 498-500.

[90] J. Crank, *The Mathematics of Diffusion*, Oxford University Press, 2nd Edition (1975).

[91] M.M. Crum, Associated Sturm-Liouville systems, *Quart. J. Math. Oxford* **6**, 121-127 (1955).

[92] G. Darboux, Sur une proposition relative aux equations lineaires, *Compt. Rend. Acad. Sci. Paris* **94**, 1456-1459 (1882).

[93] G. Darboux, *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, Gauthier-Villars, Paris (1887).

[94] G. Darboux, Sur les surfaces dont la courbure totale est constante, *Compt. Rend. Acad. Sci. Paris* **97**, 848-850 (1883); Sur les surfaces à courbure constante, ibid, 892-894; Sur l'équation aux dérivées partielles des surfaces à courbure constante, ibid, 946-949.

[95] G. Darboux, Sur les surfaces isothermiques, *C. R. Acad. Sci. Paris* **128**, 1299-1305 (1899).

[96] A. Davey, The propagation of a weak nonlinear wave, *J. Fluid. Mech.* **53**, 769-781 (1972).

[97] L.S. Da Rios, Sul moto d'un liquido indefinito con un filetto vorticoso, *Rend. Circ. Mat. Palermo* **22**, 117-135 (1906).

[98] A. Davey and K. Stewartson, On three-dimensional packets of surface waves, *Proc. R. Soc. London A* **338**, 101-110 (1974).

[99] P.G. deGennes, *Superconductivity of Metals and Alloys*, Benjamin, New York (1966).

[100] A. Degasperis, C. Rogers and W.K. Schief, Isothermic surfaces generated via Bäcklund and Moutard transformations. Boomeron and zoomeron connections, *Stud. Appl. Math.* **109**, 39-65 (2002).

[101] A. Demoulin, Sur les systèmes et les congruences K, *C. R. Acad. Sci. Paris* **150**, 156-159 (1910).

[102] A. Demoulin, Sur deux transformations des surfaces dont les quadriques de Lie n'ont que deux ou trois points characteristiques, *Bull. de l'Acad. Belgique* **19**, 479-502, 579-592, 1352-1363 (1933).

[103] J. de Pont, Essays on the cyclide patch, *PhD Thesis*, Cambridge University (1984).

[104] W. Dietz and C. Hoenselaers, Two mass solutions of Einstein's vacuum equations: the double Kerr solution, *Annals of Physics* **165**, 319-383 (1985).

[105] L.A. Dmitrieva, Finite-gap solutions of the Harry Dym equation, *Phys. Lett. A* **182**, 65-70 (1993).

[106] L.A. Dmitrieva, N-loop solitons and their link with the complex Harry Dym equation,

[107] L. Dmitrieva and M. Khlabystova, Multisoliton solutions of the (2+1)-dimensional Harry Dym equation, *Phys. Lett. A* **237**, 369-380 (1998).

[108] M.P. do Carmo, *Differential Geometry of Curves and Surfaces*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey (1976).

[109] R.K. Dodd, General relativity, in A.P. Fordy, ed, *Soliton Theory: A Survey of Results*, pp. 174-207, Manchester University Press (1990).

[110] R.K. Dodd, Soliton immersions, *Commun. Math. Phys.* **197**, 641-665 (1998).

[111] R.K. Dodd and R.K. Bullough, Polynomial conserved densities for the sine-Gordon equations, *Proc. R. Soc. London A* **352**, 481-503 (1977).

[112] A. Doliwa and P. Santini, An elementary geometric characterisation of the integrable motions of a curve, *Phys. Lett. A* **185**, 373-384 (1994).

[113] A. Doliwa, P.M. Santini and M. Mañas, Transformations of quadrilateral lattices, *J. Math. Phys.* **41**, 944-990 (2000).

[114] C. Dupin, *Applications de Géometrie et de Mécanique*, Bachelier, Paris (1822).

[115] J. Ehlers, *Les théories relativistes de la gravitation*, CRNS, Paris (1959).

[116] L.P. Eisenhart, *Riemannian Geometry*, Princeton University Press, Princeton, N.J. (1950).

[117] L.P. Eisenhart, *Non-Riemannian Geometry*, Amer. Math. Soc., New York (1958).

[118] L.P. Eisenhart, *A Treatise on the Differential Geometry of Curves and Surfaces*, Dover, New York (1960).

[119] L.P. Eisenhart, *Transformations of Surfaces*, Chelsea, New York (1962).

[120] F. Emde, Der Einfluss der Feldlinien auf Divergenz und Rotor, *Archiv für Elektrotechnik* **39**, 2-8 (1948).

[121] F. Ernst, New formulation of the axially symmetric gravitational field problem. I/II, *Phys. Rev.* **167**, 1175-1178; **168**, 1415-1417 (1968).

[122] F.B. Estabrook, Moving frames and prolongation algebras, *J. Math. Phys.* **23**, 2071-2076 (1982).

[123] F.B. Estabrook and H.D. Wahlquist, Prolongation structures of nonlinear evolution equations. II, *J. Math. Phys.* **17**, 1293-1297 (1976).

[124] E.V. Ferapontov, Reciprocal transformations and their invariants, *Diff. Uravnen* **25**, 1256-1265 (1989).

[125] E.V. Ferapontov, Reciprocal transformations and hydrodynamic symmetries, *Diff. Uravnen* **27**, 1250-1263 (1993).

[126] E.V. Ferapontov, Nonlocal Hamiltonian operators of hydrodynamic type: differential geometry and applications, *Trans. Amer. Math. Soc.* **170**, 33-58 (1995).

[127] E.V. Ferapontov, Dupin hypersurfaces and integrable Hamiltonian systems of hydrodynamic type which do not possess Riemann invariants, *Diff. Geom. Appl.* **5**, 121-152

[128] E.V. Ferapontov, Surfaces in Lie sphere geometry and the stationary Davey-Stewartson hierarchy, *Sfb 288 Preprint* **287**, Technische Universität Berlin (1997).

[129] E.V. Ferapontov, Stationary Veselov-Novikov equation and isothermally asymptotic surfaces in projective-differential geometry, *Diff. Geom. Appl.* **11**, 117-128 (1999).

[130] E.V. Ferapontov, Lie sphere geometry and integrable systems, *Tohoku Math. J.* **52**, 199-233 (2000).

[131] E.V. Ferapontov, Integrable systems in projective differential geometry, *Kyushu J. Math.* **54**, 183-215 (2000).

[132] E.V. Ferapontov, C. Rogers and W.K. Schief, Reciprocal transformations of two-component hyperbolic systems and their invariants, *J. Math. Anal. Appl.* **228**, 365-376 (1998).

[133] E.V. Ferapontov and W.K. Schief, Surfaces of Demoulin: differential geometry, Bäcklund transformation and integrability, *J. Geom. Phys.* **30**, 343-363 (1999).

[134] R.P. Feynman, R.B. Leighton and M. Sands, *The Feynman Lectures on Physics*, Vol. II, Addison-Wesley (1964).

[135] S.P. Finikov, *Projective-Differential Geometry*, Moscow-Leningrad (1937).

[136] S.P. Finikov, *Theory of Congruences*, Moscow-Leningrad (1950).

[137] A. Fokas, A symmetry approach to exactly solvable evolution equations, *J. Math. Phys.* **21**, 1318-1325 (1980).

[138] A.S. Fokas and I.M. Gelfand, Surfaces on Lie groups, on Lie algebras and their integrability, *Comm. Math. Phys.* **177**, 203-220 (1996).

[139] A.S. Fokas, I.M. Gelfand, F. Finkel and Q.M. Liu, A formula for constructing infinitely many surfaces on Lie algebras and Lie groups, to appear in *Selecta Mathematica*.

[140] A.P. Fordy and J. Gibbons, Integrable nonlinear Klein Gordon equations, *Commun. Math. Phys.* **77**, 21-30 (1980).

[141] M.V. Foursov, P.J. Olver, and E.G. Reyes, On formal integrability of evolution equations and local geometry of surfaces, to appear in *Diff. Geom. Appl.* (2000).

[142] B.D. Fried and Y.H. Ichikawa, On the nonlinear Schrödinger equation for Langmuir waves, *J. Phys. Soc. Japan* **33**, 789-792 (1972).

[143] G. Fubini and E. Čech, *Geometria Proiettiva Differenziale*, Zanichelli, Bologna (1926).

[144] B. Gaffet, $SU(3)$ symmetry of the equations of uni-dimensional gas flow, with arbitrary entropy distribution, *J. Math. Phys.* **25**, 245-255 (1984).

[145] B. Gaffet, An infinite Lie group of symmetry of one-dimensional gas flow for a class of entropy distributions, *Physica D* **11**, 287-308 (1984).

[146] B. Gaffet, An $SL(3)$-symmetrical F-Gordon equation: $z_{\alpha\beta} = \frac{1}{3}(e^z - e^{-2z})$, *Lecture Notes in Physics* **246**, Springer Verlag, Berlin, 301-319 (1986).

[147] B. Gaffet, The non-isentropic generalisation of the classical theory of Riemann invariants, *J. Phys. A: Math. Gen.* **20**, 2721-2731 (1987).

[148] B. Gaffet, A class of 1-d gas flows soluble by the inverse scattering transform, *Physica D* **26**, 123-139 (1987).

[149] R. Geroch, A method for generating solutions of Einstein's equations. I/II, *J. Math. Phys.* **12**, 918-924 (1971); **13**, 394-404 (1972).

[150] H.M. Gibbs and R.E. Slusher, Peak amplification and pulse breakup of a coherent optical pulse in a simple atomic absorber, *Phys. Rev. Lett.* **24**, 638-641 (1970).

[151] D. Gilbarg, On the flow patterns common to certain classes of plane fluid motions, *J. Math. and Phys.* **26**, 137-142 (1947).

[152] L. Godeaux, *La théorie des surfaces et l'espace réglé (Géometrie projective differentielle)*, Actualités scientifiques et industrielles, N138, Hermann, Paris (1934).

[153] B. Grammaticos, V. Papageorgiu and A. Ramani, KdV equations and integrability detectors, *Acta Applicandae Mathematicae* **39**, 335-348 (1995).

[154] R. Grimshaw, Slowly varying solitary waves: II, Nonlinear Schrödinger equation, *Proc. R. Soc. London A* **368**, 377-388 (1979).

[155] C. Gu, H. Hu and Z. Zhou, Darboux Transformation in Soliton Theory and its Geometric Applications, Shanghai Scientific & Technical Publishers (1999).

[156] A. Haar, Über adjungierte Variationsprobleme und adjungierte Extremalflächen, *Math. Ann.* **100**, 481-502 (1928).

[157] B.K. Harrison, Bäcklund transformation for the Ernst equation of general relativity, *Phys. Rev. Lett.* **41**, 1197-1200 (1978).

[158] B.K. Harrison, Unification of Ernst equation Bäcklund transformations using a modified Wahlquist-Estabrook technique, *J. Math. Phys.* **24**, 2178-2187 (1983).

[159] I. Hauser and F.J. Ernst, A homogeneous Hilbert problem for the Kinnersley-Chitre transformations, *J. Math. Phys.* **21**, 1126-1140 (1980).

[160] I. Hauser and F. Ernst, Proof of a Geroch conjecture, *J. Math. Phys.* **22**, 1051-1063 (1981).

[161] A. Hasegawa and F. Tappert, Transmission of stationary nonlinear optical pulses in dispersive dielectric fibers: I. Anomolous dispersion, *Appl. Phys. Lett.* **23**, 142-144 (1973).

[162] H. Hasimoto, A soliton on a vortex filament, *J. Fluid. Mech.* **51**, 477-485 (1972).

[163] H. Hasimoto and H. Ono, Nonlinear modulation of gravity waves, *J. Math. Soc. Japan* **33**, 805-811 (1972).

[164] R. Hermann, *The geometry of nonlinear differential equations, Bäcklund transformations and solitons*, Part A, Math. Sci. Press, Brookline MA (1976).

[165] U. Hertrich-Jeromin and F. Pedit, Remarks on the Darboux transform of isothermic surfaces, *Doc. Math.* **2**, 313-333 (1997).

[166] R. Hirota, Exact solution of the Korteweg-de Vries equation for multiple collisions of solitons, *Phys. Rev. Lett.* **27**, 1192-1194 (1971).

[167] R. Hirota and J. Satsuma, A simple structure of superposition formula of the Bäcklund transformation, *J. Phys. Soc. Japan* **45**, 1741-1750 (1978).

[168] C. Hoenselaers, HKX transformations. An introduction, in C. Hoenselaers and W. Dietz, eds, *Solutions of Einstein's Equations: Techniques and Results*, Lecture Notes in Physics, pp. 68-84, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg (1984).

[169] C. Hoenselaers, The sine-Gordon prolongation algebra, *Progr. Theor. Phys.* **74**, 645-654 (1985).

[170] C. Hoenselaers, More prolongation structures, *Progr. Theor. Phys.* **75**, 1014-1029 (1986).

[171] C. Hoenselaers, Equations admitting $o(2,1) \times R(t, t^{-1})$ as a prolongation algebra, *J. Phys. A: Math. Gen.* **21**, 17-31 (1988).

[172] C. Hoenselaers and W. Dietz, eds, *Solutions of Einstein's Equations: Techniques and Results*, Lecture Notes in Physics, Springer Verlag, Berlin Heidelberg (1984).

[173] C. Hoenselaers and W.K. Schief, Prolongation structures for Harry Dym type equations and Bäcklund transformations of cc-ideals, *J. Phys. A: Math. Gen.* **25**, 601-622 (1992).

[174] A.N.W. Hone, The associated Camassa-Holm equation and the KdV equation, *J. Phys. A: Math. Gen.* **32**, L307-L314 (1999).

[175] L.N. Howard, *Constant Speed Flows*, PhD Thesis, Princeton University (1953).

[176] R.W.H.T. Hudson, *Kummer's Quartic Surface*, Cambridge University Press (1990).

[177] N. Ibragimov, Sur l'équivalence des équations d'évolution qui admettent une algèbre de Lie-Bäcklund infinie, *C.R. Acad. Sci. Paris* **293**, 657-660 (1981).

[178] Y.H. Ichikawa, T. Imamura and T. Tanuiti, Nonlinear wave modulation in collisionless plasma, *J. Phys. Soc. Japan* **33**, 189-197 (1972).

[179] N. Jacobson, *Lie algebras*, Dover Publications Inc., New York (1962).

[180] A. Jeffrey, Equations of evolution and waves, in C. Rogers and T.B. Moodie, eds, *Wave Phenomena: Modern Theory and Applications*, North Holland, Amsterdam (1986).

[181] M.E. Johnston, *Geometry and the Sine Gordon Equation*, M.Sc. Thesis, University of New South Wales (1994).

[182] M.E. Johnston, C. Rogers, W.K. Schief and M.L. Seiler, On moving pseudospherical surfaces: a generalised Weingarten system, *Lie Groups and their Applications* **1**, 124-136 (1994).

[183] H. Jonas, Über die Transformation der konjugierten Systeme und über den gemeinsamen Ursprung der Bianchischen Permutabilitäts theoreme, *Sitzungsberichte Berl. Math. Ges.* **14**, 96-118 (1915).

[184] H. Jonas, Sopra una classe di transformazioni asintotiche, applicabili in particolare alle superficie la cui curvatura è proporzionale alla quarta potenza della distanza del

(1921).

[185] H. Jonas, Die Differentialgleichung der Affinsphären in einer neuen Gestalt, *Math. Nachr.* **10**, 331-361 (1953).

[186] V.G. Kac, *Infinite dimensional Lie algebras*, Cambridge University Press (1985).

[187] L.P. Kadanoff, Exact solutions for the Saffman-Taylor problem with surface tension, *Phys. Rev. Lett.* **65**, 2986-2988 (1986).

[188] T. Kakutani and H. Ono, Weak nonlinear hydromagnetic waves in cold collisionless plasma, *J. Phys. Soc. Japan* **26**, 1305-1318 (1969).

[189] T. Kambe and T. Takao, Motion of distorted vortex rings, *J. Phys. Soc. Japan* **31**, 591-599 (1971).

[190] N. Kamran and K. Tenenblat, On differential equations describing pseudo-spherical surfaces, *J. Diff. Eq.* **115**, 75-98 (1995).

[191] V.I. Karpman and E.M. Kruskal, Modulated waves in nonlinear dispersive media, *Soviet Phys. JETP* **28**, 277-281 (1969).

[192] D.J. Kaup, The method of solution for stimulated Raman scatttering and two-photon propagation, *Physica D* **6**, 143-154 (1983).

[193] J.P. Keener and J.J. Tyson, The dynamics of scroll waves in excitable media, *SIAM Review* **38**, 1-39 (1992).

[194] P.L. Kelley, Self focussing of optic beams, *Phys. Rev. Lett.* **15**, 1005-1008 (1965).

[195] J.G. Kingston and C. Rogers, Reciprocal Bäcklund transformations of conservation laws, *Phys. Lett. A* **92**, 261-264 (1982).

[196] J.G. Kingston, C. Rogers and D. Woodall, Reciprocal auto-Bäcklund transformations, *J. Phys. A: Math. Gen.* **17**, L35-L38 (1984).

[197] W. Kinnersley, Symmetries of the stationary Einstein-Maxwell field equations I, *J. Math. Phys.* **18**, 1529-1537 (1977).

[198] W. Kinnersley and D.M. Chitre, Symmetries of the stationary Einstein-Maxwell field equations II, *J. Math. Phys.* **18**, 1538-1542 (1978).

[199] W. Kinnersley and D.M. Chitre, Symmetries of the Einstein-Maxwell field equations III, *J. Math. Phys.* **19**, 1926-1931 (1978).

[200] P. Klimczewski, M. Nieszporski and A. Sym, Luigi Bianchi, Pasquale Calapso and solitons, *Preprint Instytut Fizyki Teoretycznej*, Uniwersytet Warszawski (2000).

[201] A. Kochendörfer and A. Seeger, Theorie der Versetzungen in eindimensionalen Atomreihen I Periodisch angeordnete Versetzungen, *Z. Phys.* **127**, 533-550 (1950).

[202] K. Konno and A. Jeffrey, Some remarkable properties of two loop soliton solutions, *J. Phys. Soc. Japan* **52**, 1-3 (1983).

[203] K. Konno, W. Kameyama and H. Sanuki, Effect of weak dislocation potential on nonlinear wave equation in an anharmonic crystal, *J. Phys. Soc. Japan* **37**, 171-176 (1974).

[204] K. Konno and H. Sanuki, Bäcklund transformation for equation of motion for nonlinear lattice under weak dislocation potential, *J. Phys. Soc. Japan* **39**, 22-24 (1975).

[205] B.G. Konopelchenko, Elementary Bäcklund transformations, nonlinear superposition principles and solutions of the integrable equations, *Phys. Lett. A* **87**, 445-448 (1982).

[206] B.G. Konopelchenko, Soliton eigenfunction equations: the IST integrability and some properties, *Rev. Math. Phys.* **2**, 399-440 (1990).

[207] B.G. Konopelchenko, The non-Abelian (1+1)-dimensional Toda lattice as the periodic fixed point of the Laplace transform for (2+1)-dimensional integrable systems, *Phys. Lett. A* **156**, 221-222 (1991).

[208] B.G. Konopelchenko, Induced surfaces and their integrable dynamics, *Stud. Appl. Math.* **96**, 9-51 (1996).

[209] B.G. Konopelchenko and U. Pinkall, Integrable deformations of affine surfaces via the Nizhnik-Veselov-Novikov equation, *Phys. Lett. A* **245**, 239-245 (1998).

[210] B.G. Konopelchenko and C. Rogers, On a 2+1-Dimensional Nonlinear System of Loewner-Type, *Phys. Lett. A* **152**, 391-397 (1991).

[211] B.G. Konopelchenko and C. Rogers, On Generalised Loewner Systems: Novel Integrable Equations in 2+1 Dimensions, *J. Math. Phys.* **34**, 214-242 (1993).

[212] B.G. Konopelchenko and W.K. Schief, Lamé and Zakharov-Manakov systems: Combescure, Darboux and Bäcklund transformations, *Dept. Appl. Maths. Preprint* **AM 93/9**, The University of New South Wales (1993).

[213] B.G. Konopelchenko and W.K. Schief, Three-dimensional integrable lattices in Euclidean spaces: conjugcy and orthogonality, *Proc. R. Soc. London A* **454**, 3075-3104 (1998).

[214] B.G. Konopelchenko, W. Schief and C. Rogers, A 2+1-dimensional sine-Gordon system: Its auto-Bäcklund transformation, *Phys. Lett. A* **172**, 39-48 (1992).

[215] D. Kramer, *GR9 Abstracts* **1**, 42 (1980).

[216] D. Kramer, Equivalence of various pseudopotential approaches for Einstein-Maxwell fields, *J. Phys. A: Math. Gen.* **15**, 2201-2207 (1982).

[217] D. Kramer and G. Neugebauer, Zu axialsymmetrischen stationären Lösungen der Einsteinschen Feldgleichungen für das Vakuum, *Comm. Math. Phys.* **10**, 132-139 (1968).

[218] D. Kramer and G. Neugebauer, The superposition of two Kerr solutions, *Phys. Lett. A* **75**, 259-261 (1980).

[219] D. Kramer and G. Neugebauer, Bäcklund transformations in general relativity, in C. Hoenselaers and W. Dietz, eds, *Solutions of Einstein's Equations: Techniques and Results*, Lecture Notes in Physics, pp. 1-25, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg (1984).

[220] D. Kramer, G. Neugebauer and T. Matos, Bäcklund transforms of chiral fields, *J. Math. Phys.* **32**, 2727-2730 (1991).

[221] D. Kramer, H. Stephani, H. Herlt and M. MacCallum, *Exact Solutions of Einstein's*

Equations, Cambridge University Press (1980).

[222] M. Lakshmanan, Th.W. Ruijgrok and C.J. Thompson, On the dynamics of a continuum spin system, *Physica A* **84**, 577-590 (1976).

[223] G.L. Lamb Jr., Analytical descriptions of ultrashort optical pulse propagation in a resonant medium, *Rev. Mod. Phys.* **43**, 99-124 (1971).

[224] G.L. Lamb Jr., Solitons on moving space curves, *J. Math. Phys.* **18**, 1654-1661 (1977).

[225] G.L. Lamb, *Elements of Soliton Theory*, John Wiley, New York (1980).

[226] G. Lamé, *Leçons sur les coordonnées curvilignes et leurs diverses applications*, Paris (1859).

[227] E.P. Lane, *Projective differential geometry of curves and surfaces*, University of Chicago Press, Chicago (1932).

[228] P.D. Lax, Integrals of nonlinear equations of evolution and solitary waves, *Comm. Pure Appl. Math.* **21**, 467-490 (1968).

[229] D. Levi, Nonlinear differential difference equations as Bäcklund transformations, *J. Phys. A: Math. Gen.* **14**, 1082-1098 (1981).

[230] D. Levi and R. Benguria, Bäcklund transformations and nonlinear differential difference equations, *Proc. Nat. Acad. Sci. US* **77**, 5025-5027 (1980).

[231] D. Levi and O. Ragnisco, Bäcklund transformations for chiral field equations, *Phys. Lett. A* **87**, 381-384 (1982).

[232] D. Levi, O. Ragnisco and A. Sym, Bäcklund transformation vs. the dressing method, *Lett. Nuovo Cimento* **33**, 401-406 (1982).

[233] D. Levi, O. Ragnisco and A. Sym, Dressing method vs. classical Darboux transformation, *Il Nuovo Cimento B* **83**, 34-42 (1984).

[234] D. Levi and A. Sym, Integrable systems describing surfaces of non-constant curvature, *Phys. Lett. A* **149**, 381-387 (1990).

[235] T. Levi-Civita, Attrazione Newtoniana dei Tubi Sottili e Vortici Filiformi, *Annali R. Scuola Norm. Sup. Pisa*, Zanichelli, Bologna (1932).

[236] T. Lewis, Some special solutions of the equations of axially symmetric gravitational fields, *Proc. R. Soc. London A* **136**, 176-192 (1932).

[237] C. Loewner, A transformation theory of partial differential equations of gasdynamics, *NACA Technical Note* **2065**, 1-56 (1950).

[238] C. Loewner, Generation of solutions of systems of partial differential equations by composition of infinitesimal Bäcklund transformations, *J. Anal. Math.* **2**, 219-242 (1952).

[239] L.G. Loitsyanskii, *Mechanics of Liquids and Gases*, International Series of Monographs in Aeronautics and Astronautics, Pergamon Press (1966) (Translation Editor K. Stewartson).

[240] F. Lund and T. Regge, Unified approach to strings and vortices with soliton solutions,

Phys. Rev. D **14**, 1524-1535 (1976).

[241] D. Maison, Are the stationary axially symmetric Einstein equations completely integrable?, *Phys. Rev. Lett.* **41**, 521-522 (1978).

[242] M.H. Martin, A new approach to problems in two-dimensional flow, *Quart. Appl. Math.* **8**, 137-350 (1951).

[243] M.H. Martin, The propagation of a plane shock into a quiet atmosphere, *Can. J. Math.* **5**, 37-39 (1953)

[244] R.R. Martin, *Principal patches for computational geometry*, PhD Thesis, Cambridge University (1982).

[245] R.R. Martin, J. de Pont and T.J. Sharrock, Cyclide surfaces in computer aided design, in J.A. Gregory, ed, *The Mathematics of Surfaces*, Oxford University Press (1986).

[246] A.W. Marris, On motions with constant speed and streamline parameters, *Arch. Rat. Mech. Anal.* **90**, 1-14 (1985).

[247] A.W. Marris and S.L. Passman, Vector fields and flows on developable surfaces, *Arch. Rat. Mech. Anal.* **32**, 29-86 (1969).

[248] A.W. Marris and C.C. Wang, Solenoidal screw fields of constant magnitude, *Arch. Rat. Mech. Anal.* **39**, 227-244 (1970).

[249] A. Masotti, Decomposizione intrinseca del vortice a sue applicazioni, *Instituto Lombardo di Scienze a Lettere Rendiconti (2)* **60**, 869-874 (1927).

[250] Y. Matsuno, *Bilinear Transformation Method*, Academic Press (1984).

[251] V.B. Matveev and M.A. Salle, *Darboux Transformations and Solitons*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York (1991).

[252] R.A. Matzner and C.W. Misner, Gravitational field equations for sources with axial symmetry and angular momentum, *Phys. Rev.* **154**, 1229-1232 (1967).

[253] J.C. Maxwell, On the cyclide, *Quart. J. Pure Appl. Math.* **9**, 111-126 (1868).

[254] O. Mayer, Contribution à l'étude des surfaces minima projectives, *Bull. des Sciences Math. ser. 2* **56**, 146-168; 188-200 (1932).

[255] S.L. McCall and E.L. Hahn, Self-induced transparency by pulsed coherent light, *Phys. Rev. Lett.* **18**, 908-911 (1967).

[256] D. McLean, A method of generating surfaces as a composite of cyclide patches, *Comput. J.* **4**, 433-438 (1985).

[257] R.I. McLachlan and H. Segur, A note on the motion of surfaces, *Phys. Lett. A* **194**, 165-172 (1994).

[258] A.M. Meirmanov, V.V. Pukhnachov and S.I. Shmarev, *Evolution Equations and Lagrangian Coordinates*, de Gruyter, Berlin New York (1997).

[259] A.V. Michailov, The reduction problem and the inverse scattering method, *Physica D* **3**, 73-117 (1981).

[260] L.M. Milne-Thomson, *Theoretical Hydrodynamics*, Macmillan & Company Ltd, Lon-

don (1962).

[261] F. Minding, Wie sich entscheiden lässt, ob zwei gegebene krumme Flächen aufeinander abwickelbar sind order nicht; nebst Bemerkungen über die Flächen von unverändlichem Krümmungsmasse, *Journal für die reine und angewandte Mathematik* **18**, 297-302 (1838).

[262] R.M. Miura, Korteweg-de Vries equation and generalizations: I. A remarkable explicit nonlinear transformation, *J. Math. Phys.* **9**, 1202-1204 (1968).

[263] H. Motz, V.P. Pavlenko and J. Weiland, Acceleration and slowing down of nonlinear packets in a weakly nonuniform plasma, *Phys. Lett. A* **76**, 131-133 (1980).

[264] Th. Moutard, Sur la construction des équations de la forme $\frac{1}{z}\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \lambda(x, y)$ qui admettent une intégrale générale explicite, *J. de l'Ecole Polytechnique, Cahier* **45**, 1-11 (1878).

[265] W.W. Mullins, Theory of thermal grooving, *J. Appl. Phys.* **28**, 333-339 (1957).

[266] M.F. Natale and D.A. Tarzia, Explicit solutions to the two-phase Stefan problem for Storm-type materials, *J. Phys. A: Math. Gen.* **33**, 395-404 (2000).

[267] G. Neugebauer, Bäcklund transformations of axially symmetric stationary gravitational fields, *J. Phys. A: Math. Gen.* **12**, L67-L70 (1979).

[268] G. Neugebauer, A general integral of the axially symmetric stationary Einstein equations, *J. Phys. A: Math. Gen.* **13** L19-L21 (1980).

[269] G. Neugebauer and D. Kramer, Einstein-Maxwell solitons, *J. Phys. A: Math. Gen.* **16**, 1927-1936 (1983).

[270] G. Neugebauer and R. Meinel, General N-soliton solution of the AKNS class on arbitrary background, *Phys. Lett. A* **100**, 467-470 (1984).

[271] A.C. Newell, *Solitons in Mathematics and Physics*, SIAM, Philadelphia (1985).

[272] F.W. Nijhoff, H.W. Capel, G.L. Wiersma and G.R.W. Quispel, Bäcklund transformations and three-dimensional lattice equations, *Phys. Lett. A* **105**, 267-272 (1984).

[273] J.J.C. Nimmo and W.K. Schief, Superposition principles associated with the Moutard transformation: an integrable discretization of a 2+1-dimensional sine-Gordon system, *Proc. R. Soc. London A* **453**, 255-279 (1997).

[274] J.J.C. Nimmo and W.K. Schief, An integrable discretization of a 2+1-dimensional sine-Gordon equation, *Stud. Appl. Math.* **100**, 295-309 (1998).

[275] J.J.C. Nimmo, W.K. Schief and C. Rogers, Termination of Bergman series. Connection to the B_n Toda system, *J. Eng. Math.* **36**, 137-148 (1999).

[276] L.P. Nizhnik, Integration of multidimensional nonlinear equations by the inverse problem method, *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **254**, 332-335 (1980).

[277] K. Nomizu and T. Sasaki, *Affine Differential Geometry*, Cambridge University Press (1994).

[278] A.W. Nutbourne and R.R. Martin, *Differential Geometry Applied to the Design of*

Curves and Surfaces, Ellis Horwood, Chichester (1988).

[279] J. Nycander, D.G. Dritschel and G.G. Sutyrin, The dynamics of long frontal waves in the shallow-water equations, *Phys. Fluids A* **5**, 1089-1091 (1993).

[280] W. Oevel and C. Rogers, Gauge transformations and reciprocal links in 2 + 1-dimensions, *Rev. Math. Phys.* **5**, 299-330 (1993).

[281] W. Oevel and W. Schief, Darboux theorems and the KP hierarchy, in *Applications of Analytic and Geometric Methods to Nonlinear Differential Equations*, P.A. Clarkson, ed, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 192-206 (1993).

[282] F. Pempinelli, Localized soliton solutions for the Davey-Stewartson I and Davey-Stewartson III equations, in P.A. Clarkson, ed, *Applications of Analytic and Geometric Methods to Nonlinear Differential Equations*, Kluwer, Dordrecht, 207-215 (1993).

[283] R. Perline, Localized induction equation and pseudospherical surfaces, *J. Phys. A: Math. Gen.* **27**, 5335-5344 (1994).

[284] R. Perline, Localized induction hierarchy and Weingarten systems, *Phys. Lett. A* **220**, 70-74 (1996).

[285] K. Pohlmeyer, Integrable Hamiltonian systems and iteractions through quadratic constraints, *Comm. Math. Phys.* **46**, 207-221 (1976).

[286] G. Power and P. Smith, Reciprocal properties of plane gas flows, *J. Math. Mech.* **10**, 349-361 (1961).

[287] M.J. Pratt, Cyclides in computer aided geometric design, *Computer Aided Geometric Design* **7**, 221-242 (1990).

[288] R. Prim, On the uniqueness of flows with given streamlines, *J. Math. and Phys.* **28**, 50-53 (1949).

[289] R.C. Prim, Steady rotational flow of ideal gases, *Arch. Rat. Mech. Anal.* **1**, 425-497 (1952).

[290] R. Prus, *Geometry of Bianchi surfaces in E^3*, Master thesis, Warsaw University (1995).

[291] G.R.W. Quispel, F.W. Nijhoff, H.W. Capel and J. van der Linden, Linear integral equations and nonlinear difference-difference equations, *Physica A* **125**, 344-380 (1984).

[292] M.L. Rabelo, On equations which describe pseudospherical surfaces, *Stud. Appl. Math.* **81**, 221-248 (1989).

[293] A. Razzabini, Delle superficie nelle quali un sistema di geodetiche sono del Betrand, Bologna Mem (5) **10**, 539-548 (1903).

[294] E.G. Reyes, Conservation laws and Calapso-Guichard deformations of equations describing pseudo-spherical surfaces, *J. Math. Phys.* **41**, 2968-2989 (2000).

[295] C. Rogers, Reciprocal relations in non-steady one-dimensional gasdynamics, *Z. Angew. Math. Phys.* **19**, 58-63 (1968).

[296] C. Rogers, Invariant transformations in non-steady gasdynamics and magneto-gasdynamics, *Z. Angew. Math. Phys.* **20**, 370-382 (1969).

[297] C. Rogers, The construction of invariant transformations in plane rotational gasdynamics, *Arch. Rat. Mech. Anal.* **47**, 36-46 (1972).

[298] C. Rogers, Application of a reciprocal transformation to a two-phase Stefan problem, *J. Phys. A: Math. Gen.* **18**, L105-L109 (1985).

[299] C. Rogers, On a class of moving boundary problems in nonlinear heat conduction: application of a Bäcklund transformation, *Int. J. Nonlinear Mech.* **21**, 249-256 (1986).

[300] C. Rogers, On the Heisenberg spin equation in hydrodynamics, *Research Report, Inst. Pure Appl. Math.*, Rio de Janeiro, Brasil (2000).

[301] C. Rogers and P. Broadbridge, On a nonlinear moving boundary problem with heterogeneity: application of a Bäcklund transformation, *Z. Angew. Math. Phys.* **39**, 122-128 (1988).

[302] C. Rogers and P. Broadbridge, On sedimentation in a bounded column, *Int. J. Nonlinear Mech.* **27**, 661-667 (1992).

[303] C. Rogers and S. Carillo, On reciprocal properties of the Caudrey-Dodd-Gibbon and Kaup-Kuperschmidt hierarchies, *Physica Scripta* **36**, 865-869 (1987).

[304] C. Rogers, S.P. Castell and J.G. Kingston, On invariance properties of conservation laws in non-dissipative planar magneto-gasdynamics, *J. de Mécanique* **13**, 243-354 (1974).

[305] C. Rogers and J.G. Kingston, Non-dissipative magneto-hydrodynamic flows with magnetic and velocity field lines orthogonal geodesics, *Soc. Ind. Appl. Math. J. Appl. Math.* **26**, 183-195 (1974).

[306] C. Rogers and J.G. Kingston, Reciprocal properties in quasi one-dimensional non-steady oblique field magneto-gasdynamics, *J. de Mécanique* **15**, 185-192 (1976).

[307] C. Rogers, J.G. Kingston and W.F. Shadwick, On reciprocal-type invariant transformations in magneto-gasdynamics, *J. Math. Phys.* **21**, 395-397 (1980).

[308] C. Rogers and M.C. Nucci, On reciprocal Bäcklund transformations and the Korteweg-de Vries hierarchy, *Physica Scripta* **33**, 289-292 (1986).

[309] C. Rogers, M.C. Nucci and J.G. Kingston, On reciprocal auto-Bäcklund transformations: application to a new nonlinear hierarchy, *Il Nuovo. Cimento* **96**, 55-63 (1986).

[310] C. Rogers and T. Ruggeri, A reciprocal Bäcklund transformation: application to a nonlinear hyperbolic model in heat conduction, *Lett. Nuovo Cimento* **44**, 289-296 (1985).

[311] C. Rogers and W.F. Shadwick, *Bäcklund Transformations and Their Applications*, Academic Press, New York (1982).

[312] C. Rogers and W.K. Schief, Intrinsic geometry of the NLS equation and its auto-Bäcklund transformation, *Stud. Appl. Math.* **26**, 267-287 (1998).

[313] C. Rogers and W.K. Schief, On geodesic hydrodynamic motions, to appear in *J. Math. Anal. Appl.* (2000).

[314] C. Rogers, W.K. Schief and M.E. Johnston, Bäcklund and his works: applications in soliton theory, in *Geometric Approaches to Differential Equations*, P.J. Vassiliou and I.G. Lisle, eds, *Australian Mathematical Society Lecture Series* **15**, Cambridge University Press, 16-55 (2000).

[315] C. Rogers, M.P. Stallybrass and D.L. Clements, On two-phase filtration under gravity and with boundary infiltration: application of a Bäcklund transformation, *J. Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications* **7**, 785-799 (1983).

[316] C. Rogers and P. Wong, On reciprocal Bäcklund transformations of inverse scattering schemes, *Physica Scripta* **30**, 10-14 (1984).

[317] C. Rogers and B. Yu Guo, A note on the onset of melting in a class of simple metals. Condition on the applied boundary flux, *Acta Mathematica Scientia* **8**, 425-430 (1988).

[318] O. Rozet, Sur certaines congruences W attachée aux surfaces dont les quadriques de Lie n'ont que deux points characteristiques, *Bull. Sci. Math. II* **58**, 141-151 (1934).

[319] M.A. Salle, Darboux transformations for non-abelian and nonlocal equations of the Toda chain type, *Teoret. Mat. Fiz.* **53**, 227-237 (1982).

[320] P.M. Santini and A.S. Fokas, Recursion operators and bi-Hamiltonian structures in multidimensions. I, *Comm. Math. Phys.* **115**, 375-419 (1988).

[321] R. Sasaki, Soliton equations and pseudospherical surfaces, *Nuclear Phys. B* **154**, 343-357 (1979).

[322] T. Sasaki, On a projectively minimal hypersurface in the unimodular affine space, *Geometriae Dedicata* **23**, 237-251 (1987).

[323] W.K. Schief, Bäcklund transformations for the (un)pumped Maxwell-Bloch system and the fifth Painlevé equation, *J. Phys. A: Math. Gen.* **27**, 547-557 (1994).

[324] W.K. Schief, On a 2+1-dimensional integrable Ernst-type equation, *Proc. R. Soc. London A* **446**, 381-398 (1994).

[325] W.K. Schief, Self-dual Einstein spaces via a permutability theorem for the Tzitzeica equation, *Phys. Lett. A* **223**, 55-62 (1996).

[326] W.K. Schief, On the geometry of an integrable (2+1)-dimensional sine-Gordon system, *Proc. R. Soc. London A* **453**, 1671-1688 (1997).

[327] W.K. Schief, Self-dual Einstein spaces and a discrete Tzitzeica equation. A permutability theorem link, in P.A. Clarkson and F.W. Nijhoff, eds, *Symmetries and Integrability of Difference Equations*, London Mathematical Society, Lecture Note Series **255**, Cambridge University Press, 137-148 (1999).

[328] W.K. Schief, Integrable discretization of geodesics of constant torsion and pseudospherical surfaces, *in preparation* (2000).

[329] W.K. Schief, The Painlevé III, V and VI transcendents as solutions of the Einstein-

Weyl equations, *Phys. Lett. A* **267**, 265-275 (2000).

[330] W.K. Schief, Hyperbolic surfaces in centro-affine geometry. Integrability and discretization, *Chaos, Solitons and Fractals* **11**, 97-106 (2000).

[331] W.K. Schief, Isothermic surfaces in spaces of arbitrary dimension: Integrability, discretization and Bäcklund transformations. A discrete Calapso equation, *Stud. Appl. Math.* **106**, 85-137 (2001).

[332] W.K. Schief, On Laplace-Darboux-type sequences of generalized Weingarten surfaces, *J. Math. Phys.* **41**, 6566-6599 (2000).

[333] W.K. Schief, On the geometry of the Painlevé V equation and a Bäcklund transformation, *The Anziam Journal (J. Austral. Math. Soc.)* **44**, 141-148 (2002).

[334] W.K. Schief, On the integrability of geodesic Bertrand curves and Razzaboni surfaces, *J. Geom. Phys.* **45**, 130-150 (2003).

[335] W.K. Schief, Nested toroidal surfaces in magnetohydrostatics. Generation via soliton theory, *J. Plasma Phys.* **69**, 465-484 (2003).

[336] W.K. Schief and C. Rogers, The affinsphären equation. Moutard and Bäcklund transformations, *Inverse Problems* **10**, 711-731 (1994).

[337] W.K. Schief and C. Rogers, On a Laplace sequence of nonlinear integrable Ernst-type equations, in A. Fokas and I.M. Gelfand, eds, Algebraic Aspects of Integrable Systems: In Memory of Irene Dorfman, *Prog. Nonlinear Diff. Eq.* **26**, 315-321 (1996).

[338] W.K. Schief and C. Rogers, Loewner transformations: adjoint and binary Darboux connections, *Stud. Appl. Math.* **100**, 391-422 (1998).

[339] W.K. Schief and C. Rogers, Binormal motion of curves of constant curvature and torsion. Generation of soliton surfaces, *Proc. R. Soc. London A* **455**, 3163-3188 (1999).

[340] W.K. Schief, C. Rogers and S.P. Tsarev, On a 2+1-dimensional Darboux system: Integrable and geometric connections, *Chaos, Solitons and Fractals* **5**, 2357-2366 (1995).

[341] B.G. Schmidt, The Geroch group is a Banach Lie group, in C. Hoenselaers and W. Dietz, eds, *Solutions of Einstein's Equations: Techniques and Results*, Lecture Notes in Physics, pp. 113-127, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg (1984).

[342] E.I. Schulman, On the integrability of equations of Davey-Stewartson type, *Math. Theor. Phys.* **56**, 720-724 (1984).

[343] B.F. Schutz, *Geometric Methods of Mathematical Physics*, Cambridge University Press, Cambridge (1980).

[344] A.C. Scott, Propagation of magnetic flux on a long Josephson junction, *Il Nuovo Cimento B* **69**, 241-261 (1970).

[345] A. Seeger, H. Donth and A. Kochendörfer, Theorie der Versetzungen in eindimensionalen Atomreihen III. Versetzungen, Eigenbewegungen und ihre Wechselwirkung, *Z. Phys.* **134**, 173-193 (1953).

[346] A. Seeger and A. Kochendörfer, Theorie der Versetzungen in eindimensionalen Atom-

reihen II. Beliebig angeordnete und beschleunigte Versetzungen, *Z. Phys.* **130**, 321-336 (1951).

[347] T.J. Sharrock, Surface design with cyclide patches, *PhD Thesis*, Cambridge University (1985).

[348] K. Shimuzu and Y.H. Ichikawa, Automodulation of ion oscillation modes in plasma, *J. Phys. Soc. Japan* **33**, 789-792 (1972).

[349] H. Steudel, Space-time symmetry of self-induced transparency and of stimulated Raman scattering, *Phys. Lett. A* **156**, 491-492 (1991).

[350] H. Steudel, Solitons in stimulated Raman scattering and resonant two-photon propagation, *Physica D* **6**, 155-178 (1983).

[351] R. Steuerwald, Über die Enneper'sche Flächen und Bäcklund'sche Transformation, *Abh. Bayer. Akad. Wiss.* **40**, 1-105 (1936).

[352] D.J. Struick, *Lectures on Classical Differential Geometry*, 2nd Edition, Addison-Wesley Publishing Company, Inc., Reading, Mass, USA (1961).

[353] A. Sym, Soliton surfaces, *Lett. Nuovo Cimento* **33**, 394-400 (1982).

[354] A. Sym, Soliton surfaces II. Geometric unification of solvable nonlinearities, *Lett. Nuovo Cimento* **36**, 307-312 (1983).

[355] A. Sym, Soliton surfaces V. Geometric theory of loop solitons, *Lett. Nuovo Cimento* **41**, 33-40 (1984).

[356] A. Sym, Soliton surfaces and their applications, in R. Martini, ed, *Geometric Aspects of the Einstein Equations and Integrable Systems*, Springer, Berlin (1985).

[357] M. Tabor, Painlevé property for partial differential equations, in A.P. Fordy, ed, *Soliton Theory: A Survey of Results*, pp. 427-446, Manchester University Press (1990).

[358] J. Tafel, Surfaces in $\mathbb{R}^3$ with prescribed curvature, *J. Geom. Phys.* **294**, 1-10 (1995).

[359] L.A. Takhtajan, Integration of the continuous Heisenberg spin chain through the inverse scattering method, *Phys. Lett. A* **64**, 235-237 (1977).

[360] V.I. Talanov, Self focussing of wave beams in nonlinear media, *JETP Lett. Engl. Transl.* **2**, 138-141 (1965).

[361] T. Taniuki and H. Washimi, Self trapping and instability of hydromagnetic waves along the magnetic field in a cold plasma, *Phys. Rev. Lett.* **21**, 209-212 (1968).

[362] B. Temple, Systems of conservation laws with invariant submanifolds, *Trans. Amer. Math. Soc.* **280**, 781-795 (1983).

[363] K. Tenenblat, *Transformations of manifolds and applications to differential equations*, Pitman Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics **93**, Longman, Harlow (1998).

[364] G. Thomsen, Über eine liniengeometrische Behandlungsweise der projektiven Flächentheorie und die projektive Geometrie der Systeme von Flächen zweiter Ordnung, *Abhandl. Math. Sem. Hamburg* **4**, 232-266 (1926).

[365] G. Thomsen, Sulle superficie minime proiettive, *Ann. di Math.* **5**, 169-184 (1928).

[366] P. Tritscher and P. Broadbridge, Grain boundary grooving by surface diffusion: an analytic nonlinear model for a symmetric groove, *Proc. R. Soc. London A* **450**, 569-587 (1995).

[367] H.S. Tsien, Two dimensional subsonic flow of compressible fluids, *J. Aeronaut. Sci.* **6**, 399-407 (1939).

[368] T. Tsuzuki, Nonlinear waves in the Pitaevsky-Gross equation, *J. Low Temp. Phys.* **4**, 441-457 (1971).

[369] G. Tzitzeica, Sur une nouvelle classe de surfaces, *C. R. Acad. Sci. Paris* **144**, 1257-1259 (1907); Sur une classe de surfaces, ibid **146**, 165-166 (1908).

[370] G. Tzitzeica, Sur une nouvelle classe de surfaces, *C. R. Acad. Sci. Paris* **150**, 955-956; 1227-1229 (1910).

[371] A.P. Veselov and S.P. Novikov, Finite-gap two-dimensional potential Schrödinger operators. Explicit formulas and evolution equations, *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **279**, 20-24 (1984).

[372] A. Voss, Encyclopädie der mathematischen Wissenschaften, Bd. III, DGa, Leipzig (1902).

[373] M.G. Vranceanu, Les éspaces non-holonomes et leurs applications mécaniques, *Mém. Sci. Mathém.* **76** (1936).

[374] M. Wadati, Wave propagation in nonlinear lattice: I, *J. Phys. Soc. Japan* **38**, 673-680 (1975).

[375] M. Wadati, H. Sanuki and K. Konno, Relationships among inverse method, Bäcklund transformation and an infinite number of conservation laws, *Progr. Theor. Phys.* **53**, 419-436 (1975).

[376] M. Wadati, K. Konno and Y.H. Ichikawa, New integrable nonlinear evolution equations, *J. Phys. Soc. Japan*, **47**, 1698-1700 (1979).

[377] H.D. Wahlquist and F.B. Estabrook, Bäcklund transformations for solutions of the Korteweg-de Vries equation, *Phys. Rev. Lett.* **31**, 1386-1390 (1973).

[378] H.D. Wahlquist and F.B. Estabrook, Prolongation structures of nonlinear evolution equations, *J. Math. Phys.* **16**, 1-7 (1975).

[379] R.H. Wasserman, On a class of three-dimensional compressible fluid flows, *J. Math. Anal. Appl.* **5**, 119-135 (1962).

[380] C.E. Weatherburn, *Differential Geometry of Three Dimensions*, Vol. I, Cambridge University Press (1927).

[381] C.E. Weatherburn, *Differential Geometry of Three Dimensions*, Vol. II, Cambridge University Press (1930).

[382] J. Weiss, On classes of integrable systems and the Painlevé property, *J. Math. Phys.* **25**, 13-24 (1984).

[383] H. Weyl, Zur Gravitationstheorie, *Annal. Phys.* **54**, 117-145 (1917).

[384] E.I. Wilczynski, Projective-differential geometry of curved surfaces, *Trans. Amer. Math. Soc.* **8**, 233-260 (1907); **9**, 79-120, 293-315 (1908); **10**, 176-200, 279-296 (1909).

[385] D. Wójcik and J. Cieśliński, eds, *Nonlinearity & Geometry*, Polish Scientific Publishers PWN, Warszawa (1998).

[386] W.L. Yin and A.C. Pipkin, Kinematics of viscometric flow, *Arch. Rat. Mech. Anal.* **37**, 111-135 (1970).

[387] H.C. Yuen and B.M. Lake, Nonlinear wave concepts applied to deep water waves, in K. Lonngren and A. Scott, eds, *Solitons in Action*, Academic Press, New York (1978).

[388] N.J. Zabusky, A synergetic approach to problems of nonlinear dispersive wave propagation, in W.F. Ames, ed, *Nonlinear Partial Differential Equations*, Academic Press, New York (1967).

[389] N.J. Zabusky and M.D. Kruskal, Interaction of 'solitons' in a collisionless plasma and recurrence of initial states, *Phys. Rev. Lett.* **15**, 240-243 (1965).

[390] V.E. Zakharov, Stability of periodic waves of finite amplitude on the surface of a deep fluid, *J. Appl. Mech. Tech. Phys.* **9**, 86-94 (1968).

[391] V.E. Zakharov, Description of the n-orthogonal curvilinear coordinate systems and Hamiltonian integrable systems of hydrodynamic type. I. Integration of the Lamé equations, *Duke Math. J.* **94**, 103-139 (1998).

[392] V.E. Zakharov and S.V. Manakov, Construction of multidimensional nonlinear integrable systems and their solutions, *Funct. Anal. Pril.* **19**, 11-25 (1985).

[393] V.E. Zakharov, S.V. Manakov, S.P. Novikov and L.P. Pitaevskii, *The Theory of Solitons: The Inverse Problem Method* [in Russian], Nauka, Moskow (1980).

[394] V.E. Zakharov and A.V. Mikhailov, Relativistically invariant two-dimensional models of field theory which are integrable by means of the inverse scattering method, *Sov. Phys. JETP* **47**, 1017-1027 (1978).

[395] V.E. Zakharov and A.B. Shabat, A scheme for integrating the nonlinear equations of mathematical physics by the method of the inverse scattering transform, *Funct. Anal. Appl.* **8**, 226-235 (1974).

补充参考文献

本书英文版由剑桥大学出版社于 2002 年出版, 在这之后, 对 Bäcklund 变换和 Darboux 变换以及相应的曲面几何的研究又有了一些重要的进展, 特别是在离散可积系统及其应用方面. 它们同一些古典几何结果, 如 Menelaus 定理的联系也是令人感兴趣的. 它们在许多物理邻域, 包括液晶、弹性膜理论、气体动力学、磁流体动力学、等离子体物理以及毛细管理论中均有重要应用. 在本书的中文译本中, 将列出从英文版出版之后作者在这方面的一些代表文章, 也包括了其他人的一些重要研究成果.

[A1] L. Bass, J.J.C. Nimmo, C. Rogers and W.K. Schief, Electrical structures of interfaces. A Painlevé model, *Proc. R. Soc. London*, **A 466**, 2117–2136 (2010).

[A2] A. J. Bracken, L. Bass and C. Rogers, Bäcklund flux-quantization in a model of electrodiffusion based on Painlevé II, *J. Phys. A: Math. Theor.*, **45**, 105204 (2012).

[A3] A.D. King and W.K. Schief, Tetrahedra, octahedra and cubo-octahedra: integrable geometry of multi-ratios, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **36**, 785–802 (2003).

[A4] A.D. King and W.K. Schief, Application of an incidence theorem for conics: Cauchy problem and integrability of the dCKP equation, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **39**, 1899–1913 (2006).

[A5] A.D. King and W.K. Schief, Clifford lattices and a conformal generalization of Desargues' theorem, *J. Geom. Phys.*, **62**, 1088–1096 (2012).

[A6] B.G. Konopelchenko and W.K. Schief, Menelaus' theorem, Clifford configurations and inversive geometry of the Schwarzian BKP hierarchy, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **35**, 6125–6144 (2002).

[A7] B.G. Konopelchenko and W.K. Schief, Reciprocal figures, graphical statics and inversive geometry of the Schwarzian BKP hierarchy, *J. Stud. Appl. Math.*, **109**, 89–124 (2002).

[A8] B.G. Konopelchenko and W.K. Schief, Conformal geometry of the (discrete) Schwarzian Davey-Stewartson II hierarchy, *Glasgow Math. J.*, **47A**, 121–131 (2005).

[A9] J.H. Lee, O.K. Pashaev, C. Rogers and W.K. Schief, The resonant nonlinear Schrödinger equation in cold plasma physics. Application of Bäcklund-Darboux transformations and superposition principles, *J. Plasma Physics*, **73**, 257–272 (2007).

[A10] S.Y. Lou, C. Rogers and W.K. Schief, Virasoro structure and localised excitations

[A11] S.Y. Lou, C. Rogers and W.K. Schief, On a nonlinear discretized LKR system: reductions and underlying Virasoro symmetry algebras, *Stud. Appl. Math.*, **113**, 353–380 (2004).

[A12] C. Rogers, On the geometry of spatial hydrodynamic motions. Solitonic connections, in *Proceedings XIth International Conference on Waves and Stability in Continuous Media*, 458–470 (2002).

[A13] C. Rogers and W.K. Schief, On the equilibrium of shell membranes under normal loading. Hidden integrability, *Proc. R. Soc. London* **A459**, 2449–2462 (2003).

[A14] C. Rogers, W.K. Schief and J. Wylie, Wave propagation in ideally hard inhomogeneous elastic materials associated with pseudospherical surfaces, *Int. J. Eng. Sci.*, **41**, 1965–1974 (2003).

[A15] C. Rogers and W.K. Schief, Novel integrable reductions in nonlinear continuum mechanics via geometric constraints, *J. Math. Phys.*, **44**, 3341–3369 (2003).

[A16] C. Rogers, W.K. Schief, K.W. Chow and C.C. Mak, On Tzitzeica vortex streets and their reciprocals in subsonic gasdynamics, *Stud. Appl. Math.*, **114**, 271–283 (2005).

[A17] C. Rogers and W.K. Schief, Vortex trains in super-Alfvénic magnetogasdynamics. Application of reciprocal-Bäcklund transformations, *J. Nonlinear Math. Phys.*, **12** (Supplement 1), 548–564 (2005).

[A18] C. Rogers and W.K. Schief, On a novel class of model constitutive laws in nonlinear elasticity. Construction via Loewner theory, *Theor. Math. Phys.*, **152**, 1030–1042 (2007).

[A19] C. Rogers, W.K. Schief and A. Szereszewski, On a nonlinear shell membrane system: generalised cyclide geometries, *Euromech Colloquium*, **483** Geometrically Nonlinear Vibrations of Structures 45–47 (2007).

[A20] C. Rogers and A. Szereszewski, A Bäcklund transformation for L-isothermic surfaces, in Nonlinearity and Geometry: Connections with Integrability, *J. Phys. A: Math. Theor.*, **42**, 404015 (2009).

[A21] C. Rogers and W.K. Schief, Integrable structure in the theory of stress concentration in shear-strained nonlinear elastic materials, *Stud. Appl. Math.*, **125**, 39–53 (2010).

[A22] C. Rogers, W.K. Schief, A. Mentrelli and T. Ruggeri, Application of a Bäcklund transformation in nonlinear elastodynamics. Two-pulse interaction, in *Proc. XV International Meeting on Waves and Stability in Continuous Media*, 206–269 (2010).

[A23] C. Rogers, W.K. Schief and A. Szereszewski, Loop soliton interaction in an integrable nonlinear telegraphy model. Reciprocal and Bäcklund transformations, *J. Phys. A:*

[A24] C. Rogers and W.K. Schief, Bäcklund transformations and superposition principles in nonlinear elastodynamics, *Stud. Appl. Math.*, **124**, 137–149 (2010).

[A25] C. Rogers and W.K. Schief, Connection of an integrable inhomogeneous Heisenberg spin equation with a hydrodynamic-type system with a collision term, *J. Phys. A: Math. Theor.*, **45**, 432002 (2012).

[A26] C. Rogers and A. Szereszewski, On the geometry of complex-lamellar magnetohydrodynamics. Universal motions, *Stud. Appl. Math.*, **128**, 225–251 (2012).

[A27] C. Rogers and Y. Huang, On an integrable deformed affinsphären equation. A reciprocal gasdynamic connection, *Phys. Lett.*, **A 376**, 1446–1450 (2012).

[A28] C. Rogers and W.K. Schief, The classical Korteweg capillarity system: geometry and invariant transformations, *J. Phys. A: Math. Theor.*, **47**, 345201 (2014).

[A29] W.K. Schief and B.G. Konopelchenko, On the unification of classical and novel integrable surfaces: I Differential geometry, *Proc. R. Soc. London*, **A459**, 67–84 (2003).

[A30] W.K. Schief and B.G. Konopelchenko, On the unification of classical and novel integrable surfaces: II Differential geometry, *Proc. R. Soc. London*, **A459**, 373–391 (2003).

[A31] W.K. Schief, Hidden integrability in ideal magneto-hydrodynamics. The Pohlmeyer-Lund-Regge model, *Phys. Plasmas*, **10**, 2677–2685 (2003).

[A32] W.K. Schief, Lattice geometry of the discrete Darboux, KP, BKP and CKP equations. Menelaus' and Carnot's theorems, *J. Nonlinear Math. Phys.*, **10** (Supplement 2), 194–208 (2003).

[A33] W.K. Schief and C. Rogers, The Da Rios system under a geometric constraint. The Gilbarg problem, *J. Geom. Phys.* **54**, 286–300 (2005).

[A34] W.K. Schief, Integrable discrete differential geometry of 'plated' membranes in equilibrium, *Proc. R. Soc. London* **A461**, 3213–3229 (2005).

[A35] W.K. Schief, M. Kléman and C. Rogers, On a nonlinear elastic shell system in liquid crystal theory: generalised Willmore surfaces and Dupin cyclids, *Proc. R. Soc. London*, **A461**, 2817–2837 (2005).

[A36] W.K. Schief, On a maximum principle for minimal surfaces and their integrable discrete counterparts, *J. Geom. Phys.*, **56**, 1484–1495 (2006).

[A37] W.K. Schief, Discrete Chebyshev nets and a universal permutability theorem, *J. Phys. A: Math. Theor.*, **40**, 4775–4801 (2007).

[A38] W.K. Schief, A. Szereszewski and C. Rogers, The Lamë equation in shell membrane theory, *J. Math. Phys.*, **48**, 073510 (2007).

[A39] W.K. Schief, A.I. Bobenko and T. Hoffmann, On the integrability of infinitesimal and finite deformations of polyhedral surfaces, in A.I. Bobenko, P. Schröden, J.M. Sullivan and G.M. Ziegler, eds. *Discrete Differential Geometry, Oberwolfach Seminars* **38** Birkhäuser, 67–93 (2008).

[A40] W.K. Schief and B.G. Konopelchenko, A novel generalization of Clifford's classical point-circle configuration. Geometric interpretation of the quaternionic discrete Schwarzian KP equation, *Proc. R. Soc. London*, **A465**, 1291–1308 (2009).

[A41] W.K. Schief, A. Szereszewski and C. Rogers, On shell membranes of Enneper type: generalized Dupin cyclides, *J. Math. Phys. A: Math. Theor.*, **42**, 404016 (2009).

[A42] W.K. Schief and C. Rogers, Modulated waves and helicoidal pseudospherical surfaces in nonlinear inhomogeneous elasticity, *J. Math. Phys. A: Math. Theor.*, **43**, 105206 (2010).

[A43] W.K. Schief and C. Rogers, The Euler equations of spatial gasdynamics and the integrable Heisenberg spin equation, *Stud. Appl. Math.*, **128**, 407–419 (2012).

[A44] W.K. Schief, Integrable structure in discrete shell membrane theory, *Proc. R. Soc. London*, **A470**, 20130757 (2014).

致　谢

(关于英文原版)

作者首先要感谢已故的英国皇家学会会员、剑桥大学的 David Crighton 教授自始至终的支持和鼓励, 也要感谢佐治亚科技大学动力系统与非线性研究中心, 作者在此开始了本书的写作. 最后, 要感谢澳大利亚研究理事会的支持.

(关于中译本)

作者要感谢复旦大学的周子翔教授完成了将全书译成中文这一繁重的工作, 还要感谢剑桥大学出版社给予了中文翻译许可.

Colin Rogers & Wolfgang Schief

2014 年于新南威尔士大学

《现代数学译丛》已出版书目

（按出版时间排序）

1 椭圆曲线及其在密码学中的应用——导引 2007.12 〔德〕Andreas Enge 著 吴 铤 董军武 王明强 译

2 金融数学引论——从风险管理到期权定价 2008.1 〔美〕Steven Roman 著 邓欣雨 译

3 现代非参数统计 2008.5 〔美〕Larry Wasserman 著 吴喜之 译

4 最优化问题的扰动分析 2008.6 〔法〕J. Frédéric Bonnans 〔美〕Alexander Shapiro 著 张立卫 译

5 统计学完全教程 2008.6 〔美〕Larry Wasserman 著 张 波 等译

6 应用偏微分方程 2008.7 〔英〕John Ockendon, Sam Howison, Andrew Lacey & Alexander Movchan 著 谭永基 程 晋 蔡志杰 译

7 有向图的理论、算法及其应用 2009.1 〔丹〕J. 邦詹森 〔英〕G. 古廷 著 姚兵 张忠辅 译

8 微分方程的对称与积分方法 2009.1〔加〕乔治 W. 布卢曼 斯蒂芬 C. 安科 著 闫振亚 译

9 动力系统入门教程及最新发展概述 2009.8 〔美〕Boris Hasselblatt & Anatole Katok 著 朱玉峻 郑宏文 张金莲 阎欣华 译 胡虎翼 校

10 调和分析基础教程 2009.10 〔德〕Anton Deitmar 著 丁勇 译

11 应用分支理论基础 2009.12 〔俄〕尤里·阿·库兹涅佐夫 著 金成桴 译

12 多尺度计算方法——均匀化及平均化 2010.6 Grigorios A. Pavliotis, Andrew M. Stuart 著 郑健龙 李友云 钱国平 译

13 最优可靠性设计：基础与应用 2011.3 〔美〕Way Kuo, V. Rajendra Prasad, Frank A.Tillman, Ching-Lai Hwang 著 郭进利 闫春宁 译 史定华 校

14 非线性最优化基础 2011.4 〔日〕Masao Fukushima 著 林贵华 译

15 图像处理与分析：变分，PDE，小波及随机方法 2011.6 Tony F. Chan, Jianhong (Jackie) Shen 著 陈文斌，程晋 译

17 合作博弈理论模型 2011.7 〔罗〕Rodica Branzei 〔德〕Dinko Dimitrov 〔荷〕Stef Tijs 著 刘小冬 刘九强 译

18 变分分析与广义微分 I：基础理论 2011.9 〔美〕Boris S. Mordukhovich 著 赵亚莉 王炳武 钱伟懿 译

19 随机微分方程导论应用(第 6 版) 2012.4 〔挪〕Bernt Øksendal 著 刘金山 吴付科 译

20 金融衍生产品的数学模型 2012.4 郭宇权(Yue-Kuen Kwok) 著 张寄洲 边保军 徐承龙 等 译

21 欧拉图与相关专题 2012.4 〔英〕Herbert Fleischner 著 孙志人 李 皓 刘桂真 刘振宏 束金龙 译 张 昭 黄晓晖 审校

22 重分形：理论及应用 2012.5 〔美〕戴维·哈特 著 华南理工分形课题组 译

23 组合最优化：理论与算法 2014.1 〔德〕 Bernhard Korte Jens Vygen 著 姚恩瑜 林治勋 越民义 张国川 译

24 变分分析与广义微分 II：应用 2014.1 〔美〕 Boris S. Mordukhovich 著 李 春 王炳武 赵亚莉 王 东 译

25 算子理论的 Banach 代数方法(原书第二版) 2014.3 〔美〕 Ronald G. Douglas 著 颜 军 徐胜芝 舒永录 蒋卫生 郑德超 孙顺华 译

26 Bäcklund 变换和 Darboux 变换——几何与孤立子理论中的应用 2015.5 〔澳〕C. Rogers W. K. Schief 著 周子翔 译

图字：01-2015-2594 号

内 容 简 介

本书大量介绍了曲面的经典微分几何同现代孤立子理论的联系. 对于从十九世纪和二十世纪初著名的几何学家如 Bianchi, Bäcklund, Eisenhart 关于保持某些特殊类型的曲面的几何性质不变的变换，作者提供了大量文献. 书中以大量的篇幅介绍了 Bäcklund-Darboux 变换、它们的非线性叠加原理以及在孤立子理论中的重要性. 本书的宗旨是介绍这些变换以及曲面的经典微分几何同孤立子理论中的非线性方程的联系. 从几何角度来看，孤立子方程来源于在 Bäcklund-Darboux 变换下不变的各种曲面的 Gauss-Mainardi-Codazzi 方程组.

本书适合应用数学和数学物理方面的高年级本科生和研究生阅读.

Bäcklund and Darboux Transformations-Geometry and Modern Applications in Soliton Theory, 1st edition (978-0-521-01288-1) by C. Rogers, W. K. Schief first published by Cambridge University Press 2002

图书在版编目(CIP)数据

Bäcklund 变换和 Darboux 变换：几何与孤立子理论中的应用/(澳)罗杰斯(Rogers, C.), (澳)希弗(Schief, W. K.)著；周子翔译.—北京：科学出版社, 2015.5

(现代数学译丛)

书名原文：Bäcklund and Darboux Transformations: Geometry and Modern Applications in Soliton Theory

ISBN 978-7-03-044342-7

I. ①B… Ⅱ. ①罗… ②希… ③周… Ⅲ. ①微分几何 ②孤立子 Ⅳ. ①O186.1 ②O572.3

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015) 第 105736 号

责任编辑：李　欣／责任校对：张怡君
责任印制：张　倩／封面设计：陈　敬

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

三河市骏杰印刷有限公司 印刷
科学出版社发行　各地新华书店经销
*
2015 年 5 月第 一 版　开本：720 × 1000　1/16
2015 年 5 月第一次印刷　印张：22
字数：441 000

定价：128.00 元
(如有印装质量问题，我社负责调换)